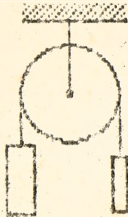


МЗ

Министерство народного
образования БССР

Брестский политехнический
институт

Кафедра физики



$$J\varepsilon = \sum M$$
$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

ПО КУРСУ ФИЗИКИ. МЕХАНИКА

Изучение законов и определение характеристик посту-
пательного и вращательного движения на машине Атвуда

(Методические указания)

Брест - 1990

МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

Брестский политехнический институт

Кафедра физики

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
по курсу физики "Механика"

Изучение законов и определение характеристик поступательного и вращательного движения на машине Атвуда
(методические указания)

Утверждены Ученым советом
электронно-механического
факультета
1990.10.24, протокол № I

Брест - 1990 г.

УДК 53 (076.5)

Изучение законов и определение характеристик поступательного и вращательного движения на машине Атвуда (методические указания).
Брест, БрПИ, 1990

В методических указаниях представлена лабораторная работа М-2, посвященная изучению основных законов динамики поступательного и вращательного движения.

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей и всех форм обучения в БрПИ.

Авторы: В.Я.Хуснутдинова, доцент, к.ф.-м.н., Л.И.Яромская, ассистент, Н.И.Чопциц, доцент.

Рецензент: Косарев В.М., канд.физ.-мат.наук, доцент БрПИ

Рекомендовано кафедрой физики
к публикации на роталпринте
БрПИ 90.10.17

© Брестский политехнический институт, 1990

ЛАБОРАТОРИАЯ РАБОТА М 2

АВТОРЫ: Н. И. Чопчиц, Л. Н. Яромская, В. Я. Хуснутдинова

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НА МАШИНЕ АТВУДА

- I. Цель работы: Изучение применения законов поступательного и вращательного движения для определения ускорения свободного падения, момента инерции блока и момента сил трения.
- II. Приборы и принадлежности: 1. Установка с машиной Атвуда.
2. Набор перегрузков.
- III. Описание установки

Общий вид машины Атвуда показан на рис. 1. На вертикальной колонке I расположены три кронштейна: нижний кронштейн 2 неподвижен, а кронштейны 3 и 4 могут перемещаться вдоль колонки и фиксироваться в любом положении стопорными винтами (на рисунке не показаны). Расстояние между кронштейнами может быть найдено с помощью миллиметровой шкалы на колонке. В верхней части колонки находится блок 5, через который перекинута нить 6 с привязанными на ее концах грузами 7 и 8, одинаковой массы. Установка работает следующим образом: устанавливаются необходимые расстояния между нижним и средним кронштейнами (S_2) и верхним и средним кронштейнами (S_1). Нажимается кнопка "СЕТЬ" и утапливается кнопка "ПУСК". При этом специальный электромагнит (на рисунке не показан) не препятствует свободному вращению блока. На правый груз кладется один или несколько перегрузков кольцеобразной формы, имеющихся в комплекте и этот груз рукой устанавливается в положении, когда его нижняя грань совпадает с чертой на верхнем кронштейне. В этом положении груза нажимается кнопка "ПУСК" и вышеуказанный электромагнит стопорит блок, препятствуя движению системы. Нажимается кнопка "СБРОС", подготавливая секундомер для измерений. Устранив колебания грузов, утапливают кнопку "ПУСК", освобождая систему. Когда правый груз с перегрузками достигает среднего кронштейна, перегрузки снимаются, и специальный фотоэлектрический датчик включает секундомер. Когда правый груз достигает нижнего кронштейна с другим фотодатчиком, то секундомер выключается.

Установка позволяет измерить время движения Z правого груза на пути S_2 между средним и нижним кронштейнами.

Последующие измерения начинаются с утапливания кнопки "ПУСК", т.е. освобождения блока для приведения правого груза с перегрузками в исходное положение, описанное выше. Возможно, при движении правого груза он задевает кольцо на среднем кронштейне, предназначенное для снятия перегрузков, и дальнейшее движение грузов сопровождается колебаниями. Возможно также, что правый груз не попадает в приемное окно нижнего кронштейна.

Для проведения измерений эти эффекты нужно устранить.

Это достигается горизонтированием установки с помощью винтов 9 и небольшим поворотом в горизонтальной плоскости среднего кронштейна 3.

Результаты всех измерений обычно записываются в таблицы - так они легче обозримы. Все таблицы к данной работе вам предлагается разработать самостоятельно, поэтому их образцы в задании не приводятся.

