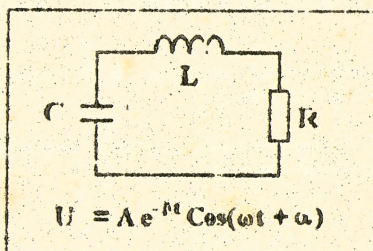


Министерство образования и науки
Республики Беларусь
Брестский политехнический институт
Кафедра физики

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ ФИЗИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСТВО



ЭЗ. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ (Методические указания)

Брест
1996

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ ФИЗИКИ. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО.
Методические указания по выполнению лабораторной работы
Э3 "ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ В КОЛЕ-
БАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ", Брест БрПИ, 1996

В методических указаниях приложено описание лабораторной работы Э "Исследование свободных затухающих колебаний в колебательном контуре", в которой экспериментально проверяются зависимости между физическими величинами, характеризующими свободные затухающие колебания в колебательном контуре, а также изучается влияние скин-эффекта на сопротивление проводника.

Лабораторная работа предназначена для студентов всех специальностей и всех форм обучения в БрПИ.

Автор : В. Г. Каролинский, доцент, А. И. Прокопеня, доцент,
И. И. Чопчиц, доцент.

Рецензент: В. С. Секеряцкий, доцент кафедры физики и
астрономии БрГУ

Рекомендовано 3.05.1996
кафедрой физики БрПИ
к публикации на ротаприте

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ЭЗ

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ
В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Цель работы:

- определение зависимости периода затухающих колебаний в колебательном контуре от индуктивности, емкости и активного сопротивления;
- определение зависимости логарифмического декремента затухания от сопротивления контура;
- определение зависимости сопротивления катушки от периода колебаний.

Приборы и принадлежности: Осциллограф, генератор, магазин сопротивлений, катушка индуктивности, набор конденсаторов, соединительные провода.

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Общий вид установки приведен на рис. 1. Схема установки и подключения приборов изображена на рис. 2.

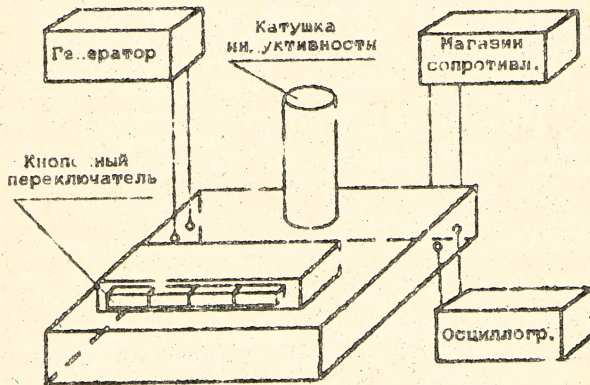


Рис. 1.

Экспериментальная установка состоит из колебательного контура, генератора, магазина сопротивлений и осциллографа. Генератор вырабатывает прямоугольные импульсы, которые подаются с гнезда "ОМ" в колебательный контур. При подаче одного импульса в колебательном контуре возникают свободные затухающие колебания.

По окончании колебательного процесса на контур подается следующий импульс и процесс повторяется. При этом на экране осциллографа изображается график зависимости напряжения на конденсаторе от времени.

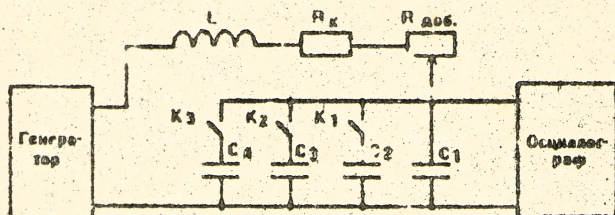


Рис. 2.

Колебательный контур состоит из катушки индуктивности L , емкости C_1 и активного сопротивления R_k . С помощью магазина сопротивлений $R_{доб.}$, подключенного последовательно с катушкой индуктивности L , можно изменять активное сопротивление контура. Изменение емкости колебательного контура осуществляется с помощью кнопочных переключателей K_1, K_2, K_3 , которые позволяют подключать параллельно к конденсатору C_1 соответственно конденсаторы C_2, C_3, C_4 в различной комбинации.

ПРОВЕДЕНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ

а) Измерение периода колебаний

Для измерения периода колебаний T необходимо собрать установку и включить генератор и осциллограф.

Мультиplier частоты генератора поставить в положение "10²" и установить частоту "10 Гц". Уровень сигнала поставить в положение "0 дБ".

Ручку управления магазина сопротивлений поставить в нулевое положение.

на панели осциллографа С1-137 должны быть нажаты кнопки "МС", "Сеть, внешн. II", "II". При этом сигнал с конденсатора колебательного контура подается на вход "II" осциллографа. Ручку управления "Время/дел" установить в пределах от 5 до 20. С помощью ручек "Уровень" и "V/дел II" добиться устойчивой картины затухающих колебаний.

Амплитуда колебаний постепенно уменьшается и после нескольких колебаний кривая на экране осциллографа превращается в горизонтальную прямую. Вращением ручки "I", которая находится внутри переключателя "V/дел II", нужно установить эту прямую на горизонтальную ось отсчетной сетки на экране осциллографа. При отсутствии прямолинейного участка его появления можно добиться изменением положения переключателя "Время/дел", а также вращением ручки, устанавливающей частоту генератора.

