МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра физики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению практических заданий по дисциплине

«ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ»

Часть I

для студентов специальности

1-36 04 02 «Промышленная электроника»

дневной формы обучения

Брест 2009

ББК 74.265.1 я 73
УДК 538.91, 548.73, 378.147:53
П 61

Методические указания предназначены студентам специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» дневной формы обучения для выполнения практических заданий по физическим основам электронной техники. Содержит основные теоретические сведения, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения и рекомендуемую литературу.

Издаётся в 2 частях. Часть 1.

Составители: А.И. Пинчук, доцент, к.ф-м.н.
И.С. Янусик, старший преподаватель

Рецензент: В.С. Костко, к.ф-м.н, доцент кафедры общей физики БрГТУ им. А.С. Пушкина

СТРОЕНИЕ ТВЁРДЫХ ТЕЛ

Молярный объем кристалла:

$$V_m = M / \rho,$$

где M – молярная масса вещества, ρ – плотность кристалла.

Объем V элементарной ячейки в кристаллах:
при кубической сингонии

$$V = a^3;$$

при гексагональной сингонии

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 c.$$

Здесь a и c - параметры решётки.

Если для гексагональной решётки принять теоретическое значение

$$c = \sqrt{8/3a},$$

то

$$V = \sqrt{2a^3}.$$

Число Z_m элементарных ячеек в одном моле кристалла:

$$Z_m = V_m / V \quad \text{или} \quad Z_m = kN_A / n,$$

где k – число одинаковых атомов в химической формуле соединения (например, в кристалле AgBr число одинаковых атомов Ag или Br в химической формуле соединения равно единице); N_A – число Авогадро; n – число одинаковых атомов, приходящихся на элементарную ячейку. На рис. 1.1 представлена структура NaCl; аналогичную структуру имеют соединения KBr, AgBr, MnO и др.

Число Z элементарных ячеек в единице объема кристалла:

$$Z = Z_m / V_m$$

или в общем случае:

$$Z = \rho k N_A / nM;$$

для кристалла, состоящего из одинаковых атомов ($k=1$):

$$Z = \rho N_A / nM.$$

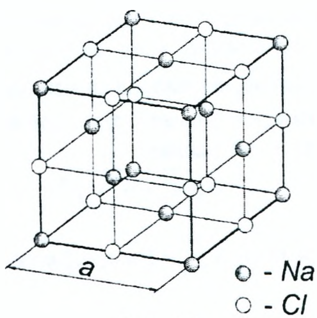

Рис. 1.1

Параметр a кубической решётки:

$$a=\sqrt[3]{\frac{nM}{k\rho N_A}}.$$

Расстояние d между соседними атомами в кубической решётке:
в гранецентрированной

$$d=\frac{a}{\sqrt{2}};$$

в объёмно-центрированной

$$d=\sqrt{3}\,\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Для обозначения узлов, направлений и плоскостей в решётке вводятся специальные индексы.

Индексы узлов записывают в двойных квадратных скобках

[[mnp]]

Для отрицательных индексов над буквами ставится знак минус, например $\bar{m}$ (рис. 1.2)

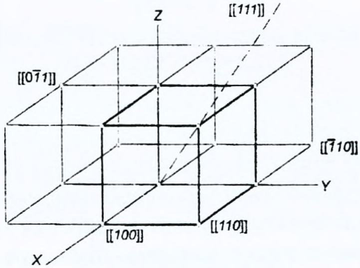

Рис. 1.2.

Индексы направлений записываются в одинарных квадратных скобках:

[mnp]

Индекс направления совпадает с индексом узла, через который проходит прямая, если эта прямая одновременно проходит и через начало координат.

Индексы направления задают не одну прямую в кристалле, а семейство параллельных прямых. Изменение всех индексов на обратные по знаку $[\bar{m}\ \bar{n}\ \bar{p}]$, означает то же самое направление в кристалле.

Период идентичности вдоль прямой, заданной индексами [mnp], в кубической решётке выражается соотношением:

$$l=a\sqrt{m^2+n^2+p^2},$$

где a – параметр решётки.

Угол φ между прямыми $[m_1n_1p_1]$ и $[m_2n_2p_2]$ в кубической решётке выражается формулой:

$$\cos\phi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Индексы плоскости (индексы Миллера) записывают в круглых скобках (hkl). Изменение всех индексов на обратные ($\bar{h}\ \bar{k}\ \bar{l}$) отвечает тому же семейству плоскостей.

Индексы Миллера определяются минимальными отрезками, отсекаемыми плоскостью на осях координат. Предположим, что плоскость отсекает на осях отрезки x_l, y_l и z_l, выраженные в единицах длин ребер ячейки. Тогда существует некоторое число s, которое при умножении на обратные значения этих отрезков дает ряд наименьших целых чисел $h=s/x_l$, $k=s/y_l$ и $l=s/z_l$. Числа $h.k.l$ называются индексами Миллера для плоскости и записываются в круглых скобках (hkl) (см. пример 4). Индексы Миллера пропорциональны направляющим косинусам вектора нормали к данной плоскости. Поэтому индексы Миллера для некоторого семейства плоскостей совпадают с индексами направлений нормали к этим плоскостям.

Угол φ между плоскостями ($h_1k_1l_1$) и ($h_2k_2l_2$) определяется из формулы:

$$\cos\phi = \frac{h_1h_2 + k_1k_2 + l_1l_2}{\sqrt{h_1^2 + k_1^2 + l_1^2}\sqrt{h_2^2 + k_2^2 + l_2^2}};$$

а между прямой [mnp] и плоскостью (hkl) – из формулы:

$$\cos\phi = \frac{hm + kn + lp}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Определить число n узлов, приходящихся на одну элементарную ячейку в гранецентрированной кубической решётке.

Решение.

Выделим элементарную ячейку в кубической решетке (рис. 1.3) и определим, скольким соседним элементарным ячейкам принадлежит тот или иной узел выделенной ячейки. В этой ячейке узел A находится в вершинах куба и узел B находится на гранях куба в точке пересечения диагоналей.

