

Рис. 2

### Заключение

1. Разработана математическая модель, которая в полной мере описывает процесс паропрооницания сквозь нетканое иглопробивное полотно и позволяет провести расчёты с точностью, достаточной для прогнозирования основных пароизоляционных свойств исследуемых материалов.
2. Анализируя полученные практические и теоретические результаты, можно сделать вывод, что увеличение поверхностной плотности незначительно влияет на паропрооницаемые свойства материала. Можно увеличивать поверхностную плотность с небольшим уменьшением паропрооницания. Следовательно, при производстве доминирующими будут другие свойства материалов: водоупорность, прочность, воздухопроницаемость и т.д.
3. Как видно из графика практических результатов, сопротивление паропрооницаемости резко возрастает при значениях поверхностной плотности, близких к 500 г/м<sup>2</sup>. Поэтому данная модель рекомендована к использованию для расчётов в пределах интервала 100–500 г/м<sup>2</sup>.

Если углубляться в микро- и макропроцессы, происходящие при проникновении пара сквозь нетканые материалы, то можно установить ещё более точные значения коэффициентов и параметров, позволяющие ещё точнее предсказывать свойства исследуемых образцов.

### СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. СТБ 12572-2008 Теплотехнические свойства строительных материалов и изделий.
2. Кикоин, А.К. Молекулярная физика / А.К. Кикоин, И.К. Кикоин. – М.: Наука, 1976. – С. 145–147.
3. Саттерфилд, Ч.Н. Массопередача в гетерогенном катализе. – М.: Химия, 1976. – 240 с.
4. Рудобашта, С.П. Расчёт коэффициента извилистости и фактора формы пор при диффузии в однородно-пористых материалах / С.П. Рудобашта, Ю.А. Тепляков // Пром. теплотехника. – 1987. – Т. 9. – № 1. – С. 61.
5. Строительная теплотехника: ТКП 45-2.04-43-2006.
6. Рудобашта, С.П. Расчёт коэффициента извилистости и фактора формы пор при диффузии в однородно-пористых материалах / С.П. Рудобашта, Ю.А. Тепляков // Пром. теплотехника. – 1987. – Т. 9. – № 1. – С. 64.
7. Новый справочник химика и технолога. Электродные процессы. Химическая кинетика и диффузия. Коллоидная химия / Р.Ш. Абиев [и др.]; под ред. С.А. Симанова. – СПб: Проффессионал, 2004. – 838 с.

Материал поступил в редакцию 18.04.11

### LUKYANENKA A. The mathematical model for calculating vapor barrier properties of nonwoven needle-punched materials

This article describes a mathematical model of water vapor to the theoretical calculations and prediction of vapor barrier properties of needle-punched non-woven materials, methods of laboratory testing. We derive the basic formulas and generalized physical laws that describe the process of water vapor at the molecular level. Provides data of experimental studies, carried out the comparison and analysis of theoretical and experimental results.

УДК 539.3

Ван Чживэй, Босяков С.М.

## ВЛИЯНИЕ УГЛА НАМОТКИ СТЕКЛОВОЛОКНА НА ПАРАМЕТРИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОНСТРУКТИВНО АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

**Введение.** Вопросы динамической потери устойчивости анизотропных армированных оболочек из стекловолокна под действием вибрационных нагрузок обсуждались в работе [1]. В частности, для

случая, когда направление намотки стекловолокна совпадает с основными направлениями упругости ортотропного материала, получены выражения для критического значения осевой нагрузки и

**Босяков Сергей Михайлович**, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета.

**Ван Чживэй**, аспирант кафедры теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета. Беларусь, БГУ, 220050, г. Минск, проспект Независимости, 4.

найлены критические частоты, ограничивающие области неустойчивости. Настоящая работа развивает это направление и содержит результаты анализа динамической устойчивости армированных оболочек в осесимметричном случае для произвольного угла намотки стекловолокна.