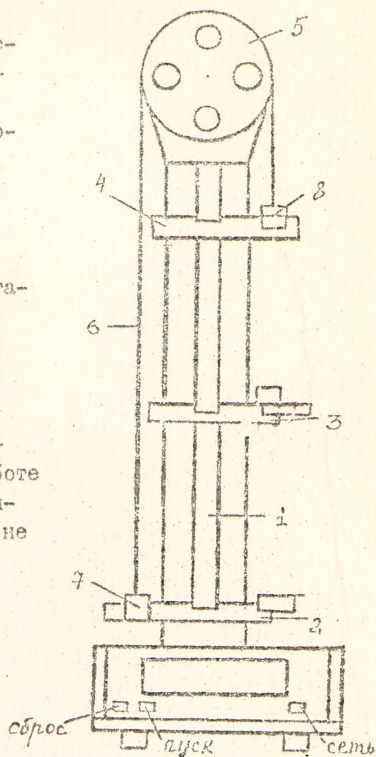


Рис. I

В дальнейшем изложении используются следующие обозначения:

J - момент инерции блока; $[J] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$

R - радиус блока; $[R] = \text{м}$

m - массы грузов, висятых на нити, перекинутой через блок; $[m] = \text{кг}$

m' - масса перегрузка, который кладется на правый груз; $[m'] = \text{кг}$

S_2 - расстояние между верхним и средним кронштейнами, т.е. путь, который проходит груз вместе с перегрузком; $[S_2] = \text{м}$

S_2 - расстояние между средним и нижним кронштейнами, т.е. путь, который проходит правый груз без перегрузки; $[S_2] = 1$ м.

Этап движения с перегрузкой называется далее этапом 1, а этап движения без перегрузки - этапом 2.

T - время движения правого груза на этапе 2; $[T] = 1$ с

α - ускорение правого груза на этапе 1; $[\alpha] = 1$ м/с²

α' - ускорение правого груза на этапе 2; $[\alpha'] = 1$ м/с²

Суммируем выше сказанное в отношении работы установки.

Установка позволяет проводить прямые измерения времени движения правого груза на этапе 2 при различных задаваемых значениях масс перегрузков m' , перемещения S_1 на этапе 1 и перемещения S_2 на этапе 2.

В экспериментальной установке имеется 3 перегрузки кольцеобразной формы различной массы, которые можно класть порознь, по два вместе, и, наконец, все три вместе, а расстояния S_1 и S_2 можно варьировать в широких пределах. В качестве упражнения сосчитайте, сколько всего измерений T нужно провести на установке, чтобы исчерпать все возможные комбинации указанных величин. А ведь каждое измерение нужно провести несколько раз для учета случайных ошибок! Понятно, что проведение всех измерений - нереальная задача. Кроме того, неясно, что с результатами дальше делать, что с их помощью можно определить.

Ответы на последние вопросы дает теоретическая модель экспериментальной ситуации. Она же позволяет составить план измерений и обработки результатов.

Любая теоретическая модель дает приближенное описание экспериментальной ситуации, поскольку пренебрегает влиянием многих реально имеющих место эффектов.

Ниже рассматриваются две теоретические модели возрастающей сложности. Чем сложнее модель, тем труднее с ней работать.

При выполнении работы вы вправе выбрать любую из них. От вашего выбора зависит лишь максимальный рейтинг, который может быть получен при условии полного выполнения всех заданий в рамках модели.

Этот предельный рейтинг модели 1 равен 4,5 и при переходе к следующей модели возрастает в 1,1 раза.

Ниже дается необходимая для выполнения работы и обработки результатов измерений информация по каждой модели отдельно, так что если скажем вы выбрали для работы модель 2, то нет необходимости изучать материал, относящийся к модели 1.

Следует иметь в виду, что для отчета по работе необходимо изучить теоретический материал приложения, где некоторые вопросы рассмотрены более обстоятельно.

МОДЕЛЬ 1. В этой модели считается, что трение в оси блока отсутствует. Остальные предположения сформулированы в Приложении 1. Теория дает следующее выражение для ускорения правого груза на этапах 1 и 2:

$$a = \frac{m' g}{2m + m'} \quad , \quad a' = 0 \quad (I)$$

где g - ускорение свободного падения.

Задание 1. Грубая верификация модели 1.

Целью верификации является выяснение того, насколько точно модель описывает реальность (подробности в Приложении 2).

1. Убедитесь, что в отсутствие перегрузок на правом грузе система находится в равновесии. Установка может быть при этом выключена. Если она включена, не забудьте утопить кнопку "Пуск", для обеспечения свободного вращения блока.