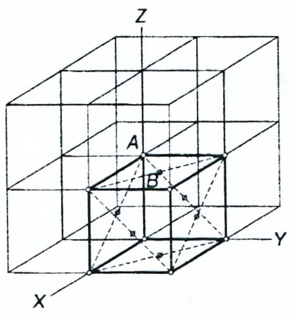

Рис. 1.3

Узел A принадлежит одновременно восьми элементарным ячейкам. Следовательно, в данную ячейку узел A входит с долей 1/8. Узел B входит одновременно только в две ячейки. Следовательно, в данную ячейку узел B входит с долей 1/2. Если учесть, что число узлов типа A в ячейке равно восьми, а число узлов типа B равно шести, т. е. числу граней, то общее число узлов, приходящихся на одну элементарную ячейку в гранецентрированной решетке,

$$n = (1/8)\cdot 8 + (1/2)\cdot 6 = 1 + 3 = 4 \text{ узла.}$$

Так как число узлов равно числу атомов, то в соответствующей структуре на элементарную ячейку приходится четыре атома.

2. Определить параметр a решетки и расстояние d между ближайшими соседними атомами кристалла кальция (решётка гранецентрированная кубической сингонии). Плотность ρ кристалла кальция равна $1{,}55\cdot10^3$ кг/м^3.

Решение.

Параметр a кубической решетки связан с объёмом элементарной ячейки соотношением $V=a^3$. С другой стороны, объём элементарной ячейки равен отношению молярного объёма к числу элементарных ячеек в одном моле кристалла: $V=V_m/Z_m$. Приравняв правые части приведенных выражений для V, найдем

$$a^3=V_m/Z_m \qquad (1)$$

Молярный объём кальция

$$V_m=M/\rho,$$

где ρ – плотность кальция; M – его молярная масса.

Число элементарных ячеек в одном моле

$$Z_m=N_A/n,$$

где n – число атомов, приходящихся на одну ячейку.

Подставив в формулу (1) приведенные выражения для V_m и Z_m, получим

$$a^3=\frac{nM}{\rho N_A}$$

Отсюда

$$a=\sqrt[3]{\frac{nM}{\rho N_A}} \qquad (2)$$

Подставим значения величин n, M, ρ и N_A в формулу (2), учитывая, что n=4 (см. предыдущий пример). Произведя вычисления, найдем

a=556 пм.

Расстояние d между ближайшими соседними атомами находится из простых геометрических соображений, ясных из рис.1.4.

$$d=a/\sqrt{2}$$

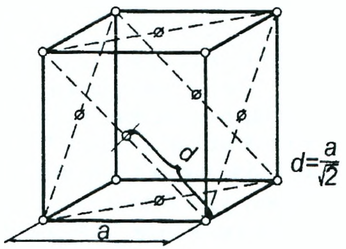

Рис. 1.4

Подставив в это выражение найденное ранее значение **a**, получим

d=393 пм.

3. Написать индексы направления прямой, проходящей через узлы [[100]] и [[001]] кубической примитивной решётки.

Решение.

Изобразим кубическую примитивную ячейку, отметим на ней узлы с индексами [[001]] и [[00 1]] и проведем через эти узлы прямую (рис. 1.5, а).

Индексы прямой совпадают с индексами узла, ближайшего к началу координат, через который проходит прямая. Заданная прямая не проходит через начало координат. Но этого можно достигнуть, перенеся начало координат в один из узлов, через которые проходит прямая.

Если перенести начало координат в узел [[100]] (рис. 1.5, б), то узел, лежащий на той же прямой и ближайший к выбранному началу координат, будет иметь индексы $[[\bar{1}01]]$, а искомое направление в этом случае определится индексами $[\bar{1}01]$.

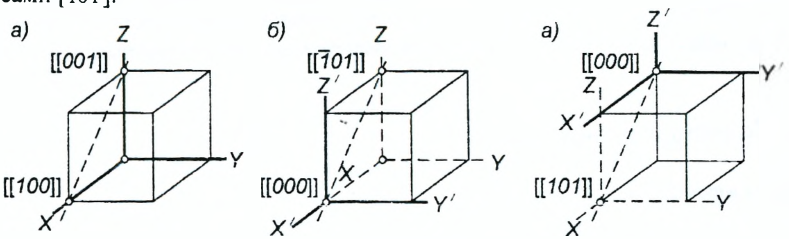

Рис. 1.5

Если же начало координат перенести в узел [[001]], то соответственно индексы искомого направления будут [101]. Итак, индексы искомого направления в кристалле $[\bar{1}01]$ или $[10\bar{1}]$.

Не всегда бывает легко определить, как изменятся индексы узлов при переносе начала координат. Поэтому рассмотрим аналитический метод решения.

Напишем в общем виде уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве, с индексами узлов $[[m_1n_1p_1]]$ и $[[m_2n_2p_2]]$:

$$\frac{x-m_1}{m_2-m_1}=\frac{y-n_1}{n_1-n_2}=\frac{z-p_1}{p_2-p_1} \qquad (1)$$

Величины, стоящие в знаменателе, пропорциональны направляющим косинусам прямой. Но так как эти величины целочисленны, то они и будут являться индексами направления.

Подставив в знаменатель выражения (1) значения индексов узлов $m_1=1$, $p_1=0$, $n_1=0$ и $m_2=0$, $p_2=1$, $n_2=0$, получим:

$$m_2-m_1=0-1=-1,\ n_2-n_1=0-0=0,\ p_2-p_1=1-0=1.$$

Таким образом, искомые индексы направления $[\bar{1}01]$.

4. Написать индексы Миллера для плоскости, содержащей узлы с индексами [[200]], [[010]] и [[001]]. Решётка кубическая, примитивная.

Решение.

В данном случае узлы, принадлежащие плоскости, лежат на осях координат, и отрезки (в единицах постоянной решетки), отсекаемые на осях координат этой плоскостью, соответственно будут 2, 1, 1.