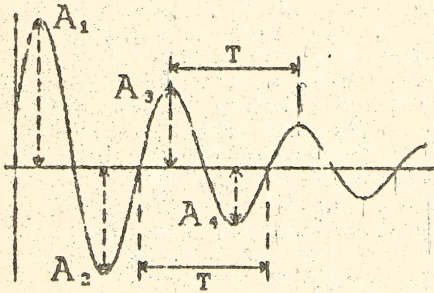


Рис. 3

Условный период колебаний T (см. рис. 3) определяется как произведение числа больших делений между соседними амплитудами сигнала на показания метки на переключателе "Время/дел". Измерение периода колебаний следует проводить с точностью до десятых долей большого деления (большое деление разбить на пять маленьких). Для увеличения точности

измерения периода необходимо установить ручку переключателя "Время/дел" в такое положение, при котором на экране осциллографа наблюдается не более двух периодов колебаний. При этом относительная погрешность измерений определяется в основном параметрами осциллографа и в каждом случае не превышает 5%.

б) Измерение логарифмического декремента затухания

Получите на экране осциллографа устойчивую картину затухающих колебаний. С помощью ручки "I", находящейся внутри переключателя "V/дел II", совместите прямолинейный

участок осциллограммы с горизонтальной осью отсчетной сетки на экране осциллографа.

Перемещая картину по горизонтали ручкой "←", которая находится внутри переключателя "Время/дел", подведите первый максимум осциллограммы к вертикальной оси и измерьте амплитуду A_1 в малых делениях вертикальной шкалы (см. рис. 3). Затем аналогично измерьте амплитуду A_2 первого минимума, амплитуду A_3 второго максимума и, наконец, амплитуду A_4 второго минимума. Если картина расположена правильно относительно горизонтальной оси, с точностью не менее 0,1 доля не выполняться условие:

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{A_2}{A_4}. \quad (1)$$

Проверьте, так ли это. Если условие (1) выполняется плохо, еще раз проверьте установку осциллограммы относительно горизонтальной оси и подкорректируйте ее, повторив затем измерение амплитуд.

Логарифмический декремент затухания определяется по формуле:

$$\Theta = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{A_1}{A_3} + \ln \frac{A_2}{A_4} \right). \quad (2)$$

Погрешность измерения Θ определяется стандартным образом как погрешность косвенно измеряемой физической величины и обусловлена главным образом ошибкой отсчета:

$$\Delta\Theta = \frac{\Delta A}{A_3},$$

где $\Delta A = 0,5$ (при условии, что A_3 измеряется в малых делениях вертикальной шкалы). Для уменьшения погрешностей измерения проводите при таком положении ручки "V/дел II", при котором $A_3 > 5$ делений (малых).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Проверка зависимости периода колебаний от емкости и определение индуктивности катушки

1. Установите переключатели магазина сопротивлений в нулевое положение.
2. Установите значение емкости C_1 и получите на экране устойчивую картину затухающих колебаний.
3. Измерьте логарифмический декремент затухания и проверьте, выполнено ли условие $\Theta < 2$. Если условие выполнено, измерьте период колебаний.

4. Выключите емкость $C_1 + C_2$ и повторите измерения п.3.
5. Повторите все измерения для всех возможных емкостей. В результате получится набор пар соответствующих значений (C_i, T_i) , где i - номер опыта.

6. Теория, изложенная в Приложении 2, предсказывает линейную зависимость между переменными $y=T^2$ и $x=C$:

$$y = ax + b$$

где $a = 4\pi^2 L$, $b = 4\pi^2 LC_0$ - постоянные.

Располагая измеренными значениями T_i при различных $x_i = C_i$, вычислите $y_i = T_i^2$ и по формулам (П.2.5) найдите значения постоянных a и b .

7. Найдите погрешности Δa и Δb по формулам (П.2.6), (П.2.7).

8. На координатной плоскости (x, y) отметьте все экспериментальные точки и проведите по найденным значениям a и b наилучшую прямую. Оцените визуально, хорошо ли расположение экспериментальных точек соответствует предсказываемой теорией линейной зависимости.

9. Найдите индуктивность L по формуле (П.2.8) и оцените погрешность ее определения ΔL по формуле (П.2.9).

10. Найдите паразитную емкость C_0 и погрешность ее определения ΔC_0 по формулам (П.2.8), (П.2.10).

11. Вычислите χ^2 по формуле (П.2.11) и сделайте вывод о соответствии линейной зависимости, предсказываемой теорией, экспериментальным данным.

12. Установите с помощью магазина дополнительное сопротивление контура $1000 + 3000$ Ом. (по указанию преподавателя).

13. Повторите п.п. 2-11, определяя значение L . Оно, вообще говоря, отличается от найденного вначале из-за того, что проволочные катушки магазина сопротивлений также имеют заметную индуктивность. Если при некоторых значениях емкости получаются $\Theta > 2$, измерение периода для этих значений не проводить и ограничиться при вычислениях только теми значениями периода, которые получаются при $\Theta < 2$.

Задание 2. Проверка зависимости логарифмического decreмента затухания от сопротивления контура

1. Установите все переключатели магазина сопротивлений в нулевое положение.

2. Установите значение емкости C_1 и получите на экране устойчивую картину затухающих колебаний. Затем измерьте период колебаний.

3. Измерьте логарифмический декремент и проверьте выполнение условия $\Theta < 2$.

4. Установите на магазине сопротивлений 300 Ом и повторите измерение периода и логарифмического декремента, опять проверив условие $\Theta < 2$.