2. Найдите минимальную ^{отброс} массу перегрузка $\Delta m'$, который нужно положить на правый груз, система начала двигаться.

3. Найдите отношение $\frac{\Delta m'}{m'}$, где m' - минимальная масса перегрузка кольцеобразной формы, с которым в последующем будут производиться измерения времени. Относительная погрешность всех последующих результатов будет не меньше величины $(\frac{\Delta m'}{m'})$.

Задание 2. Уточненная верификация модели.

1. Выберите любое значение S_2 в интервале 6-15 см и в дальнейших измерениях сохраняйте его постоянным. Установите минимальное возможное значение S_2 . Измерьте не менее 5 раз время τ движения правого груза на этапе 2, используя на этапе 1 перегрузок кольцеобразной формы с минимальной массой m' . Найдите среднее время движения при этом значении S_2 .

2. Измените S_2 , сохранив S_1 прежним, что достигается совместным перемещением среднего и верхнего кривошейнов. Повторите измерения τ при этом значении S_2 и т.д. Шаг измерения S_2 выберите самостоятельно так, чтобы измерения τ были проведены три не менее чем десяти значениях S_2 (при каждом значении S_2 измерения проводятся не менее 5 раз с усреднением результатов).

3. Отметьте экспериментальные точки на координатной плоскости, на оси абсцисс которой откладывается S_2 , а на оси ординат - τ . При каждом значении S_{2i} ($i = 1, 2, \dots$ - номер задаваемого значения S_2) откладывайте среднее значение τ_i , соответствующее этому значению S_{2i} . Отметьте стандартным образом погрешности S_2 и τ - эти величины измеряются прямым образом.

4. Согласно второй из формул (I) в данной модели движение на этапе 2 равномерное, а на этапе I - равноускоренное. Поскольку в опытах величина S_2 не изменялась, то в конце этапа I груз имел во всех опытах одну и ту же скорость.

$$V_{20} = \sqrt{2 a S_1} \quad (2)$$

и эта скорость на этапе 2 в модели не изменяется, так что

$$\tau = \frac{S_2}{V_{20}} \quad (3)$$

Из (3) вытекает, что зависимость τ от S_2 - линейная и экспериментальные точки должны лежать на прямой, проходящей через начало координат. Оцените визуально, соответствует ли это действительности. Особое внимание обратите на самые большие значения S_2 . Сформулируйте свои выводы по этому пункту письменно.

5. Основная идея предлагаемого способа верификации выглядит следующим образом. В реальной установке трение, конечно, есть. Поэтому на первом этапе движение будет происходить с несколько меньшим ускорением, чем в отсутствие трения, а на втором этапе движение будет замедленным ($a' < 0$). Можно предположить, что a' - постоянная величина. Поэтому реально вместо (3) справедлива следующая связь S_2 и τ :

$$S_2 = V_{20} \tau + \frac{a' \tau^2}{2} \quad (4)$$

Располагая рядом значений τ_i в зависимости от S_{2i} , можно, по методу наименьших квадратов найти величины V_{20} и a' . Формулы для их вычисления имеют вид

$$V_{20} = \frac{CD - BE}{AD - B^2} \quad , \quad a' = \frac{2(EA - BC)}{AD - B^2} \quad (5)$$

где

$$A = \sum_{i=1}^n \tau_i^2, \quad B = \sum_{i=1}^n \tau_i^3, \quad C = \sum_{i=1}^n S_{2i} \tau_i, \quad D = \sum_{i=1}^n \tau_i^4, \quad E = \sum_{i=1}^n S_{2i} \tau_i^2.$$

(n - число измерений).

Зная скорость V_{20} в конце первого этапа, по формуле (2) можно найти ускорение на первом этапе:

$$a = \frac{V_{20}^2}{2S_1} \quad (6)$$

Мерой влияния сил трения на процесс движения может служить отношение $\frac{10M}{a}$. Такова минимально возможная относительная погрешность определения всех величин в данной модели. Найдите это отношение. Процесс верификации закончен. Сравните величины, полученные в заданиях 1 и 2.

Задание 3. Определение g и τ .

1. Из (4) вытекает, что при значениях $\tau \ll \frac{2V_{20}}{10g}$ второе слагаемое значительно меньше первого и им можно пренебречь. При этом мы опять возвращаемся к формуле (3). Поэтому, если в дальнейших опытах ограничиться такими значениями S_2 , при которых значения τ удовлетворяют соотношению

$$\tau \ll \frac{2V_{20}}{10} = \frac{4S_1}{V_{20}} \quad (*)$$

то вместо (4) можно использовать значительно более простую формулу (3).