**Определяющие уравнения.** Динамические уравнения равновесия цилиндрических оболочек представим в следующем виде [2, 3]:

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= \rho R^2 \partial_t^2 u, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w &= \rho R^2 \partial_t^2 v, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= -\rho R^2 \partial_t^2 w. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u$ ,  $v$  и  $w$  – перемещения срединной поверхности оболочки в продольном, окружном и радиальном направлении,  $\rho$  – плотность стеклопластика,  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки,  $\partial_t = \partial/\partial t$ . Операторы  $L_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, 3}$  имеют вид:

$$\begin{aligned} L_{11} &= B_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \theta}, \\ L_{12} = L_{21} &= B_{16} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \theta}, \\ L_{13} = L_{31} &= B_{12} \frac{\partial}{\partial \alpha} + B_{26} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ L_{22} &= B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \theta}, \\ L_{23} &= B_{26} \frac{\partial}{\partial \alpha} + B_{22} \frac{\partial}{\partial \theta} - K \left( B_{16} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + B_{22} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \right. \\ &\quad \left. + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \theta} + 3B_{26} \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \theta^2} \right), \\ L_{32} &= B_{26} \frac{\partial}{\partial \alpha} + B_{22} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ L_{33} &= B_{22} + K \left( B_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + B_{12} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + (B_{11} + B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \theta^2} \right) + \\ &\quad + K \left( 4B_{16} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \theta} + 2(B_{26} + B_{16}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \theta^3} \right), \quad K = \frac{h^2}{12R^2}, \end{aligned}$$

где  $\alpha$  – выраженное в долях радиуса срединной поверхности оболочки  $R$  расстояние по образующей,  $\theta$  – угловая координата в окружном направлении,  $h$  – толщина оболочки.

Постоянные упругости зависят от угла  $\varphi$  намотки стекловолокна и определяются следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} B_{11} &= b_{11} \cos^4(\varphi) + b_{22} \sin^4(\varphi) + \left( b_{66} + \frac{1}{2} b_{12} \right) \sin^2(2\varphi), \\ B_{22} &= b_{11} \sin^4(\varphi) + b_{22} \cos^4(\varphi) + \left( b_{66} + \frac{1}{2} b_{12} \right) \sin^2(2\varphi), \\ B_{12} &= (b_{11} + b_{22} - 4b_{66}) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + \\ &\quad + b_{12} (\sin^4(\varphi) + \cos^4(\varphi)), \\ B_{66} &= (b_{11} + b_{22} - 2b_{12}) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + b_{66} \cos^2(2\varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{26} &= \frac{1}{2} (b_{22} \cos^2(\varphi) - b_{11} \sin^2(\varphi)) \sin(2\varphi) - \\ &\quad - \frac{1}{4} (b_{12} + 2b_{66}) \sin(4\varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{16} &= \frac{1}{2} (b_{22} \sin^2(\varphi) - b_{11} \cos^2(\varphi)) \sin(2\varphi) - \\ &\quad - \frac{1}{4} (b_{12} + 2b_{66}) \sin(4\varphi), \end{aligned}$$

где  $b_{11}$ ,  $b_{22}$ ,  $b_{12}$  и  $b_{66}$  – основные модули упругости ортотропного материала,  $\varphi$  – угол между основным направлением упругости и окружной координатной линией (угол ориентации стекловолокна относительно основы стеклоткани).

Если пренебречь тангенциальными составляющими сил инерции и ввести в систему (1) распределенные продольные пульсирующие силы  $P(t) = P_0 + P_1 \cos(\Omega t)$ , то эту систему можно представить в виде [1]

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= 0, \quad L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = 0, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= -\frac{P(t)}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \rho R^2 \partial_t^2 w. \end{aligned} \quad (2)$$