В соответствии с общим правилом нахождения индексов Миллера напишем обратные значения полученных чисел $\frac{1}{2};\frac{1}{1};\ \frac{1}{1}$ и приведем их к наименьшему целому кратному этих чисел. Для этого умножим числа на два. Полученная совокупность значений, заключённая в круглые скобки, и есть искомые индексы Миллера (122).

5. Известно, что длина волны характеристического рентгеновского излучения, полученного с медного анода, составляет 1,537 $\overset{0}{A}$. Эти лучи, попадая на кристалл алюминия, вызывают дифракцию от плоскостей (111) под брэгговским углом $19{,}2^0$. Алюминий имеет структуру гранецентрированного куба (г.ц.к.), плотность его 2699 кг/м^3, атомная масса $26{,}98 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Рассчитать число Авогадро по этим экспериментальным данным.

Решение.

По формуле Вульфа – Брэгга

$$2d\,sin\,\alpha = k\lambda$$

найдём межплоскостное расстояние при k=1

$$d_{111} = \frac{\lambda}{2sin\,\alpha}$$

Для кубической решетки:

$$d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}},$$

поэтому

$$d_{111} = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{\lambda\sqrt{3}}{2sin\,\alpha}.$$

В элементарной ячейке гранецентрированной решётки содержится четыре атома. Поэтому число атомов в единице объёма металла:

$$n = \frac{4}{a^3} = \frac{4 \cdot 8sin^3\alpha}{\lambda^3 3\sqrt{3}} = \frac{32sin^3\alpha}{\lambda^3 3\sqrt{3}}.$$

С другой стороны число атомов в единице объема:

$$n = \frac{N_A}{A}\rho.$$

Тогда
$$\frac{N_A}{A}\rho = \frac{32sin^3\alpha}{\lambda^3 3\sqrt{3}},$$

Откуда

$$N = \frac{32sin^3\alpha}{\lambda^3 3\sqrt{3}} \cdot \frac{A}{\rho};$$

$$N = \frac{32sin^3 19{,}2^0 \cdot 26{,}98 \cdot 10^{-3}}{3\sqrt{3} \cdot (1{,}537 \cdot 10^{-10})^3 \cdot 2699} \approx 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Сколько атомов приходится на одну элементарную ячейку в кристаллах с простой, объёмноцентрированной и гранецентрированной кубической структурой?

Ответ: 1;2;4.

2. Сколько атомов приходится на одну элементарную ячейку в кристаллах с простой и плотноупакованной гексагональной структурой? Указание: атом, находящийся в вершине гексагональной призмы, принадлежит шести элементарным ячейкам.

Ответ: 2;6.

3. Показать, что для идеальной гексагональной структуры с плотной упаковкой $c\,/\,a=1{,}633$. Указание: В гексагональной плотной упаковке три атома первого слоя и один атом второго слоя образуют четырехгранную пирамиду, высота которой равна $c/2$. Расстояние между центрами атомов равно a.

4. Вычислить объем элементарной ячейки в кристалле гексагональной системы с постоянными a и c.

Ответ: $(\sqrt{3}\,/\,2)a^2c$.

5. Определить постоянную кристаллической решётки ванадия, имеющего структуру объёмноцентрированного куба.

Ответ: 3,03.

6. Определить постоянную кристаллической решётки алюминия (гранецентрированный куб).

Ответ: 7,04.

7. Кристалл кадмия имеет плотноупакованную гексагональную структуру с постоянными $a=2{,}97\ \mathring{A}$, $c=5{,}61\ \mathring{A}$. Вычислить плотность кадмия.

Ответ: $8{,}65\cdot10^3$ кг/м^3.

8. Вычислить плотность кристалла бромистого калия, имеющего простую кубическую структуру с постоянной $a=6{,}59$.

Ответ: $2{,}74\cdot10^3$ кг/м^3.

9. α-железо имеет кубическую объёмноцентрированную структуру ($a=2{,}86\ \mathring{A}$), γ-железо - кубическую структуру с центрированными гранями ($a=3{,}56\ \mathring{A}$). Как изменится плотность железа при переходе его из α в γ- модификацию?

Ответ: увеличится на 4%.

10. Коэффициентом компактности называется отношение объёма, занимаемого соприкасающимися шарами, центры которых находятся в узлах решётки, ко всему объёму элементарной ячейки. Вычислить коэффициент компактности простой, объемноцентрированной, гранецентрированной кубической и плотноупакованной гексагональной решёток.

Ответ: 0,52; 0,68; 0,74; 0,74.

11. Плотность кристалла NaCl $2{,}18\cdot10^3$ кг/м^3. Атомная масса натрия - $23{,}1\cdot10^{-3}$ кг/моль; хлора - $35{,}46\cdot10^{-3}$ кг/моль. Определить постоянную решётки.

Ответ: $2{,}81\ \mathring{A}$.

12. Найти число атомов алюминия в единице объёма. Плотность алюминия $2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3.

Ответ: $6{,}02\cdot10^{28}$.

13. Определить число атомов в элементарной ячейке железа, кристаллизующегося в кубической системе. Ребро куба a=2,27 $\mathring{A}$; атомная масса железа - $55{,}84 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; плотность его - 7800 кг/м^3.

Ответ: 1,99.

14. Определить объёмы элементарных ячеек через радиусы равновеликих шаров, образующих плотные упаковки для: 1) объёмноцентрированной решётки; 2) гранецентрированной решётки; 3) гексагональной решётки.

Ответ: 1) $64 \cdot 2^3/3 \cdot \sqrt{3}$; 2) $16 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^3$; 3) $24 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^3$.

15. Пусть элементарная ячейка простой кубической решётки построена из одинаковых атомов, представляющих собой жёсткие сферы с радиусом r. Ребро элементарной ячейки $a=2r$ (атомы касаются друг друга). Показать, что часть объема, занятая атомами при таком расположении, равна $\pi/6=0{,}523$.

16. Объёмноцентрированная кубическая решётка состоит из атомов одного вида, имеющих радиусы r. Пусть атомы, расположенные по диагонали, которая проходит через центр куба, касаются друг друга. Показать, что часть объёма, занятая атомами при таком расположении, равна $\pi\sqrt{3}/8=0{,}68$.