Вычислите величину $\tau^* = \frac{4S_1}{V_{20}}$ и при дальнейших измерениях не берите столь больших S_2 , при которых время τ будет превышать эту величину τ^* .

Предполагая это условие выполненным, дальнейшие вычисления V_{20} и следует вести по формулам, вытекающим из применения МНК для (3):

$$V_{20} = \frac{\sum_{i=1}^n S_{2i}^2}{\sum_{i=1}^n S_{1i}}, \quad a = \frac{V_{20}^2}{2S_1}, \quad \text{где } n - \text{число измерений} \quad (7)$$

2. Повторите измерения п.п. 1-3 задания 2 при различных значениях масс перегрузков кольцеобразной формы. В работе три перегрузка различных масс, которые можно класть по отдельности, по два вместе в любых комбинациях и, наконец, все 3 вместе, что дает в целом 7 возможных значений масс. Следите за выполнением условия (*). При каждом значении массы перегрузка m_j (индекс j нумерует возможные значения массы перегрузка) найдите V_{20j} и a_j по формулам (7). Минимальное число значений $j = 6$, причем измерения для случая, когда положены все три перегрузка, проводить обязательно. Составьте таблицу значений при различных m_j .

3. В соответствии с формулой (1) имеем

$$a_j = \frac{m_j' g}{\frac{J}{R^2} + 2m + m_j'} \quad , \quad j = 1 \dots 7 \quad (8)$$

Таким образом, мы имеем от 5. до 7 уравнений, в которых содержится две величины, которые непосредственно невозможно измерить: J и момент инерции блока J . Говорят, что система переопределена. Подставьте численные значения и выпишите все уравнения системы.

4. Попробуйте решать систему следующим образом. Возьмите два уравнения из этого набора и решите получившуюся линейную систему из двух уравнений с двумя неизвестными g и J . Затем проделайте то же самое, взяв любые другие два уравнения. Скорее всего, вы получите совершенно другие значения g и J . Поразмышляйте над причиной этого и сформулируйте письменно выводы, к которым вы пришли.

5. Системы такого вида в математике называются плохо обусловленными. Не вдаваясь в математические тонкости, поясним это понятие графически.

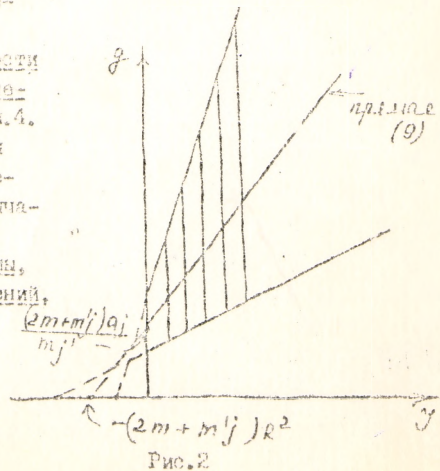
Любое из уравнений (8) можно записать в виде

$$m_j' a_j - \frac{a_j J}{R^2} - J = (2m + m_j') a_j \quad (9)$$

На координатной плоскости, по оси абсцисс которой откладывается момент инерции J , а по оси ординат - ускорение свободного падения g , уравнение (9) определяет прямую, показанную на рис.2 (участок прямой, показанной штриховой линией, не соответствует физическим значениям J , поскольку $J > 0$).

Изобразите на координатной плоскости прямые, соответствующие тем уравнениям, которые вы использовали в п.4. Обратите внимание на то, что углы между прямыми невелики, т.е. угловые коэффициенты прямых мало отличаются.

Иначе говоря, определитель системы, составленной из любой пары уравнений, близок к нулю.



Нахождение решения системы двух уравнений вида (9) на геометрическом языке означает нахождение точки пересечения прямых. Если угол между прямыми близок к $\pi/2$, то небольшое изменение положения любой из двух пересекающихся прямых (говорят, малое шевеление прямой) приводит к небольшому перемещению точки пересечения. Если же прямые почти параллельны, то малое шевеление любой из них приводит к значительному перемещению точки пересечения.

Это обстоятельство не имело бы никакого значения, если бы коэффициенты в уравнениях (9) были известны точно. Но ведь они — приближенные числа. С учетом погрешностей коэффициентов вместо прямой мы каждому уравнению (9) должны поставить в соответствие полосу, показанную на рис. 2 штриховкой в сильно преувеличенном для наглядности виде. Любая прямая внутри заштрихованной полосы с учетом погрешностей коэффициентов соответствует уравнению (9).