С помощью операторного метода систему уравнений движения (2) можно свести к одному разрешающему дифференциальному уравнению восьмого порядка относительно некоторой функции  $\Phi(\alpha, \theta, t)$ , связанной с перемещениями следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= (L_{13}L_{22} - L_{12}L_{23}) \Phi(\alpha, \theta, t), \\ v &= (L_{11}L_{23} - L_{13}L_{21}) \Phi(\alpha, \theta, t), \\ w &= (L_{12}L_{21} - L_{11}L_{22}) \Phi(\alpha, \theta, t). \end{aligned} \quad (3)$$

После подстановки выражений (3) в систему (2) первые два уравнения системы (2) удовлетворяются тождественно, а третье уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \rho R^2 \nabla_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\alpha, \theta, t) + \frac{P(t)}{h} \nabla_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \Phi(\alpha, \theta, t) + \\ + \nabla_2 \Phi(\alpha, \theta, t) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} \nabla_1 &= L_{12}L_{21} - L_{11}L_{22}, \\ \nabla_2 &= L_{31}(L_{13}L_{22} - L_{12}L_{23}) - \\ &\quad - L_{32}(L_{13}L_{21} - L_{11}L_{23}) + L_{33}(L_{12}L_{21} - L_{11}L_{22}). \end{aligned}$$

Решение дифференциального уравнения (4) будем искать в виде, удовлетворяющем при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = l/R$  следующим краевым условиям:

$$u = v = \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0, \quad w \neq 0.$$

В этом случае примем

$$\Phi(\alpha, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \cos\left(\frac{m\pi R\alpha}{l}\right), \quad (5)$$

где  $m$  – число полуволн вдоль образующей цилиндра.

Подставляя выражение (5) в уравнение (4), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{d^2 T_m(t)}{dt^2} + \frac{A T_m(t)}{\rho R^2} \right) \cos\left(\frac{m\pi R\alpha}{l}\right) = 0. \quad (6)$$

Здесь коэффициент  $A$  имеет следующий вид:

$$A = K\lambda^4 B_{11}(B_{11}B_{66} - B_{16}^2) + K\lambda^2 B_{16}(B_{12}B_{16} - B_{11}B_{26}) + B_{11}(B_{22}B_{66} - B_{26}^2) - B_{12}(B_{12}B_{66} - 2B_{16}B_{26}) - B_{16}^2 B_{22} - \lambda^2 P(t), \lambda = \frac{m\pi R}{l}.$$

Поскольку уравнение (6) должно удовлетворять при любых  $\alpha$ , будем иметь

$$\frac{d^2 T_m(t)}{dt^2} + A \frac{T_m(t)}{\rho R^2} = 0. \quad (7)$$

Отсюда при условии  $A = 0$  критическое значение осевой нагрузки для рассматриваемой оболочки

$$P^* = K\lambda^2 B_{11}(B_{11}B_{66} - B_{16}^2) + KB_{16}(B_{12}B_{16} - B_{11}B_{26}) + \frac{1}{\lambda^2} (B_{11}(B_{22}B_{66} - B_{26}^2) - B_{12}(B_{12}B_{66} - 2B_{16}B_{26}) - B_{16}^2 B_{22}). \quad (8)$$

В предположении, что  $T_m(t) = c \cos(\omega t)$  (или  $T_m(t) = c \sin(\omega t)$ ), выражение для частоты свободных колебаний примет следующий вид

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho R^2} (K\lambda^4 B_{11}(B_{11}B_{66} - B_{16}^2) + K\lambda^2 B_{16}(B_{12}B_{16} - B_{11}B_{26}) + B_{11}(B_{22}B_{66} - B_{26}^2) - B_{12}(B_{12}B_{66} - 2B_{16}B_{26}) - B_{16}^2 B_{22} - \lambda^2 P_0), \quad (9)$$

С учетом выражения (8) имеем

$$\omega^2 = \frac{\lambda^2}{\rho R^2} (P^* - P_0), \quad A = \lambda^2 (P^* - P(t)). \quad (10)$$

На основании зависимостей (10) уравнение (7) сводится к уравнению Матье:

$$\frac{d^2 T_m(\tau)}{d\tau^2} + \delta(1 - 2\mu \cos(2\tau)) T_m(\tau) = 0, \quad (11)$$