17. Пусть гранецентрированная кубическая и гексагональная решётки построены из одинаковых атомов, представляющих собой жёсткие сферы с радиусом r. Показать, что часть объёма, занятая атомами при таком расположении, равна $\pi\sqrt{2}/6=0{,}74$.

18. Пусть атомы a и b образуют кристалл, имеющий структуру CsCl, и представляют собой жесткие сферы с радиусами r_a и r_b. Показать, что атомы, расположенные по диагонали, которая проходит через центр куба, не могут касаться друг друга, если r_a/r_b или r_b/r_a больше чем 1,37. Указание. Структура хлористого цезия схожа с о.ц.к. решеткой. Каждый ион цезия окружен 8 ионами хлора.

19. Два элемента a и b образуют кристалл ab, у которого решётка типа NaCl. Считать, что атомы имеют вид жёстких сфер с радиусами r_a и r_b. Показать, что атомы, расположенные по диагонали куба, не могут касаться друг друга, если r_a/r_b больше чем 2,44. Указание. В структуре NaCl шесть анионов, окружающих катион, располагаются по вершинам октаэдра.

20. Определить отрезки, которые отсекает на осях решётки плоскость (125).

Ответ: A=10; B=5; C=2.

21. Найти индексы плоскостей, проходящих через узловые точки кристаллической решетки с координатами 9 10 30, если параметры решётки: a=3, b=5, c=6.

Ответ: (10 15 6).

22. Положение плоскостей в гексагональной системе определяется с помощью четырёх индексов. Найти индекс i в плоскостях (100), (010), (110) и (211) гексагональной системы.

Ответ: $(10\bar{1}0)$, $(01\bar{1}0)$, $(11\bar{2}0)$, $(21\bar{3}1)$.

23. Определить постоянную решетки кристалла d, если известно, что зеркальное отражение первого порядка рентгеновских лучей с длиной волны 2,10 $\mathring{A}$ от естественной грани этого кристалла происходит при угле скольжения $10°5'$.

Ответ: 6 $\mathring{A}$.

24. Известно, что длина волны характеристического рентгеновского излучения, полученного с медного анода, составляет 1,537 $\mathring{A}$. Эти лучи, попадая на кристалл алюминия, вызывают дифракцию от плоскостей (111) под брэгговским углом 19,2°. Алюминий имеет структуру гранецентрированного куба (г.ц.к.). Рассчитать плотность алюминия по этим экспериментальным данным.

Ответ: 2699 кг/м^3.

25. Кристаллы меди имеют гранецентрированную кубическую решетку. При комнатной температуре ребро элементарного куба равно 3,608 $\mathring{A}$. Монокристалл меди вырезан параллельно одной из граней элементарного куба. Пусть на поверхность кристалла падает монохроматический пучок рентгеновских лучей с длиной волны 1,658 $\mathring{A}$. Показать, что плоскости, параллельные поверхности, будут отражать рентгеновские лучи, если угол между лучом и поверхностью кристалла приближённо равен 27° и 67°.

26. Определить число элементарных ячеек кристалла объёмом 1 м^3 1) хлористого цезия (решётка объёмно-центрированная кубической сингонии); 2) меди (решётка гранецентрированная кубической сингонии); 3) кобальта, имеющего гексагональную структуру с плотной упаковкой.

Ответ: 1) $1{,}44\cdot10^{28}$; $2{,}1\cdot10^{28}$; 3) $4{,}54\cdot10^{28}$.

27. Найти плотность кристалла неона при 20 К, если известно, что решётка гранецентрированная кубической сингонии. Постоянная решётки при той же температуре равна 0,452 нм.

Ответ: $1{,}46\cdot10^3$ кг/м^3.

28. Найти плотность кристалла стронция, если известно, что решётка гранецентрированная кубической сингонии, а расстояние между ближайшими соседними атомами 0,43 нм.

Ответ: $2{,}6\cdot10^3$ кг/м^3.

29. Определить относительную атомною массу кристалла, если известно, что расстояние между ближайшими соседними атомами равно 0,304 нм. Решётка объёмно-центрированная кубической сингонии. Плотность кристалла равна 534 кг/м^3.

Ответ: 6,95 (литий).

30. Найти постоянную a решётки и расстояние d между ближайшими соседними атомами кристалла: 1) алюминия (решётка гранецентрированная кубической сингонии); 2) вольфрама (решётка объёмно-центрированная кубической сингонии).

Ответ: 1) 0,404 нм; 0,286 нм; 2) 0,316 нм; 0,274 нм.

31. Определить постоянные c и a решётки кристалла магния, который представляет собой гексагональную структуру с плотной упаковкой. Плотность кристаллического магния равна $1{,}74\cdot10^3$ кг/м^3.

Ответ: 0,320 нм; 0,521 нм.

32. Вычислить постоянную a решётки кристалла бериллия, который представляет собой гексагональную структуру с плотной упаковкой. Параметр решётки равен 0,359 нм. Плотность кристалла бериллия равна $1{,}82 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: 0,23 нм.

33. Найти плотность ρ кристалла гелия (при температуре T= 2 K), который представляет собой гексагональную структуру с плотной упаковкой. Постоянная а решётки, определённая при той же температуре, равна 0,357 нм.

Ответ: 207 кг/м^3.

34. Написать индексы направления прямой, проходящей в кубической решётке через начало координат и узел с кристаллографическими индексами, в двух случаях: 1) [[242]]; 2) [[$\bar{1}\bar{1}$2]].

Ответ: [121]; [112].

35. Вычислить период идентичности вдоль прямой [111] в решётке кристалла NaCl, если плотность кристалла равна $2{,}17 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: 0,975 нм.

36. Написать индексы Миллера для плоскостей в примитивной кубической решётке, изображённых на рис. 1.6, а–е.

Ответ: а) (111); б) (011); в) (111); (110); д) (112); е) (111).