Постройте полосы, соответствующие любой из пар уравнений, которые вы решали в п.4.

Способ построения полосы достаточно очевиден из рисунка 2: на оси абсцисс от точки $\mathcal{U} = -(2m + m')/R^2$ влево и вправо откладываются погрешности этой величины, рассчитываемые стандартным образом (m, m', R указаны в паспорте установки, а их погрешности задаются формой записи); на оси ординат вверх и вниз от точки $g_0 = \frac{(2m+m')a_j}{m'}$ откладываются погрешности этой величины, которые также рассчитываются стандартно. Единственная трудность состоит в расчете Δa_j — чтобы не усложнять расчеты положим $\Delta a_j = 0$, т.е. будем считать величину a_j известной точно.

6. Погрешность в определении φ и \mathcal{U} путем решения любой пары уравнений (9) определяются по вершинам четырехугольника, полученного в результате пересечения полос, соответствующих каждому уравнению. Нарисуйте этот четырехугольник для выбранной в п.5 пары уравнений и найдите $\Delta g, \Delta \mathcal{U}$.

Чем меньше угол между прямыми, соответствующими уравнению (9), тем больше размеры этого четырехугольника, несмотря на то, что каждая из полос может быть достаточно узкой.

Итак, мы имеем дело со следующей ситуацией. Коэффициенты каждого из уравнений (9) предельно со сравнительно небольшими погрешностями. Но решение системы из любой пары уравнений имеет столь большие погрешности, что оно практически непригодно. Это следствие того, что соответствующие полосы идут под небольшими углами друг к другу.

В математике задачи такого типа называются некорректными. При решении некорректных задач традиционными способами погрешность решения оказывается неприемлемо большой — значительно большей, чем погрешность, с которыми известны коэффициенты.

В математике разработаны специальные методы решения некорректных задач, которые позволяют найти решение с погрешностью того же порядка, с которой известны коэффициенты. В курсе физики нет возможности подробно остановиться на достаточно сложной идейной и технической стороне этих методов. Поэтому ниже рассматривается адаптированный (упрощенный) вариант решения в чисто вычислительном плане, без анализа его найденной основы и доказательства того, что он приводит к хорошим результатам.

Перепишем (I) в следующем виде

$$\frac{1}{a} = \frac{\frac{1}{R^2} + 2m}{g} \cdot \frac{1}{m'} + \frac{1}{g} \quad (10)$$

Обозначим

$$\frac{1}{a} = y; \quad \frac{1}{m'} = x; \quad \frac{\frac{1}{R^2} + 2m}{g} = A; \quad \frac{1}{g} = B \quad (11)$$

Тогда (10) примет вид

$$y = Ax + B \quad (12)$$

Модель I, таким образом, предсказывает линейную зависимость между переменными y и x . Располагая рядом экспериментальных значений $y_j = \frac{1}{a_j}$ при различных $x_j = \frac{1}{m'_j}$, можно найти по методу наименьших квадратов коэффициенты A и B в формуле (12):

$$A = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}; \quad B = \langle y \rangle - A \langle x \rangle \quad (13)$$

где

$$\langle x \rangle = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j; \quad \langle xy \rangle = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j y_j$$

$$\langle y \rangle = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j; \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j^2$$

k — число значений массы перегрузок, при которых производилось вычисление ускорений (напомним, $5 \leq k \leq 7$).

Найдя коэффициенты A и B , из (11) находим

$$g = \frac{1}{B} ; \quad \mathcal{J} = R^2 \left(\frac{A}{B} - 2m \right) \quad (14)$$

Используя результаты п.2, по формулам (II), (13), (14) найдите g и \mathcal{J}

7. Расчет погрешностей величин g и \mathcal{J} в данной работе достаточно сложен, поскольку погрешности зависят как от степени точности модели и погрешностей прямых измерений, так и от методики решения некорректной задачи. Примем, поэтому, следующий вариант. Считая, что точное значение $g = g_0$ известно: $g_0 = 9,79 \text{ м/с}^2$, найдите относительную погрешность в определении g и сравните ее с минимальной относительной погрешностью, найденной в задании 2 при верификации модели. Сформулируйте письменно выводы. Найдите $\Delta \mathcal{J}$, считая относительные погрешности в определении g и \mathcal{J} одинаковыми. Запишите результат определения \mathcal{J} в стандартной форме. На этом работа с моделью I заканчивается.