в котором принято

$$\tau = \frac{\Omega t}{2}, \quad \delta = \frac{4\omega^2}{\Omega^2}, \quad \mu = \frac{P_1}{2(P^* - P_0)}.$$

Отсюда следует, что при данных  $\mu$ ,  $\delta$  и  $\tau \rightarrow \infty$  решение уравнения (11) будет неограниченно возрастать в областях неустойчивости (первой, второй и третьей), границы которых описываются следующими выражениями [4]:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 1 \pm \mu + \frac{7}{8}\mu^2 \pm \frac{117}{192}\mu^3, \\ \delta_2 &= 4 - \frac{4}{3}\mu^2, \quad \delta_2 = 4 + \frac{20}{3}\mu^2, \\ \delta_3 &= 9 + \frac{81}{16}\mu^2 \pm \frac{729}{64}\mu^3. \end{aligned} \quad (12)$$

**Области устойчивости и неустойчивости.** Рассмотрим влияние изменения угла намотки стекловолокна  $\varphi$ , изменяющегося от 0 до  $\pi/2$ , на параметрические колебания оболочки. На рис. 1 представлена зависимость критического значения осевой нагрузки  $P^*$  от угла  $\varphi$ , а также обозначены распределенные продольные силы  $P_0$ . При построении принимаем основные модули упругости  $b_{11} = 18,3$ ,  $b_{22} = 25,2$ ,  $b_{66} = 3,5$ ,  $b_{12} = 2,77$  ГПа, плотность  $\rho = 1850$  кг/м<sup>3</sup> [1]. Геометрические параметры оболочки  $h = 1$  мм,  $R = 0,5$  м,  $l = 10$  м. Распределенные продольные

пульсирующие силы характеризуются значениями  $P_0 = 7$  ГПа,  $P_1 = 90$  МПа,  $\Omega = 3000$  1/с. Число полуволн вдоль образующей цилиндра  $m = 1$ .

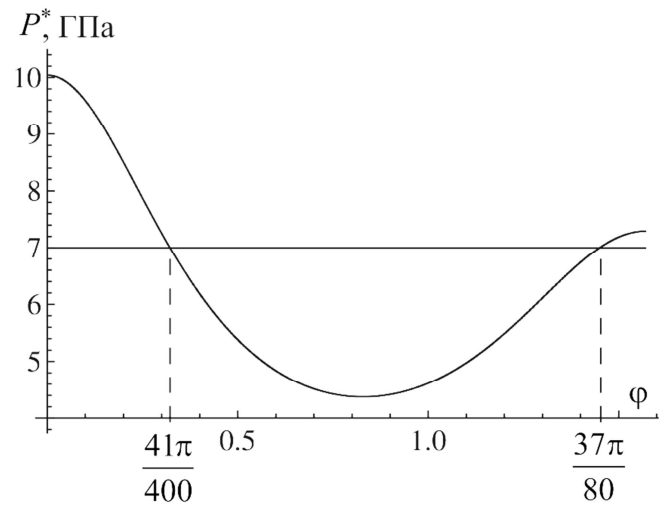


Рис. 1. Зависимость критического значения осевой нагрузки  $P^*$  от угла намотки  $\varphi$  и распределенные продольные силы

Из рисунка 1 видно, что наибольшее значение критическая осевая нагрузка имеет при  $\varphi = 0$ . Минимальное значение силы  $P^*$  достигается при  $\varphi = \pi/4$ . Для угла намотки стекловолокна из интервала  $(41\pi/400, 37\pi/80)$  выполняется неравенство  $P^* < P_0$ , поэтому  $\mu < 0$  (постоянное значение нагрузки  $P_0$  обозначено на рис. 1 прямой параллельной оси абсцисс). Отсюда следует, что решение уравнения (11) будет неограниченно возрастать при  $t \rightarrow \infty$  и амплитуды колебаний оболочек также будут неограниченно возрастать. Если угол намотки стекловолокна принадлежит интервалу  $(0, 41\pi/400)$  или  $(37\pi/80, \pi/2)$  имеют место неравенства  $P^* > P_0$  и  $\mu > 0$ , в этом случае могут возникнуть параметрически устойчивые колебания.