5. Повторите измерения периода и логарифмического декремента при сопротивлениях магазина 600 Ом, 900 Ом и т.д. до значений, при которых перестает выполняться условие $\Theta < 2$.

6. Убедитесь в независимости периода колебаний от сопротивления при относительной погрешности 5%.

7. Теория, изложенная в Приложении 4, предсказывает линейную зависимость между величиной сопротивления магазина при постоянном токе ($x = R_{\text{м}}$) и логарифмическим декрементом $y = \Theta$:

$$y = ax + b$$

На координатной плоскости (x, y) отметьте экспериментальные точки (x_1, y_1) и оцените визуально, хорошо ли расположение экспериментальных точек соответствует представлению о линейной зависимости, предсказываемой теорией.

8. По формулам (П.4.4) вычислите a и b и проведите на координатной плоскости (x, y) прямую $y = ax + b$ с найденными значениями a и b .

9. Вычислите χ^2 по формуле (П.4.5) и сделайте вывод о соответствии экспериментальных данных теоретической модели.

10. Найдите по формуле (П.4.6) сопротивление катушки R_1 .

11. Включите в контур емкость ($C_1 + C_2$) и повторите п.п. 1-10.

Сделайте выводы относительно зависимости R_1 от T . При наличии времени проведите измерения при других емкостях. При этом имейте в виду, что для обеспечения выполнения условия $\Theta < 2$ вам придется, возможно, на магазине сопротивлений устанавливать сопротивление 100 Ом, 200 Ом и т.д.

Задание 3. Проверка зависимости сопротивления катушки от периода колебаний

1. Установите в магазине сопротивлений все переключатели в нулевое положение.

2. Установите значение емкости C_1 , получите на экране устойчивую картину и измерьте период T колебаний и логарифмический декремент Θ .

3. По формуле $R_1 = \frac{2L\Theta}{T}$ вычислите сопротивление катушки.

4. Повторите измерения и вычисления сопротивления катушки при всех возможных значениях емкости контура.

5. На координатной плоскости, по оси x которой откладываются значения $x = \frac{1}{\sqrt{T}}$, а по оси y - найденные значения сопротивления катушки $y = R_1$, нанесите все экспериментальные точки.

6. Теория, изложенная в Приложении 5, предсказывает линейную зависимость между x и y . Увидеть визуально, так ли это.

7. По формулам (П.4.4) найдите параметры a и b линейной зависимости, наилучшие в смысле МНК. Параметр b дает сопротивление катушки при постоянном токе: $b = R_{ст}$. Проведите на координатной плоскости наилучшую в смысле МНК прямую.

Так как сопротивление катушки при реально имеющих место в условиях эксперимента периодических колебаний во много раз больше сопротивления катушки постоянному току вследствие скин-эффекта, при вычислениях может случиться, что найденное значение $R_{ст}$ получится отрицательным, что физически невозможно. Причину возникновения такой ситуации можно понять на следующем простом примере. Пусть на весах определяется масса человека с относительной погрешностью, скажем, 0,1%. Если вначале определить массу человека на этих весах, а затем опять определить его массу, удалив с головы один волос, то, очевидно, бессмысленно определять массу волоса путем вычитания найденных в обоих случаях значений массы. Эта разность может принимать любые, в том числе и отрицательные значения, модуль которых не превышает 0,001 от массы человека и не имеет отношения к массе волоса. В нашем случае

$\frac{R_{ст}}{R_1} \approx 0,01-1\%$, а относительная погрешность измерений больше

этой величины, что и может приводить к физически бессмысленному результату.

8. По формуле (П.4.5) вычислите χ^2 и сделайте вывод о соответствии линейной зависимости $y=ax+b$, предсказываемой теорией, экспериментальным данным.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Свободные затухающие колебания в колебательном контуре и их математическое описание

Колебательным контуром называется система (см. рис. П.1.1), состоящая из последовательно соединенных катушки индуктивности L , конденсатора C и проводника с электрическим сопротивлением R (сопротивление катушки, соединительных проводов и т.д.).

Предположим, что внешняя электродвижущая сила создает между точками 1 и 2 контура разность потенциалов U , которая, вообще говоря, может изменяться с течением времени.

Тогда в контуре возникает электрический ток, причем сила тока также будет зависеть от времени.

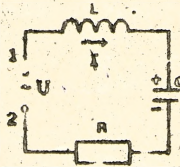


Рис. П.1.1

Будем считать, что изменения тока происходят достаточно медленно, так что в любой момент времени силы тока во всех участках контура практически одинаковы. Выберем положительное направление обхода контура по часовой стрелке. Обозначим через q заряд той из обкладок конденсатора, направление от которой к другой обкладке совпадает с положительным направлением обхода контура. Тогда сила тока в цепи будет равна:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Учтем связь между зарядом q и напряжением на конденсаторе U_c ($q = CU_c$), получаем для силы тока выражение:

$$I = C \frac{dU_c}{dt} \quad (\text{П.1.1})$$

При изменении силы тока в контуре в катушке индуктивности возникает ЭДС самоиндукции: $\mathcal{E} = -L \frac{df}{dt}$. Применяя к контуру закон Ома для участка цепи, получаем уравнение:

$$IR + U_c = U - L \frac{df}{dt} \quad (\text{П.1.2})$$

С учетом (П.1.1) уравнение (П.1.2) принимает вид:

$$LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = U \quad (\text{П.1.3})$$