Модель 2. В этой модели предполагается, что момент сил трения в оси блока постоянен, т.е. не зависит от давления блока на ось (или, иначе, от масс висевших на нити грузов) и от угловой скорости вращения. Теория дает следующие выражения для ускорения грузового груза на этапах 1 и 2 (Приложение I:

$$a = \frac{m'g - \frac{M_{\text{тр}}}{R}}{\frac{\mathcal{J}}{R^2} + 2m + m'} ; \quad a' = - \frac{\frac{M_{\text{тр}}}{R}}{\frac{\mathcal{J}}{R^2} + 2m + m'} \quad (15)$$

где g - ускорение свободного падения, $M_{\text{тр}}$ - модуль момента сил трения.

Задание I. Верификация модели 2.

Задачей верификации является установление степени соответствия модели реальной экспериментальной ситуации (подробности в Приложении 2). Основная идея состоит в следующем. Если справедливо предположение о независимости $M_{\text{тр}}$ от угловой скорости вращения, то следствие (15) при постоянной массе перегруза m' ускорение должно быть постоянным. При этом зависимость между временем \mathcal{T} движения на этапе 2 и перемещением S_x , на этом этапе, должна иметь вид

$$S_x = V_{20} \mathcal{T} + \frac{a' \mathcal{T}^2}{2} \quad (16)$$

где V_{20} - начальная скорость на этапе 2, т.е. конечная скорость на этапе 1. Если мы убедимся, что при различных V_{20} величина a' остается в пределах ошибок измерений неизменной, то тем самым установим сте-

пень оправданности предположения о независимости $M_{\text{тр}}$ от угловой скорости вращения. Это диктует следующий порядок действий.

1. Установите значение S_1 порядка 6-8 см и в дальнейшем сохраняйте его постоянным. Установите минимально возможное значение S_2 . Измерьте не менее 6 раз время τ движения правого груза на этапе 2, используя на этапе 1 перегрузок кольцеобразной формы с минимальной массой m' . Найдите среднее время движения при этом значении S_2 .

2. Измените S_2 , сохранив S_1 прежним, что достигается совместным перемещением среднего и верхнего кронштейнов. Повторите измерения при этом значении S_2 и т.д. Как измерения S_2 выбирайте самостоятельно так, чтобы измерения τ были проведены при не менее чем 10 значениях S_2 (при каждом значении S_2 не менее 6 раз с последующим усреднением).

3. Поскольку во всех опытах величина S_1 сохранялась постоянной, то V_{20} в формуле (16) - постоянная величина. Тогда, располагая найденным в п.2 рядом значений τ_i при различных S_{2i} , можно по методу наименьших квадратов для формулы (16) найти V_{20} и a' :

$$V_{20} = \frac{CD - BE}{AD - B^2}; \quad a' = \frac{2(EA - BC)}{AD - B^2} \quad (17)$$

где $A = \sum_{i=1}^n \tau_i^2$; $B = \sum_{i=1}^n \tau_i^3$; $C = \sum_{i=1}^n S_{2i} \tau_i$; $D = \sum_{i=1}^n \tau_i^4$; $E = \sum_{i=1}^n S_{2i} \tau_i^2$

n - число задаваемых значений

Найдите V_{20} и a' по формулам (17). Будем их обозначать далее $V_{20(a)}$, $a'_{(a)}$

4. Установите новое значение S_1 , вдвое больше предыдущего, и повторите измерения и вычисления п.п. 1-3. Найдите значения $V_{20(a)}$ и $a'_{(a)}$ для этого случая.

5. Степень оправданности предположения о независимости $M_{\text{тр}}$ от угловой скорости вращения зависит от близости значений $a'_{(1)}$ и $a'_{(2)}$ - модель 2 предполагает что они одинаковы. Поэтому в качестве минимальной относительной погрешности, которая вводится в дальнейшие выкладки моделью 2 на этом этапе, можно принять величину $2 \frac{|a'_{(1)} - a'_{(2)}|}{|a'_{(1)} + a'_{(2)}|}$
Найдите эту величину.