Проведем расчет значений угла намотки стекловолокна  $\varphi$ , для которых возникают параметрические колебания в области неустойчивости. На рис. 2 одновременно показаны области неустойчивости и зависимость параметра  $\mu$  от угла  $\varphi$ , принадлежащему интервалу  $[0, 41\pi/100)$  (кривая  $AB$ ). Точка  $A$  кривой  $AB$  соответствует углу  $\varphi = 41\pi/400$ , точка  $B$  – углу  $\varphi = 0$ .

Из рис. 2 видно, что кривая проходит через первую, вторую и третью области неустойчивости. В частности, предельные значения угла намотки, при которых возникают параметрически неустойчивые колебания, составляют  $2009\pi / 20000 \leq \varphi \leq 41\pi / 200$  в первой области неустойчивости,  $779\pi / 8000 \leq \varphi \leq 7831\pi / 80000$  во второй области неустойчивости. Аналогичный расчет значений угла  $\varphi$  из промежутка  $(37\pi/80, \pi/2]$  показывает, что параметрически неустойчивые колебания возникают при  $37\pi / 80 \leq \varphi \leq 18701\pi / 40000$  для первой области неустойчивости и  $18997\pi / 40000 \leq \varphi \leq 19083\pi / 40000$  для второй области неустойчивости.

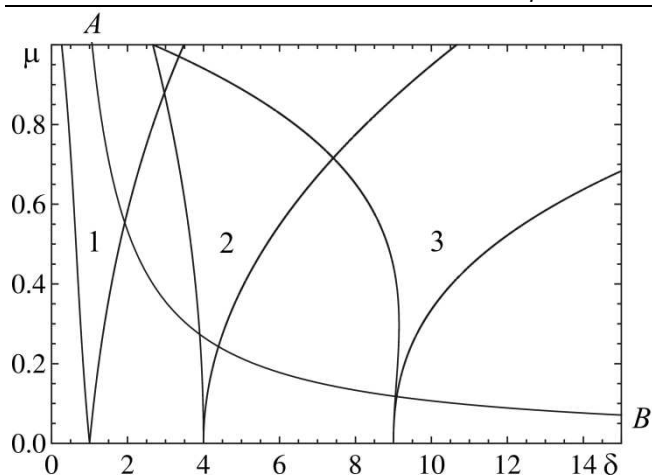


Рис. 2. Области неустойчивости и зависимость  $\mu(\varphi)$

**Заключение.** Полученные в работе результаты показывают, что угол при определенных углах намотки стекловолокна могут возникнуть параметрически неустойчивые колебания цилиндрических оболочек под действием продольных пульсирующих сил. Это тем более важно, поскольку при некоторых углах намотки стекловолокна может наблюдаться основной резонанс, соответствующий первой области неустойчивости и наиболее часто встречающийся на практике.

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Соппротивление стеклопластиков // В. Л. Бажанов [и др.] – М: Машиностроение, 1968. – 303 с.
2. Huang Kezhi. Theory of plates and shells. – Beijing: Tsinghua University Press, 1987. – 407 p.
3. Xu Zhilun. Elasticity. Volume II. – Beijing: Higher Education Press, 2006. – 287 p.
4. Zhou Jiqing. Nonlinear vibration. Xi'an Jiaotong University Press. China, 1998 – 423 p.

Материал поступил в редакцию 24.02.11

#### VAN CHZIVEY, BOSYAKOV S.M. The influence of a corner of winding of fiber glass on dynamic stability cylindrical axisymmetric is constructive anisotropic of environments

In the present work the results of research of parametrical fluctuations cylindrical structurally anisotropic of an environment from fibreglass subject to action of longitudinal pulsing force are submitted under boundary conditions Nav'e. The fibreglass is considered as homogeneous monolithic anisotropic a material, which elastic properties depend on a corner of winding of fiber glass. The dependence of critical loading on a corner of winding of fiber glass is received and the ranges of corners of winding are determined, at which are observed параметрически unstable fluctuations.

