ИЮНЬ 1993 г., ТОМ 29, № 6

УДК 517.925.7

С. Г. КОНДРАТЕНЯ, И. Н. МЕЛЬНИКОВА

КЛАССЫ СИСТЕМ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ ИМЕЮЩИХ РЕШЕНИЙ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

Будем рассматривать систему трех дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dz} = \frac{P_i(x_1, x_2, x_3, z)}{Q_i(x_1, x_2, x_3, z)} \quad (i=1, 2, 3), \tag{1}$$

где P_i и Q_i — функции, целые рациональные относительно x_1 и x_2, произвольные целые относительно x_3 и однозначные аналитические в некоторой области D относительно z.

В работах [1, 2] приведены условия, при выполнении которых система (1) не имеет решений

$$x_i = f_i(z) \quad (i=1, 2, 3), \tag{2}$$

у одной или двух компонент которых есть подвижные существенно особые точки второго класса. В настоящей статье продолжаются исследования, начатые в [1, 2]. Здесь будут указаны системы (1), не имеющие решений с тремя неопределенными компонентами, при этом будут сохранены все обозначения работ [1, 2] и нумерация полученных в указанных работах лемм и теорем. Дополнительно при условиях, что

$$P_i^{(1)}(x_2, x_3, z_0)\, Q_i^{(1)}(x_2, x_3, z_0)\, P_i^{(2)}(x_1, x_3, z_0)\, Q_i^{(2)}(x_1, x_3, z_0) \not\equiv 0$$

($z_0 \in D$, $i=1, 2, 3$), через $G_{ij}(z_0)$ и $H_{ij}(z_0)$ обозначаем те значения переменных x_1 и x_2, при которых соответственно имеем $P_i^{(1)}(H_{i1}(z_0), x_3, z_0)\, Q_i^{(1)}(H_{i2}(z_0), x_3, z_0) \equiv 0$ и $P_i^{(2)}(G_{i1}(z_0), x_3, z_0)\, Q_i^{(2)}(G_{i2}(z_0), x_3, z_0) \equiv 0$. Аналогично при условии, что $F_{1i}(x_2, x_3, z_0)\, F_{2i}(x_1, x_3, z_0) \not\equiv 0$ ($z_0 \in D$, $i=1, 2, 3$), через $R_i(z_0)$ и $S_i(z_0)$ обозначаем те значения переменных x_1 и x_2, при которых соответственно имеем $F_{1i}(S_i(z_0), x_3, z_0) \equiv 0$ и $F_{2i}(R_i(z_0), x_3, z_0) \equiv 0$.

Тогда справедлива

Теорема 9. *Если выполнено одно из следующих пяти условий:*

1) $r_{11} \geqslant \max\{2, r_{21}+2, r_{31}+2\}$, $r_{12} = r_{22}-2 \geqslant \max\{0, r_{32}\}$;

2) $r_{22} \geqslant \max\{2, r_{12}+2, r_{32}+2\}$, $r_{21} = r_{11}-2 \geqslant \max\{0, r_{31}\}$;

3) $r_{11} \geqslant \max\{2, r_{21}+2, r_{31}+2\}$, $r_{22}-2 < r_{12} = 0 \geqslant r_{32}$;

4) $r_{22} > \max\{2, r_{12}+2, r_{32}+2\}$, $r_{11}-2 < r_{21} = 0 \geqslant r_{31}$;

5) $r_{11} \leqslant 2$, $r_{21} \leqslant 0$, $r_{31} \leqslant 0$, $r_{22} \leqslant 2$, $r_{12} \leqslant 0$, $r_{32} \leqslant 0$,

а конечная точка $z_0 \in D$ *такова, что*

$$P_{00}^{(i)}(x_3, z_0)\, Q_{00}^{(i)}(x_3, z_0)\, \Phi_{i,k}(x_3, z_0) \not\equiv 0 \quad (i=1, 2;\ j=1, 2, 3;\ k=\overline{1, 6}),$$