Рассмотрим случай, когда напряжение U , подаваемое на контур представляет собой ступенчатую функцию, т.е. зависимость напряжения U от времени t имеет вид:

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ U_0, & t > 0 \end{cases}$$

Тогда при $t > 0$ получаем уравнение:

$$LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = U_0 \quad (\text{П.1.4})$$

Так как $U_0 = \text{const}$, то уравнение (П.1.4) можно переписать в виде:

$$\frac{d^2 (U_c - U_0)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d(U_c - U_0)}{dt} + \frac{1}{LC} (U_c - U_0) = 0$$

Вводя обозначения $\frac{R}{L} = \beta$, $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, $U_c - U_0 = U_1$, получаем дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний в контуре:

$$\frac{d^2 U_1}{dt^2} + 2\beta \frac{dU_1}{dt} + \omega_0^2 U_1 = 0 \quad (\text{П.1.5})$$

При условии $\beta < \omega_0$, решением уравнения (П.1.5) является функция вида:

$$U_1 = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, а A_0 и α - некоторые постоянные, которые определяются из начальных условий. Таким образом,

$$U_c = U_0 + A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (\text{П.1.6})$$

т.е. напряжение на конденсаторе совершает колебания по закону косинуса около значения U_0 ,

$$U_c = U_0 + A \cos(\omega t + \alpha)$$

причем амплитуда этих колебаний уменьшается по экспоненциальному закону:

$$A = A_0 e^{-\beta t} \quad (\text{П.1.7})$$

Такие колебания не являются периодическими и называются затухающими колебаниями. При затухающих колебаниях величина $(U_c - U_0)$ обращается в нуль, изменяясь в одну и ту же

сторону (например, убывает), а также достигает макс. малых и минимальных значений через равные промежутки времени:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (\text{П.1.8})$$

Величину T поэтому обычно называют условным периодом затухающих колебаний.

Если электрическое сопротивление контура пренебрежимо мало ($R \rightarrow 0$), то $\beta \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \omega_0$, и соотношение (П.1.6) принимает вид:

$$U_c = U_0 + A_0 \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

т.е. напряжение на конденсаторе будет совершать гармонические колебания с амплитудой A_0 и циклической частотой ω_0 . Поэтому величину $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ называют собственной частотой колебаний.

Из соотношения (П.1.7) следует, что по истечении времени $t = \frac{1}{\beta}$ амплитуда затухающих колебаний убывает в e раз.

Величину β называют коэффициентом затухания колебаний. Число полных колебаний напряжения на конденсаторе, совершаемое за время t , равно:

$$N = \frac{t}{T} = \frac{t}{\beta T}. \quad (\text{П.1.9})$$

С другой стороны, отношение амплитуд затухающих колебаний, следующих друг за другом через промежуток времени T , равно:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}.$$

Натуральный логарифм этого отношения

$$\Theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta \cdot T = \frac{1}{N} \quad (\text{П.1.10})$$

характеризует быстроту затухания колебаний и называется логарифмическим декрементом затухания. Сравнение (П.1.9) и (П.1.10) показывает, что логарифмический декремент затухания Θ есть величина, обратная числу колебаний N , по истечении которых амплитуда убывает в e раз. При этом логарифмический декремент затухания Θ определяется только параметрами колебательного контура:

$$\Theta = \beta \cdot T = \frac{R}{2L} T = \frac{R}{2L} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (\text{П.1.11})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Теоретическая модель для проверки зависимости периода колебаний от емкости и определения индуктивности катушки

Согласно (П.1.8) и (П.1.11) для периода колебаний и логарифмического декремента имеем

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{LC + 4L^2}}, \quad \Theta = \frac{R}{2L}T.$$

Выражая из второй формулы отношение $R/2L$ и подставляя его в первое уравнение, после несложных преобразований получим

$$\frac{T^2}{4\pi^2 + 6} = LC \quad (\text{П.2.1})$$

Относительная погрешность измерения периода на данной установке, как показано выше, составляет примерно 0,05. Тогда относительная погрешность определения величины T^2 равна:

$$\Delta(T^2)/T^2 = 2T \cdot \Delta T / T^2 = 2\Delta T / T = 0,1$$

Если обратиться к таким значениям сопротивления контура, при которых $\Theta < 1$, то $\frac{\Theta^2}{4\pi^2} < \frac{1}{\pi^2} = 0,1$. При этих условиях, следовательно, величиной Θ^2 в знаменателе левой части (П.2.1) можно пренебречь и формула (П.2.1) примет вид:

$$T^2 = 4\pi^2 LC. \quad (\text{П.2.2})$$

Емкость контура C включает в себя емкость конденсатора C_1 (см. рис. 2) и некоторую паразитную емкость C_0 (выходная емкость генератора, входная емкость осциллографа и т.д.). Поэтому формулу (П.2.2) можно переписать в виде:

$$T^2 = 4\pi^2 L(C_1 + C_0). \quad (\text{П.2.3})$$

Относительное изменение индуктивности L контура при изменении периода в результате скин-эффекта (как показано в Приложении 3) меньше 0,1. Поэтому в пределах точности измерений на данной экспериментальной установке индуктивность L в формуле (П.2.3) может считаться величиной постоянной. Вводя обозначения

$$y=T^2, \quad x=C, \quad a=4\pi^2 L, \quad b=4\pi^2 LC,$$

зависимость (П.2.3) перепишем в виде

$$y = ax + b. \quad (\text{П.2.4})$$

Теория, таким образом, предсказывает линейную зависимость между переменными y и x .