УДК 69.04

Орлов С.А.

### СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И СИМВОЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

**Краткий обзор и актуальность исследований.** С уверенностью можно констатировать, что системы прочностного анализа промышленной реализации имеют в основе вычислительного ядра всевозможные модификации метода конечных элементов (МКЭ) – универсального метода исследования математической физики, доминирующего последние примерно пятьдесят лет. Интересно отметить, что научные аспекты расчета сложных стержневых систем не ограничиваются рамками МКЭ, широкий их обзор приведен в работе [2]. В части задач строительной механики метод конечных элементов представлен двумя основными модификациями: собственно матричная реализация метода перемещений и классическое расширение приема Рэлея-Ритца, связанного с угадыванием деформированной формы и последующей минимизацией функционала полной потенциальной энергии конструкции.

Указанные подходы, тем не менее, имеют единую – энергетическую природу. Так, уравнения метода перемещений прямо вытекают из принципа стационарности потенциальной энергии, к которому, в свою очередь, приводит первая теорема Кастилиано.

Универсальность, общность подходов к анализу проблем математической физики вообще и механики деформируемых твердых тел, в частности, предопределили доминирующее положение метода конечных элементов в расчетной практике, особенно на стадии поверочных расчетов. Тем не менее в части задач определения оптимальных формы и размеров конструкций, задач предварительного проектирования и утверждения параметров, метод проявляет существенный концептуальный недостаток – численный стационарный характер решений. Именно параметрический анализ посредством МКЭ строится на основе разовых отдельных вычислительных процедур, по результатам которых выносятся суждения о ключевых зависимостях и влиянии исходных параметров на конечные результаты. Причем «широта» такого анализа ограничивается, прежде всего, комбинаторным влиянием множества факторов – исходных данных на конечный результат

в виде перемещений, напряжений и деформаций.

Сегодня, однако, имеется возможность получения решений общего характера, устраняющих описанный недостаток. Основное преимущество аналитических методов исследования состоит в том, что они дают ясное представление о взаимосвязи параметров конструкции с ее несущей способностью, возможность параметрического анализа и формулировки новых закономерностей. Распространенность стержневых конструкций в качестве несущих каркасов и преимущества аналитического описания поведения сложных объектов определяют актуальность исследований.

**Постановка задачи.** В работе [3] представлен пример полностью символьно-аналитического (буквенного) расчета простейшей плоскопространственной рамы и приведены самые общие аналитические решения для реакций в опорах конструкции, обсуждаются также возможности параметрического анализа. Поставим задачу получить общие формульные решения и провести сравнение численных результатов МКЭ и результатов, полученных в экспериментальном программном обеспечении (ЭПО) для тестовой конструкции, общий вид которой представлен на рисунке 1.

Конструкция нагружена вертикальными сосредоточенными силами  $F = 15000\text{H}$ , горизонтальными усилиями  $F = 2000\text{H}$ , сосредоточенными моментами  $m = 5000\text{H}\cdot\text{м}$  и распределенными нагрузками в трех направлениях глобальной системы координат  $q = 100\text{H}/\text{м}$  так, как показано на рисунке 1, узлы системы – жесткие. В крайних точках основания устроены жесткие опоры, ограничены также горизонтальные перемещения двух узловых точек верхнего контура конструкции (рисунок 1).

Не нарушая общности анализа, примем, что все элементы конструкции – невесомые стержни круглого поперечного сечения. Материал стержней – линейно упругий, модель предполагает работу конструкции в области выполнения закона Гука при заданных нагрузках. Характеристики геометрии и материала стержней представлены в

Орлов С.А., кандидат физико-математических наук, Резидент Парка высоких технологий Беларуси, г. Гомель, Беларусь.