и множества значений $R_i(z_0)$, $S_i(z_0)$, $G_{ij}(z_0)$, $H_{ij}(z_0)$ ($i=1, 2, 3$; $j=1, 2$) *пусты, то система (1) не имеет решений (2), для компонент* $f_i(z)$ ($i=1, 2, 3$) *которых точка* z_0 *является достижимой существенно особой точкой второго класса.*

Доказательство. Предположим, что при условиях теоремы 9 система (1) имеет решение (2), для функций $f_i(z)$ которого точка z_0 является достижимой существенно особой точкой второго класса. Тогда, очевидно, при $z \to z_0$ функции $f_i(z)$ не имеют предела, и в области E аналитичности этого решения можно указать такой путь L, вдоль которого $z \to z_0$, что при $z \to z_0$ вдоль этого пути функция $f_3(z)$ остается неопределенной. Следовательно, на L найдется последовательность точек $\{z_n\} \to z_0$ и такая, что $f_3(z_n) \to x_{30}$, причем конечное число x_{30} в предельном множестве $C_E(f_3; z_0; L)$ функции $f_3(z)$ в точке z_0 по пути L можно выбрать так, чтобы выполнялись условия

$$P_{0,0}^{(i)}(x_{30}, z_0)\, Q_{0,0}^{(j)}(x_{30}, z_0)\, \Phi_{i,k}(x_{30}, z_0) \neq 0 \quad (i=1, 2;\ j=1, 2, 3;\ k=\overline{1, 6}).$$

Всегда можно считать, что последовательности $\{f_1(z_n)\}$ и $\{f_2(z_n)\}$ при этом будут иметь вполне определенные пределы, конечные или бесконечные. В противном случае существовала бы подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$ последовательности $\{z_n\}$ с тем же свойством и достаточно было бы вместо последовательностей $\{f_1(z_n)\}$ и $\{f_2(z_n)\}$ рассмотреть их подпоследовательности $\{f_1(z_{n_k})\}$ и $\{f_2(z_{n_k})\}$.

Если $f_1(z_n) \to \infty$ и $f_2(z_n) \to \infty$, то точка $(\infty, \infty, x_{30}, z_0)$ будет обыкновенной для системы (1) и по утверждениям, аналогичным леммам 1 и 2 из работы [1], точка z_0 будет для функции $f_3(z)$ точкой голоморфности или алгебраической критической, а для $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — полюсом или критическим полюсом, что противоречит предположению.

Если $f_1(z_n) \to x_{10}$, а $f_2(z_n) \to \infty$, то, в силу того что множества $G_{ij}(z_0)$ пусты, точка $(x_{10}, \infty, x_{30}, z_0)$ будет обыкновенной для системы (1) и, следовательно, точка z_0 будет для функций $f_1(z)$ и $f_3(z)$ точкой голоморфности или алгебраической критической, а для $f_2(z)$ — полюсом или критическим полюсом, что также противоречит предположению. К аналогичному заключению (только со ссылкой на обыкновенную точку вида $(\infty, x_{20}, x_{30}, z_0)$) приходим в случае, когда $f_1(z_n) \to \infty$, а $f_2(z_n) \to x_{20}$.

Если же $f_1(z_n) \to x_{10}$ и $f_2(z_n) \to x_{20}$, то, в силу того что множества $R_i(z_0)$ и $S_i(z_0)$ пусты, точка $(x_{10}, x_{20}, x_{30}, z_0)$ будет обыкновенной для системы (1) и, следовательно, точка z_0 по лемме 2 [1] будет для функций $f_i(z)$ решения (2) или точкой голоморфности, или алгебраической критической, что окончательно и доказывает теорему.

Литература

1. Дежурко Ю. И., Кондратеня С. Г. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 5. С. 892—894.

2. Кондратеня С. Г. // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 2. С. 353—354.

Брестский государственный педагогический институт им. А. С. Пушкина

Поступила в редакцию 21 апреля 1992 г.