6. Надо еще определить погрешность, которая вызвана предположением о независимости $M_{\text{тр}}$ от силы давления блока на ось, которая в свою очередь, зависит от массы перегрузка. Для этого следует повторить измерения п.п. 1, 2 при любом значении S_1 из интервала 6-16 см, используя перегрузки различных масс. В комплект установки входит три перегрузка кольцеобразной формы с различными

массами, причем их можно класть на правый груз порознь, по два вместе и все три вместе, так что всего получается 7 различных возможных значений масс перегрузка. Измерения нужно провести как минимум при 5 значениях массы перегрузка m_j из 7 возможных, причем обязательно использовать вариант, когда все три перегрузка кладутся вместе. Для каждого значения m_j ($j = 1, 2, \dots, k \geq 5$) найдите по формулам (17) $\frac{1}{|a_j|}$ и a_j' (индекс j нумерует значения массы перегрузков).

7. Вторая из формул (15) может быть переписана в виде

$$\frac{1}{|a_j|} = \frac{(-\frac{y}{R^2} + 2m)R}{M_{TP}} + \frac{R}{M_{TP}} m' \quad (18)$$

или $y = AX + B$,

$$(19)$$

где обозначено

$$\frac{1}{|a_j|} = y; \quad m' = x; \quad A = \frac{R}{M_{TP}}; \quad B = \frac{(\frac{y}{R^2} + 2m)R}{M_{TP}} \quad (20)$$

Если предположение о постоянстве M_{TP} при различных значениях m' оправдано, то зависимость между величинами y и x должна быть линейной. Оцените визуально, соответствует ли это действительности, изобразив на координатной плоскости (x, y) экспериментальные точки

$$x_j = m'_j; \quad y_j = \frac{1}{|a_j|}$$

8. По методу наименьших квадратов для формулы (20) можно найти коэффициенты A и B наилучшей прямой, соответствующей предполагаемой модели 2 линейной зависимости:

$$A = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}; \quad B = \langle y \rangle - A \langle x \rangle \quad (21)$$

где

$$\langle x \rangle = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j; \quad \langle xy \rangle = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j y_j$$

$$\langle y \rangle = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j; \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j^2$$

где k - число значений массы перегрузков, при которых производилось вычисление ускорений.

9. Оценку достоверности гипотезы о постоянстве M_{TP} , которая эквивалентна существованию линейной зависимости (19), можно произвести по критерию Пирсона (χ^2). Для этого вычисляется величина

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{[y_j - (Ax_j + B)]^2}{\Delta x^2}$$

где $\Delta x = \Delta m'$ - погрешность в определении массы перегрузков, определяемая стандартным образом. Далее, по таблицам распределения χ^2 находим доверительная вероятность (уровень значимости) гипотезы о постоянстве $M_{тр}$ (см. методические указания к лабораторной работе № 1).

10. Естественной оценкой точности предположения о постоянстве $M_{тр}$ может служить величина $\Delta y_{max}/y_c$.

где Δy_{max} - модуль максимального отклонения экспериментальных значений $y = \frac{1}{\alpha y}$ от теоретической прямой (19), т.е.

$$\Delta y_{max} = M \alpha x \left| \frac{1}{y_c} - (A x_j + B) \right|$$

а y_c - значение переменной $y = \frac{1}{\alpha y}$ при том значении j , при котором достигается максимум. Сравните величину $\frac{\Delta y_{max}}{y_c}$ с величиной, найденной в п. 5. Выпишите большую из этих двух величин. Относительная погрешность определения всех величин, определяемых косвенно в рамках данной модели, но меньше найденной

Процесс верификации модели закончен, если указаны а) уровень значимости гипотез о постоянстве $M_{тр}$ б) максимальная погрешность определения косвенных величин в модели.

Задание 2. Определение $M_{тр}$

1. В п. 8 задания I была определена величина A . Тогда из формулы (20) находим $M_{тр} = \frac{R}{A}$

где R - радиус блока. Найдите $M_{тр}$. Погрешность в определении $M_{тр}$ рассчитать довольно сложно, поскольку она зависит от погрешностей определения коэффициента A определяемого по методу наименьших квадратов. В свою очередь, при вычислении погрешности A нужно учесть, что величина $y = \frac{1}{\alpha y}$ также определялась по методу наименьших квадратов. Поэтому погрешность $M_{тр}$ на этом этапе не рассчитывайте.

2. Проверьте найденное значение для $M_{тр}$ с помощью следующего грубого опыта. Убедитесь, что в отсутствие перегрузка система находится в равновесии. Установка должна быть выключена. Постепенно увеличивая массу перегрузка с помощью набора перегрузков малой массы, найдите минимальную массу $\Delta m'$ перегрузка, при которой система приходит в движение. Тогда

$$M_{тр} = \Delta m' g R$$

где $g = 9,79 \text{ м/с}^2$ - ускорение свободного падения.