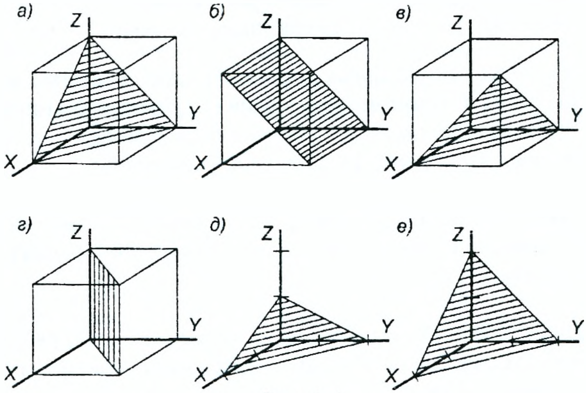

Рис. 1.6.

37. Плоскость проходит через узлы [[100]], [[010]], [[001]] кубической решётки. Написать индексы Миллера для этой плоскости.

Ответ: (111).

38. Система плоскостей в примитивной кубической решётке задана индексами Миллера (221). Найти наименьшие отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат, и изобразить эту плоскость графически.

Ответ: 1 1 2.

39. Рассчитайте угол φ образованный направлениями [110] и [111] в кубической решетках.

Ответ: φ=54,7^0

40. Вычислите углы между следующими направлениями кристаллов кубической сингонии: а) [100] и [122]; б) [110] и [011]; в) [010] и [122]; г) [120] и [102].

Ответ: а) 71^0; б) 60^0; в) 48^0; г) 78^0.

41. Вычислите углы между плоскостями (111) и (112) для меди.

Ответ: $19{,}5^0$.

42. Вычислите углы между следующими плоскостями кристаллов кубической сингонии: а) (110) и $(10\bar{1})$; б) (100) и (122); в) (110) и (122); г) (111) и (122).

Ответ: а) 60^0; б) 71^0; в) 45^0; г) 10^0.

43. Какие углы образует направление [110] с плоскостями (100), (120), (121) и (011) в кристаллах кубической сингонии.

Ответ: 45^0, 72^0, 60^0, 30^0.

ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Молярная, C_v, и удельная, c, теплоемкость твердых тел связаны соотношением

$$C_v = cM,$$

где M – молярная масса.

В приближении Эйнштейна характеристическая температура, Θ_E, равна

$$\Theta_E = \frac{\hbar\omega_E}{k},$$

где ω_E – круговая частота колебаний атомов, k - постоянная Больцмана.

$$\omega_E = \sqrt{\frac{\gamma}{m}},$$

где γ – постоянная квазиупругой силы, m - масса атома.

Максимальная, или дебаевская, частота колебаний равна

$$\omega_D = v_{зв} k_D,$$

где $v_{зв}$ – скорость звука, k_D – волновое число.

$$k_D = \frac{2\pi}{\lambda_D},$$

где λ_D – минимальная длина волны в кристалле. $\lambda_D = 2a$,

a – постоянная кристаллической решётки.

Характеристическая температура твердого тела, или температура Дебая, находится по формуле:

$$\Theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k}.$$

Энергия фонона в кристаллической решетке

$$\varepsilon = \hbar\omega.$$

Внутренняя энергия кристалла, состоящего из N атомов, каждый из которых имеет 3 степени свободы, в классической теории равна

$$U = 3NkT,$$

где T – термодинамическая температура.

Молярная теплоемкость кристалла в классической теории (закон Дюлонга и Пти)

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 3N_A k = 3R,$$

где R – молярная газовая постоянная.

Согласно закону Неймана-Конна молярная теплоемкость химически сложных тел (состоящих из различных атомов) равна

$$C_V = n \cdot 3R,$$

где n – общее число частиц в химической формуле соединения.

Средняя энергия классического линейного гармонического осциллятора

$$\langle E \rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} E\, exp(-E/kT)\,dvdx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp(-E/kT)\,dvdx} = kT,$$

где E – полная энергия атома решётки, совершающего гармонические колебания с амплитудой x_m.

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Средняя энергия одномерного квантового осциллятора

$$\langle E \rangle = E_0 + \frac{\hbar\omega}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1},$$

где E_0 – нулевая энергия $\left(E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega\right)$.

Молярная внутренняя энергия кристалла по Эйнштейну

$$U_m = U_{0m} + 3R\frac{\Theta_E}{exp\left(\frac{\Theta_E}{T} - 1\right)},$$

где $U_{0m} = \frac{3}{2}R\Theta_E$ – молярная нулевая энергия.

Молярная внутренняя энергия кристалла по Дебаю

$$U_m = U_{0m} + 9RT\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 \int\limits_0^{\Theta_D/T} \frac{x^3}{exp(x) - 1}dx,$$

где $U_{0m} = \frac{9}{8}R\Theta_D$ – молярная нулевая энергия кристалла по Дебаю, $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$.

В модели Дебая в области низких температур, $T \ll \theta_D$, энергия тепловых колебаний решётки

$$U = \frac{3\pi^4}{5}Nk\Theta_D\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^4.$$

Теплоёмкость кристалла в этой области температур (закон Дебая)

$$C_V = \frac{12\pi^4}{5} Nk\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3.$$

Теплота, необходимая для нагревания тела массой m, от температуры T_1 до температуры T_2

$$Q = \frac{m}{M}\int_{T_1}^{T_2} Cmdt.$$

Теплоёмкость электронного газа единичного объема металла

$$C_V^{el} = \frac{\pi^2}{2} Nk\frac{kT}{E_F},$$

где E_F – энергия Ферми.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Определить постоянную решётки алмаза, если его дебаевская температура 1860 К, а скорость звука в алмазе $11{,}4\cdot10^3$ м/с.

Решение.