Располагая рядом экспериментальных значений периода колебаний T , при различных значениях емкости C , можно с помощью, например, метода наименьших квадратов (МНК), найти наилучшие в смысле МНК значения постоянных a и b в (П.2.4):

$$a = \frac{y \langle x \rangle - \langle y \rangle \langle x \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle \langle x \rangle}, \quad b = \langle y \rangle - a \langle x \rangle, \quad (\text{П.2.5})$$

где

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \langle y \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \langle xy \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

n - число измерений. Для доверительной вероятности $P = 95\%$ погрешности Δa и Δb определяется формулами:

$$\Delta a = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2}{n(n-2)(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle \langle x \rangle)} \right]^{1/2}, \quad (\text{П.2.6})$$

$$\Delta b = \left[\frac{\langle x^2 \rangle}{n(n-2)(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle \langle x \rangle)} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \right]^{1/2}. \quad (\text{П.2.7})$$

По найденной на основе МНК величине a можно определить индуктивность катушки L по формуле:

$$L = \frac{a}{4\pi^2}, \quad (\text{П.2.8})$$

а также погрешность ее определения:

$$\Delta L = \frac{\Delta a}{4\pi^2}. \quad (\text{П.2.9})$$

Аналогично находим паразитную емкость C_0 и погрешность ее определения:

$$C_0 = \frac{b}{a}, \quad \Delta C_0 = \sqrt{\left(\frac{\Delta b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a^2} \Delta a\right)^2}. \quad (\text{П.2.10})$$

Проверить адекватность теоретической зависимости (П.2.4), т.е. определить, насколько хорошо экспериментальные данные соответствуют представлению о линейной зависи-

мости, осуществляется на основе критерия χ^2 (хи-квадрат). Для этого вычисляется величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - ax_i - b}{\Delta y_i} \right)^2, \quad (\text{П.2.11})$$

где $\Delta y_i = 2T \cdot \Delta T$, ΔT - погрешность измерения периода колебаний в i -ом опыте.

Вычисленная величина χ^2 сравнивается с табличным значением (таблица приведена на рабочем месте) так, как это делалось в работе М-1, и на основе этого сравнения делается вывод о соответствии модели линейной зависимости экспериментальным данным. Заметим, наконец, что теория предсказывает линейную зависимость (П.2.4) при любом, но фиксированном сопротивлении контура, при отборе $\theta < 2$, но в случае не утверждает, что значение L не зависит от R . При включении в контур добавочных сопротивлений с помощью магазина сопротивлений мы подключаем к контуру дополнительные добавочные катушки имеющие некоторую индуктивность. Вывод о значении R на L можно сделать на основе сравнения значений L при различных R .

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Скин-эффект и его элементарная теория

Если по проводнику протекает постоянный электрический ток, то, вообще говоря, плотность тока в различных точках проводника различна, т.е. ток по сечению проводника распределен неравномерно. Причиной этого могут быть различные факторы: условия подвода и отвода тока на границах проводника, неоднородность его проводимости в различных точках, геометрическая форма проводника и т.д. Существует, однако, простой случай, когда плотность тока постоянна - когда ток протекает по цилиндрическому достаточно длинному прямолинейному проводнику кругового сечения с проводимостью, постоянной во всех точках проводника. Это интуитивно очевидное утверждение можно доказать строго, но мы его примем на веру. Если, однако, по такому проводнику протекает переменный ток, то в результате возникновения внутри проводника вихревого электрического поля, которое суммируется с электрическим полем, обеспечивающим протекание переменного тока, происходит перераспределение плотности тока по поперечному сечению проводника в результате чего ток сосредотачивается преимущественно в поверхностном слое проводника. Это явление концентрации переменного тока в поверхностном слое проводника называется скин-эффектом.

Рассмотрим физическую природу скин-эффекта. На рис. П.3.1 (а), П.3.1 (б) показано осевое сечение цилиндричес-

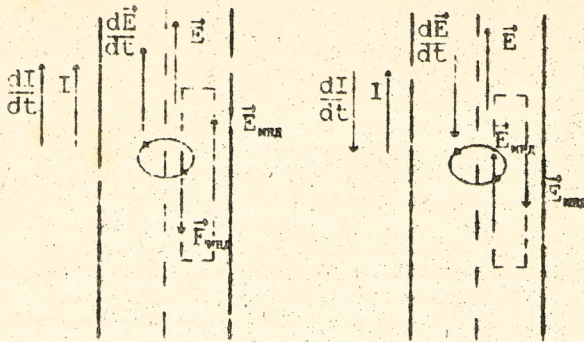


Рис. П.3.1 (а)

Рис. П.3.1 (б)

кого проводника, по которому течет переменный ток I . Рис. П.3.1 (а) соответствует моменту времени, когда ток I возрастает, а рис. П.3.1 (б) - когда ток убывает. На рисунках внутри проводника показаны направления векторов \vec{E} внешнего электрического поля, обеспечивающего протекание тока, и векторов $\frac{d\vec{E}}{dt}$ производных от этого поля. Из соображений симметрии вытекает, что линии индукции магнитного поля, порождаемого током I , имеют вид концентрических окружностей, лежащих в плоскости, перпендикулярной оси (на рисунках показаны сплошной линией по од.ой линии индукции). На рис.П.3.1 (а) вместе с током I увеличивается и магнитная индукция, что вызывает возрастание магнитного потока через контур, лежащий в плоскости рисунка и показанный штриховой линией. Это вызывает появление вихревого электрического поля, напряженность которого $\vec{E}_{\text{вих}}$ препятствует возрастанию напряженности поля на оси проводника и способствует возрастанию напряженности поля на периферии.

При убывании тока I направление $\vec{E}_{\text{вих}}$ изменяется на противоположное (см. рис. П.3.1 (б)) и это поле по-прежнему способствует (в данном случае) убыванию поля на периферии и препятствует изменению поля внутри. Таким образом, вследствие появления вихревого электрического поля амплитуда ко-

лебаний суммарного поля $\vec{E}_0 = \vec{E} + \vec{E}_{\text{ин}}$ вблизи поверхности проводника значительно превышает амплитуду колебаний поля на оси. Из закона Ома $\vec{J} = \lambda \vec{E}$, вытекает, что аналогично по сечению изменяется и плотность тока: ток течет в основном вблизи поверхности проводника. Из изложенного ясно, что перераспределение плотности тока проявляется тем сильнее, чем выше частота переменного тока, ибо при этом возрастает $\vec{E}_{\text{ин}}$. В качестве примера укажем, что для меди при частоте 10^3 Гц ток течет преимущественно в слое толщиной примерно 3 мм, так что для проводника диаметром, например 2 мм скин-эффектом можно пренебречь. При частоте 10^5 Гц толщина скин-слоя составляет примерно 0,3 мм и эффект становится ощутимым. Поскольку ток высокой частоты по внутренним частям проводника практически не течет, проводники в этом случае делаются полыми, в виде трубок.

Вследствие скин-эффекта площадь сечения, по которому протекает ток, становится меньше, чем площадь сечения для постоянного тока. Это приводит к увеличению сопротивления проводника и уменьшению его индуктивности.

Остановимся вначале на изменении сопротивления. Точный расчет сопротивления даже в описанной выше простой ситуации достаточно сложен, поэтому для выяснения характера зависимости сопротивления от частоты воспользуемся анализом размерностей, достаточно подробная теория которого изложена в лабораторной работе М-3. Из соображений, изложенных выше, вытекает, что сопротивление должно быть пропорционально длине проводника, поэтому достаточно изучить зависимость от частоты сопротивления проводника единичной длины, которое обозначим R_0 : $[R_0] = \text{Ом/м} = \text{Ом}\cdot\text{м}^{-1}$.

Величинами, характеризующими ситуацию, будут в данном случае ρ - удельное сопротивление материала, r - радиус проводника, ν - частота переменного тока, μ_0 - магнитная постоянная (для простоты рассмотрим случай неферромагнитных

проводников, для которых $\mu \approx 1$). Легко видеть, что $\left[\frac{l}{r^2}\right] = [R_0]$

что соответствует стандартному выражению для сопротивления проводника единичной длины постоянному току $R_0 = \frac{\rho \cdot l}{S} = \frac{\rho \cdot l}{\pi r^2}$ и никак не связано с электромагнитной индукцией \dot{H} . Поэтому займемся изучением той части сопротивления R_{02} , которая зависит от частоты. Представим ее в виде

$$R_{02} = C \cdot \rho^a \cdot \mu_0^b \cdot \nu^c \cdot r^d, \quad (\text{П. 3.1})$$

где C - безразмерная постоянная, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - подлежащие определению числа. Выпишем единицы измерения всех входящих в формулу (П.3.1) величин:

$$[R_{02}] = \text{Ом} \cdot \text{м}^{-1} = \text{В} / \text{А} \cdot \text{м}^{-1} = \text{Дж} \cdot \text{Ку}^{-1} \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-2},$$

$$[\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}^{-2} \cdot \text{с}^{-3},$$

$$[\mu_0] = \text{Гн} \cdot \text{м}^{-1} = \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2},$$

$$[v] = \text{с}^{-1}, [r] = \text{м}.$$

Из (П.3.1) вытекает следующее соотношение для единиц

$$\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-2} = \text{кг}^{\alpha} \cdot \text{м}^{2\alpha} \cdot \text{А}^{-2\alpha} \cdot \text{с}^{-3\alpha} \cdot \text{кг}^{\beta} \cdot \text{м}^{\beta} \cdot \text{с}^{-2\beta} \cdot \text{А}^{-2\beta} \cdot \text{с}^{-\gamma} \cdot \text{м}^{\delta}$$

или

$$\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-2} = \text{кг}^{\alpha+\beta} \cdot \text{м}^{\alpha+\beta+\delta} \cdot \text{с}^{-3\alpha-2\beta-\gamma} \cdot \text{А}^{-2\alpha-2\beta}$$

откуда, приравнявая показатели степеней при соответствующих независимых единицах, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha + \beta + \delta = 1 \\ -3\alpha - 2\beta - \gamma = -3 \\ -2\alpha - 2\beta = -2 \end{cases}$$

Четвертое уравнение системы эквивалентно перемножению, поэтому мы имеем систему трех уравнений для четырех неизвестных. Уменьшить число неизвестных и, следовательно, найти решение системы можно на основе следующих рассуждений. Для токов высокой частоты толщина слоя, в котором протекает ток, мала. Поэтому эффективная площадь поперечного сечения провода, через которую протекает ток, будет равна $2\pi r \cdot \Delta$, где Δ - толщина слоя. Поскольку сопротивление обратно пропорционально площади, то сопротивление для токов высокой частоты должно быть пропорционально r^{-1} , так что δ в формуле (П.3.1) равно (-1). Решая систему, находим

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Используя найденные значения и переходя к сопротивлению проводника произвольной длины l , получим:

$$R = R_0 + C \frac{\sqrt{\rho \cdot \mu_0 \cdot v}}{r} l, \quad (\text{П.3.2})$$

где $R_0 = \frac{\rho \cdot l}{\pi \cdot r^2}$ - сопротивление постоянному току.