Характеристическая температура Дебая

$$\theta_D = \frac{\hbar\omega_{max}}{k}$$

Величину ω_{max} можно оценить, если считать, что половина длины волны λ_{min} соответствующая максимальной частоте, равна параметру кристаллической решётки:

$$\frac{\omega_{max}}{2\pi} = \frac{v_{зв.}}{\lambda_{min}} = \frac{v_{зв.}}{2d}$$

отсюда

$$\omega_{max} = \frac{\pi v_{зв}}{d}$$

$$\theta_D = \frac{\pi\hbar v_{зв.}}{kd}$$

тогда

$$d = \frac{\pi\hbar v_{зв.}}{k\theta_D} = \frac{hv_{зв.}}{2k\theta_d}$$

$$d = \frac{11{,}4\cdot10^3\cdot6{,}62\cdot10^{-34}}{2\cdot1{,}38\cdot10^{-23}\cdot1860} = 15{,}4\cdot10^{-9}\text{ м}.$$

2. Характеристическая температура золота 170 К. Определить постоянную квазиупругой силы.

Решение.

В приближении Эйнштейна характеристическая температура

$$\theta_E = \frac{\hbar\omega_0}{k},$$

где ω_0 – собственная частота колебаний атомов.

С другой стороны

$$\nu_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma}{m}}.$$

Тогда

$$\theta = \frac{h}{2\pi k}\sqrt{\frac{\gamma}{m}},$$

откуда

$$\gamma = \frac{4\pi^2 m k^2 \theta^2}{h^2};$$

$$\gamma = \frac{4\cdot(3,14)^2\cdot(1,38\cdot10^{-23})^2\cdot170^2\cdot197\cdot1,66\cdot10^{-27}}{(6,62\cdot10^{-34})^2} = 162 \text{ кг/с}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Теплоёмкость серебра при 10 °С равна 199 Дж/(кмоль·К). Определить характеристическую температуру.

Ответ: 231 К.

2. Удельная теплоёмкость свинца и алюминия при постоянном объёме и температуре 20 °С составляет соответственно 126 и 896 Дж/(кг·К). Вычислить теплоёмкость каждого из этих металлов и сравнить со значениями, полученными по закону Дюлонга и Пти.

Ответ: 26,1 кДж/моль·К, 24,17 кДж/кг·К.

3. Определить характеристическую температуру золота, если постоянная квазиупругой силы 162 кг/с^2.

Ответ: 170 К.

4. Определить скорость звука в алмазе, зная, что дебаевская температура алмаза равна 1860 К и d=1,54 Å.

Ответ: $11,4\cdot10^3$ м/с.

5. Вычислить молярную электронную теплоёмкость для меди при 2 К и 1000 К и сравнить её с теплоёмкостью решётки при тех же температурах. Характеристическая температура меди 316 К.

Ответ: $14,56\cdot10^{-4}$ Дж/(моль К); $7,28\cdot10^{-1}$ Дж/(моль К);
$4,8\cdot10^{-4}$ Дж/(моль К); 24,96 Дж/(моль К).

6. Вычислить минимальную длину волны Дебая в титане, если его характеристическая температура 5°С, а скорость распространения звука $6\cdot10^3$ м/с.

Ответ: 10,2 Å.

7. Какова максимальная энергия фононов в кристалле свинца, если его характеристическая температура 94 К.

Ответ: $8,2\cdot10^{-3}$ эВ.

8. Какова удельная теплоёмкость цинка при 100°С?

Ответ: 0,398 кДж/(кг·К).

9. Удельная теплоёмкость алюминия при 20°C 840 Дж/(кг·К). Выполняется ли при этой температуре закон Дюлонга и Пти?

Ответ: Нет.

10. На нагревание металлического предмета массой 100 г от 20 до 50°C затрачено 8300 Дж. Определить, из какого металла изготовлен предмет, если указанный интервал температур выше характеристической температуры.

Ответ: Бериллий.

11. Определить изменение внутренней энергии кристалла никеля при нагревании его от 0 до 200 °C. Масса кристалла 20 г. Теплоёмкость вычислить.

Ответ: 1,7 кДж.

12. Вычислить по классической теории теплоёмкость кристалла бромида алюминия $AlBr_3$ объемом 1м^3. Плотность кристалла $3\cdot10^3$кг/м^3.

Ответ: 1,12 МДж/ К.

13. Вывести формулу для средней энергии классического линейного гармонического осциллятора при тепловом равновесии. Вычислить значение средней энергии при T=300 К.

Ответ: $4,14\cdot10^{-2}$Дж.

14. Определить: 1) среднюю энергию линейного одномерного квантового осциллятора при температуре $T=\theta_E$ (θ_E=200 К); 2) энергию системы, состоящей из $N=10^{25}$ независимых квантовых трёхмерных осцилляторов, при температуре $T=\theta_E$ (θ_E=300 К).

Ответ: $2,99\ 10^{-21}$ Дж; 134 кДж.

15. Найти частоту колебаний атомов серебра по теории Эйнштейна, если характеристическая температура серебра равна 165 К?

Ответ: 3,44 ТГц.

16. Во сколько раз изменится средняя энергия квантового осциллятора, приходящаяся на одну степень свободы, при повышении температуры от $T_1=\theta_E/2$ до $T_2=\theta_E$? Учесть нулевую энергию.

Ответ: В 3,74 раза.

17. Найдите отношение $<E>/<E_T>$ средней энергии квантового осциллятора к средней энергии теплового движения молекул идеального газа при температуре $T=\theta_E$.

Ответ: 1,16

18. Используя квантовую теорию теплоемкости Эйнштейна, вычислить изменение ΔU_m молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его на 2 К от температуры $T=\theta_E/2$.

Ответ: 36 кДж/моль.

19. Пользуясь теорией теплоёмкости Эйнштейна, определить изменение ΔU_m молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T_1=0,1\theta_E$. Характеристическую температуру Эйнштейна принять для данного кристалла равной 300 К.

Ответ: 340 Дж/моль.

20. Определить относительную погрешность, которая будет допускаться, если при вычислении теплоёмкости вместо значения даваемого теорией Эйнштейна (при $T=\theta_E$), воспользоваться значением, даваемым законом Дюлонга и Пти.

Ответ: 8,8%.