Выражение (П.3.2) можно переписать также в виде:

$$R = R_0 \left(1 + \frac{A}{\sqrt{f}} \right), \quad (\text{П.3.3})$$

где $\omega = \pi \cdot C \cdot r \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}$, а $T = \frac{1}{\nu}$ - период колебаний.

Рассмотрим теперь изменение индуктивности вследствие скин-эффекта. Рассмотрим длинный соленоид с внутренним диаметром D , однослойная обмотка которого сделана из проволоки диаметром $d \ll D$ так, что витки плотно прилегают друг к другу. Для упрощения анализа заменим ток, текущий по отдельным, прилегающим друг к другу виткам, током, обтекающим соленоид по слою толщиной d . Линейную плотность этого тока, т.е. ток, обтекающий соленоид на единице его длины, обозначим $i = n \cdot I$, где n - число витков на единицу длины (на рис. П.3.2 изображено поперечное сечение соленоида).

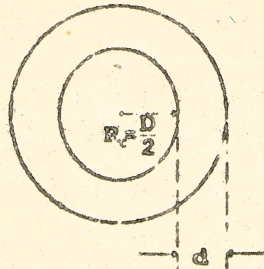


Рис. П.3.2

Из теоремы о циркуляции вытекает, что при $r < D/2$ независимо от того, постоянный или переменный ток обтекает соленоид, индукция магнитного поля равна при $\mu = 1$

$$B_r = \mu_0 \cdot i,$$

что соответствует объемной плотности энергии магнитного поля

$$w = \frac{B_r^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 \cdot i^2}{2}$$

Энергия, сосредоточенная на участке соленоида единичной длины в области $r < D/2$ равна, следовательно,

$$W_1 = w_1 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot \mu_0 \cdot i^2}{8}. \quad (\text{П.3.4})$$

Если ток I - постоянный и равномерно распределен по слою толщиной d , то плотность тока равна $i = \frac{I}{d}$. Тогда при

$\frac{D}{2} < r < \frac{D}{2} + d$ с помощью теоремы о циркуляции находим для магнитной индукции

$$B_2 = \mu_0 \cdot \frac{i \cdot \left(\frac{D}{2} + d - r\right)}{a}, \quad (\text{П. 3.5})$$

что соответствует объемной плотности

$$w_2 = \frac{B_2^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 \cdot i^2 \left(\frac{D}{2} + d - r\right)^2}{2d^2}. \quad (\text{П. 3.6})$$

Энергия магнитного поля в слое толщиной d равна, очевидно

$$W_2 = \int_{r_1}^{r_2} w_2 \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{\pi \cdot \mu_0 \cdot i^2}{8} Dd \quad (\text{П. 3.7})$$

(здесь мы учли, что $d/D \ll 1$).

Если ток быстропеременный, то вследствие скин-эффекта он сосредотачивается в тонком слое вблизи $r = D/2$ и слое вблизи $r = D/2 + d$, причем в каждом из этих слоев его линейная плотность равна $i/2$. Легко видеть, что в этом случае при $\frac{D}{2} < r < \frac{D}{2} + d$ вместо (П. 3.5) имеем $B_2 = \mu_0 \frac{i}{2}$, так что

$$w_2 = \frac{B_2^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 \cdot i^2}{8}$$

и

$$W_2 = \frac{\mu_0 \cdot i^2}{8} \pi \left[\left(\frac{D}{2} + d\right)^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2 \right] = \frac{\pi \cdot \mu_0 \cdot i^2}{8} Dd$$

(опять учтено, что $d/D \ll 1$)

Энергия участка соленоида единичной длины в случае протекания постоянного тока равна:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{\pi \cdot \mu_0 \cdot i^2 \cdot D^2}{8} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{d}{D}\right), \quad (\text{П. 3.8})$$

а в случае протекания быстропеременного тока:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{\pi \cdot \mu_0 \cdot i^2 \cdot D^2}{8} \left(1 + \frac{d}{D}\right). \quad (\text{П. 3.9})$$

Поскольку энергия магнитного поля пропорциональна индуктивности, то индуктивность для быстропеременного тока L' меньше индуктивности для постоянного тока L . Относительное

уменьшение индуктивности $\frac{L - L'}{L} = \frac{W - W'}{W} = \frac{1}{3} \frac{d}{D}$.

В лабораторных установках обычно $D \sim 20$ мм, $d \sim 2$ мм, поэтому относительное изменение индуктивности даже для очень высокочастотных токов не превышает примерно 3%, так

что этим изменением, как правило, можно пренебречь. Для токов средних частот оно, разумеется, еще меньше.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Теоретическая модель для проверки зависимости логарифмического декремента затухания от сопротивления контура

Пусть сопротивление контура таково, что по-прежнему выполнено условие $\Theta < 2$. Тогда в соответствии с (П.3.2) с относительной погрешностью порядка 5% справедлива формула

$$\Gamma = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Учитывая, что логарифмический декремент равен $\Theta = \frac{R}{2L}T$, получим

$$\Theta = \frac{2\pi^2 RC}{T}. \quad (\text{П.4.1})$$

Сопротивление R , входящее в формулу (П.4.1), значительно больше сопротивления R контура при постоянном токе вследствие скин-эффекта и зависит от периода колебаний. Это сопротивление, как вытекает из схемы рис. 1, равно $R = R_k + R_{\text{дов}}$, где $R_{\text{дов}}$ - сопротивление, включаемое с помощью магазина, причем и R_k и $R_{\text{дов}}$ зависят от периода.

Пусть параметры контура таковы, что при неизменной емкости C период не зависит от R . Фактически это означает, что изменением индуктивности контура при добавлении катушек магазина сопротивлений при указанной относительной погрешности можно пренебречь.

Тогда при фиксированной емкости контура величина $\left(\frac{2\pi^2 C}{T}\right)$ постоянна. Согласно (П.3.3) при постоянном T имеем $R_{\text{дов}} = \alpha \cdot R_{0 \text{ дов}}$, где $R_{0 \text{ дов}}$ - сопротивление магазина при постоянном токе, α - постоянная величина. Тогда (П.4.1) запишется в виде

$$\Theta = \frac{2\pi^2 C}{T} \cdot R_k + \frac{2\pi^2 C}{T} \cdot \alpha \cdot R_{0 \text{ дов}}. \quad (\text{П.4.2})$$

Обозначим

$$a = \frac{2\pi^2 C}{T} \cdot \alpha, \quad b = \frac{2\pi^2 C}{T} R_k, \quad x = R_{0 \text{ дов}}, \quad y = \Theta.$$

Тогда зависимость (П.4.2) перепишем в виде:

$$y = ax + b \quad (\text{П.4.3})$$

Теория, таким образом, предсказывает линейную зависимость между y и x при постоянной емкости C . Располагая рядом зна-

чений логарифмического декремента $y_1 = \Theta_1$ при различных $x_1 = R_0$ доз можно с помощью МНК найти коэффициенты a и b (см. формулы (П.2.5)) и погрешности их определения (формулы (П.2.6), (П.2.7)).

После этого может быть произведена проверка адекватности теоретической зависимости (П.4.3) на основе критерия χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - ax_i - b}{\Delta y_i} \right)^2, \quad (\text{П.4.5})$$

где $\Delta y_i = \Delta \Theta$ — погрешность определения логарифмического декремента в i -ом измерении. Соответствующая процедура описана в Приложении 2.

По найденному значению b можно найти также сопротивление катушки:

$$R_k = \frac{T}{2\pi C}. \quad (\text{П.4.6})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Теоретическая модель для проверки зависимости сопротивления катушки от периода колебаний вследствие скин-эффекта

Пусть добавочное сопротивление, включаемое с помощью магазина, отсутствует. Тогда сопротивление контура равно сопротивлению катушки: $R = R_k$. Это сопротивление может быть найдено по измеренным значениям Θ , L и T из формулы (П.1.1):

$$R_k = \frac{2L\Theta}{T}. \quad (\text{П.5.1})$$

При изменении емкости C период колебаний в контуре также изменяется и вследствие скин-эффекта изменяется и сопротивление катушки. Согласно (П.3.3) теория предсказывает следующую зависимость R_k от периода:

$$R_k = R_{0k} + \frac{a}{\sqrt{T}}, \quad (\text{П.5.2})$$

где a — некоторая постоянная, R_{0k} — сопротивление катушки при постоянном токе. Обозначая $x = \frac{1}{\sqrt{T}}$, $b = R_{0k}$, $y = R_k$, перепишем (П.5.2) в виде:

$$y = ax + b. \quad (\text{П.5.3})$$

Вычисляя величины $y_1 = R_k$ по формуле (П.5.1) при различных значениях C_1 , можно с помощью МНК найти a и b (см. формулы (П.2.5)) и погрешности их определения (формулы

(П.2.6), (П.2.7)), а затем с помощью критерия χ^2 проверить адекватность зависимости (П.5.3) (формула П.4.5).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Вывести уравнение затухающих колебаний в контуре и объяснить причину их затухания.
2. Понять физический смысл следующих величин: условный период, коэффициент затухания, логарифмический декремент затухания.
3. Скин-эффект и его элементарная теория. Зависимость сопротивления и индуктивности от частоты колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. И.В.Савельев. Курс физики. Т.2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика.- М., 1989.- С.264-272.
2. Д.В.Сивухин. Общий курс физики. Т.3. Электричество.- М., 1977.- С.544-556.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Каролинский Владимир Григорьевич
Прскопеня Александр Николаевич
Чопчиц Николай Игнатьевич

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ ФИЗИКИ.
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО.
Методические указания по выполнению
лабораторной работы ЭЗ.

Ответственный за выпуск Прскопеня А.Н.
Редактор Строкач Т.В.

Подписано к печати 2.07.96 г. Формат 60x84/16. Печать оф-сетная. Усл.п.л. 1,3. Уч изд.л. 1,44. Тираж 200 экз.
Заказ № 2/2. Бесплатно. Отпечатано на ротापринтере Брестского политехнического института.
224017. Брест, ул.Московская, 267.