21. Вычислить по теории Эйнштейна молярную нулевую энергию $U_{м0}$ кристалла цинка. Характеристическая температура θ_E для цинка равна 230 К.

Ответ: 2,87 МДж/моль.

22. Характеристическая температура Эйнштейна для меди 316 К. Найти постоянную квазиупругой силы.

Ответ:180 кг/с^2.

23. Вычислить по теории Дебая молярную нулевую энергию кристалла меди. Характеристическая температура меди 320 К.

Ответ: 2,99 МДж

24. Определить максимальную частоту собственных колебаний в кристалле золота по теории Дебая. Характеристическая температура 180 К.

Ответ: 2,36 10^{13} с$^{-1}$.

25. Вычислить максимальную частоту Дебая, если известно, что молярная теплоёмкость серебра при 20 К равна 1,7 Дж/(моль·К).

Ответ: $2{,}75\cdot10^{13}$ с$^{-1}$.

26. Молярная теплоемкость C_v серебра при температуре равна 1,65 Дж (моль К). Вычислите по значению C_v характеристическую температуру θ_D.

Ответ: 210 К.

27. Найти отношение изменения внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T=0{,}1\,\theta_D$ к нулевой энергии. Считать $T<<\theta_D$.

Ответ: $5{,}2\cdot10^{-3}$.

28. Пользуясь теорией теплоёмкости Дебая, определить изменение молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T=0{,}1\,\theta_D$. Характеристическую температуру Дебая принять равной 300 К. Считать $T<<\theta_D$.

Ответ: 14,6 Дж.

29. Характеристическая температура Дебая для хлорида калия 230 К, а для хлорида натрия 280 К. Во сколько раз удельная теплоёмкость KCl больше удельной теплоёмкости NaCl при температуре 40 К?

Ответ: в 1,4 раза.

30. Вычислить относительный вклад электронного газа в общую теплоёмкость серебра при комнатной температуре. Считать, что на каждый атом приходится один свободный электрон и что теплоёмкость серебра при данной температуре определяется законом Дюлонга и Пти.

Ответ: 0,8%.

31. Определить температуру, при которой теплоёмкость электронного газа будет равна теплоёмкости кристаллической решётки лития. Характеристическая температура лития 404 К, концентрация свободных электронов в нем $4{,}66\cdot10^{28}$ м$^{-3}$.

Ответ: 5 К.

32. Дебаевская температура металла равна 210 К. Определить: а) отношение теплоемкостей электронного газа и кристаллической решетки при 300 К; б) температуру, при которой теплоемкость газа станет равной теплоемкости решетки.

Ответ: $7.6\cdot10^{-3}$; 1.7 К.

33. Определить колебательную энергию и теплоемкость кристалла при температуре T, считая каждый атом решетки квантовым гармоническим осциллятором и полагая, что кристалл состоит N из одинаковых атомов, колеблющихся независимо друг от друга с одинаковой частотой ω. Упростить полученное выражение для теплоемкости при $kT \gg \hbar\omega$ и $kT \ll \hbar\omega$.

Ответ: $E = 3N\left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1}\right)$; $C = 3Nk\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2 \frac{e^{\hbar\omega/kT}}{\left(e^{\hbar\omega/kT}-1\right)^2}$.

При высоких и низких температурах C равно соответственно $3Nk$ и $3Nk\left(\hbar\omega/kT\right)^2 - e^{\hbar\omega/kT}$.

34. Вычислить с помощью формулы Дебая: а) отношение $\Delta E / E_0$, где ΔE - энергия, которую необходимо сообщить кристаллу, при нагревании его от 0 К до Θ, а E_0 - энергия нулевых колебаний; б) энергию, которую необходимо сообщить молю кристалла алюминия, чтобы нагреть его от Θ/2 до Θ=374 К.

Ответ: 1.8; 4.23 кДж/моль.

35. Используя формулу Дебая, вычислить молярную теплоемкость кристаллической решетки при температурах Θ/2 и Θ. На сколько процентов отличается теплоемкость при температуре Θ от классического значения.

Ответ: $C(\Theta/2) = 9R\left(\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^3dx}{e^x-1} - \frac{2}{e^2-1}\right)$=20.7 Дж/(моль·К);

$C(\Theta) = 9R\left(4\int_0^1 \frac{x^3dx}{e^x-1} - \frac{2}{e-1}\right)$=23.8 Дж/(моль·К); меньше на 4.6%.

36. Вычислить Дебаевскую температуру и энергию (Дж/моль) нулевых колебаний серебра, если известно, что при температурах 16 и 20 К его теплоемкость равна соответственно 0.87 и 1.70 Дж/(моль·К). Указание: в этой области температур теплоемкость пропорциональна кубу температуры, поэтому следует использовать формулу для теплоемкости при низких температурах.

Ответ: $\Theta \approx 210$ К, E_0=1.96 кДж/моль.

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ КРИСТАЛЛОВ

Количество теплоты ΔQ, переносимое за время Δt через площадку ΔS, которая перпендикулярна оси X (закон Фурье),

$$\Delta Q = -\kappa \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta S \Delta t,$$

где κ – теплопроводность, $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ – градиент температуры.

Теплопроводность

$$\kappa = \frac{1}{3} C_V v_{зв} \Lambda_{\phi},$$

где C_V – теплоемкость решетки для единицы объёма кристалла (фононного газа),

$v_{зв}$ – скорость звука (скорость фононов),

$\Lambda_ф$ – средняя длина свободного пробега фононов.

Квазиимпульс фонона

$$P = \hbar k,$$

где k – волновой вектор фонона. $k = 2\pi/\lambda$, где λ – длина волны фонона.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Определить толщину x слоя льда, образующегося в течение заданного времени t на спокойной поверхности озера. Считать, что температура окружающего воздуха T все время постоянна и равна температуре наружной поверхности льда, температура внутренней поверхности льда равна его температуре плавления $T_{пл}$.
У к а з а н и е : в случае медленного замерзания в слое льда устанавливается линейное распределение температуры. Выражение для количества теплоты, уходящего от единичной поверхности льда за время dt, получить из закона Фурье. Эту же величину представить в виде $q\rho dx$, где dx – толщина слоя для, образовавшегося за время dt, ρ - плотность льда, q - удельная теплота плавления льда. Полученное после приравнивания данных выражений дифференциальное уравнение умножить на x и проинтегрировать. Принять за начало отсчета момент времени образования льда на поверхности воды.

Ответ: $x = \sqrt{\dfrac{2\kappa\left(T_{пл} - T\right)t}{q\rho}}$.

2. Вычислить удельную теплопроводность алмаза при температуре 30 К.

Ответ: 5,44 кДж/(кг·К).

3. Найти энергию фонона соответствующего максимальной частоте Дебая, если характеристическая температура Дебая 250 К.

Ответ: $3{,}45 \cdot 10^{-21}$ Дж.

4. При комнатной температуре средняя длина свободного пробега фонона в кристалле NaCl в четыре раза больше постоянной его решётки. Вычислить коэффициент теплопроводности этого кристалла, если d=5,64 $\overset{0}{A}$ и скорость звука в нем $5 \cdot 10^3$ м/с.

Ответ: 6,7 кДж/(м·К·с).

5. Определить квазиимпульс фонона соответствующего частоте $0{,}1\,\omega_{\text{макс}}$. Усредненная скорость звука в кристалле равна 1380 м/с, характеристическая температура Дебая равна 100 К. Дисперсией звуковых волн в кристалле пренебречь.

Ответ: 10^{-25} Н·с.

6. Длина волны фонона, соответствующего частоте $0{,}01\,\omega_{\text{макс}}$ равна 50 нм. Пренебрегая дисперсией звуковых волн, определить характеристическую температуру Дебая, если усреднённая скорость звука равна 4,8 км/с.

Ответ: 443 К.

7. Характеристическая температура Дебая для вольфрама равна 310 К. Определить длину волны фононов, соответствующих частоте $0{,}1\,\omega_{\text{макс}}$. Усреднённую скорость звука в вольфраме вычислить. Дисперсией волн в кристалле пренебречь.

Ответ: 4,8 нм.

8. Период решётки одномерного кристалла (кристалла, атомы которого образуют цепи, не взаимодействующие друг с другом) равен 0,3 нм. Определить максимальную энергию фононов, распространяющихся вдоль этой цепочки атомов. Усредненная скорость звука в кристалле равна 5 км/с.

Ответ: $1{,}1\cdot10^{-21}$ Дж.

9. Определить усреднённую скорость звука в кристалле, характеристическая температура которого равна 300 К. Межатомное расстояние в кристалле равно 0,25 нм.

Ответ: 3,13 км/с.

10. Вычислить среднюю длину свободного пробега фононов в кварце SiO_2 при некоторой температуре, если при этой же температуре теплопроводность 13 Вт/(м·К), молярная теплоёмкость 44 Дж/(моль·К) и усреднённая скорость звука равна 5 км/с. Плотность кварца равна $2{,}65\cdot10^3$ кг/м^3.

Ответ: 4 нм.

11. Какое отношение средней длины свободного пробега фононов к параметру решётки при комнатной температуре в кристалле NaCl, если теплопроводность при той же температуре равна 71 Вт/(м·К). Теплоёмкость вычислить по закону Неймана-Конна. Относительные атомные массы: $A_{Na}=23$, $A_{Cl}=35{,}5$; плотность кристалла равна $2{,}17\cdot10^3$ кг/м^3. Усреднённую скорость звука принять равной 5 км/с.

Ответ: 4,1.

12. Оценить максимальные значения энергии и импульса фонона в алюминии, дебаевская температура которого $\Theta=374$ К. Указание: среднее расстояние между атомами a можно найти из соотношения $\rho = m/a^3$, где ρ - плотность, m - масса атома.

Ответ: $3.2\cdot10^{-2}$ эВ; $1\cdot10^{-2}$ г·см/с.

13. Оценить скорость звука в кристалле, дебаевская температура которого $\Theta=300$ К и межатомное расстояние $a=0.25$ нм.

Ответ: $v = ak\Theta/\pi\hbar = 3.1$ км/с.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Варикаш В.М., Хачатрян Ю.М. Избранные задачи по физике твёрдого тела. – Мн.: Высшая школа, 1969.
2. Варыкаш В.М., Цэдрык М.С. Кіраўніцтва да рашэння задач па агульнай фізіцы. – Мн.: Выш. шк., 1995.
3. Блейкмор Дж. Физика твёрдого тела. Пер. с англ. – М.: Мир, 1988.
4. Бушманов Б.Н., Хромов Ю.А. Физика твёрдого тела. – М.: Высшая школа, 1971.
5. Драко В.М., Прокошин В.И., Шепелевич В.Г. Основы фононных и электронных процессов в кристаллах. – Гомель, 1999.
6. Епифанов Г.И. Физика твёрдого тела. – М.: Высшая школа, 1997.
7. Павлов П.В., Хохлов А.Ф. Физика твёрдого тела. – М.: Высшая школа, 1985.
8. Сборник задач по курсу общей физики / Под ред. М.С. Цедрика. – М.: Просвещение, 1989.
9. Чертов А.Г., Воробьёв А.А. Задачник по физике. – М.: Высшая школа, 1981.
10. Шепелевич В.Г. Сборник задач по физике металлов и металловедению. – Мн.: Тэхналогія, 2000.
11. Киреев П.С. Физика полупроводников. – М.: Высшая школа. 1975.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Составители: **Пинчук Александр Иванович**
Янусик Ирина Семёновна

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению практических заданий по дисциплине

«ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ»

Часть I

для студентов специальности
1-36 04 02 «Промышленная электроника»
дневной формы обучения

Ответственный за выпуск: **Янусик И.С.**
Редактор: **Строкач Т.В.**
Компьютерная верстка: **Кармаш Е.Л.**
Корректор: **Никитчик Е.В.**

Подписано к печати 03.06.2009 г. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 0,4. Уч. изд. л. 1,5. Заказ № 543. Тираж 50 экз. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.