Сформулируйте письменно результаты сравнения и поясните, почему опыт п. 2 довольно груб.

Задание 3. Определение ρ и \mathcal{J}

1. В п.6 задания 1 были определены величины V_{20j} конечной скорости на этапе I при различных значениях масс перегрузок m'_j кольцеобразной формы. В модели 2, как следует из первой формулы (15), движение на первом этапе происходит с постоянным ускорением. Это ускорение легко находится по формуле, известной из школьного курса физики:

$$a = \frac{V_{20j}^2}{2S_1} \quad (22)$$

Таким образом мы имеем как минимум пять значений ускорения на этапе I a_j при различных значениях массы перегрузки m'_j . Найдите все a_j .

2. По формуле (15) имеем

$$a_j = \frac{m'_j g - \frac{M_2 g}{2}}{2m + m'_j} \quad (23)$$

Выпишите в численном виде все выражения (23), используя значение, найденное в задании 2.

3. В полученной системе, состоящей как минимум из 5 уравнений всего две неизвестных величины: ρ и \mathcal{J} . Говорят, что система переопределена. Попробуйте решить систему следующим образом. Возьмите любую пару уравнений и решите по известному линейную систему относительно двух неизвестных ρ и \mathcal{J} . Затем возьмите любую другую пару и вновь найдите ρ и \mathcal{J} . Скорее всего, вы получите совершенно другие значения ρ и \mathcal{J} . Соблюдайте письменные сообщения о причине этого.

4. Системы такого вида называются плохо обусловленными. Простейшей интерпретацией плохой обусловленности является геометрическая. Любое из уравнений вида (23) можно записать в виде

$$m'_j g - \frac{a_j}{g} \mathcal{J} = (2m + m'_j) a_j + \frac{M_2 g}{2} \quad (24)$$

Рассмотрим координатную плоскость, на оси абсцисс которой откладывается \mathcal{J} , а на оси ординат - ρ . Уравнение (24) на этой плоскости определяет прямую, показанную на рис.3 (участок прямой, показанный штриховой линией, соответствует физическим значениям \mathcal{J} , поскольку $\mathcal{J} > 0$)

Изобразите на координатной плоскости прямые, соответствующие тем уравнениям, которые использовались в п.3.

Обратите внимание на то, что углы между прямыми невелики, т.е. угловые коэффициенты прямых мало отличаются. На алгебраическом языке это означает, что определитель системы, составленной из любой пары уравнений, близок к нулю.

(24)

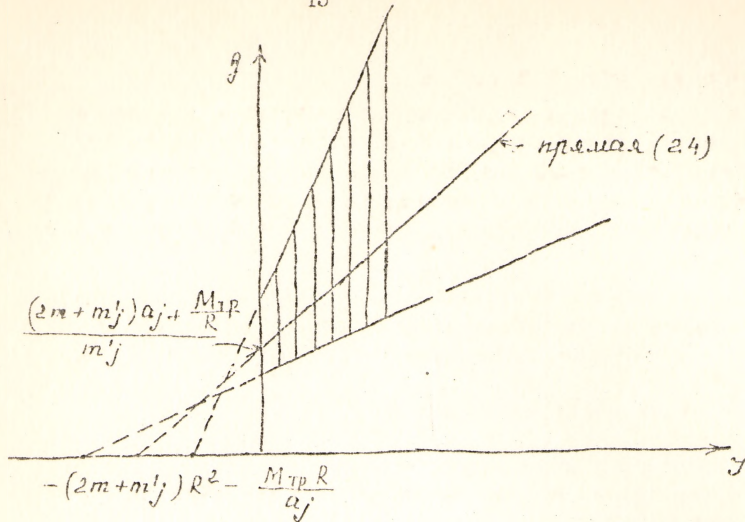


Рис.3

Нахождение решения системы двух уравнений вида (9) на геометрическом языке означает нахождение точки пересечения прямых. Если угол между прямыми близок к $11/2$, то небольшое изменение положения любой из них, или, как говорят, малое шевеление прямых, приводит к небольшому перемещению точки пересечения. Если же угол между прямыми мал, то небольшое их шевеление приводит к значительному перемещению точки пересечения.

Это обстоятельство не имело бы никакого значения, если бы коэффициенты в уравнениях (24) были известны точно. Но ведь они - приближенные числа. С учетом погрешностей коэффициентов вместо прямой каждому уравнению (24) нужно поставить в соответствие полосу, которая показана на рис.3 штриховкой в сильно преувеличенном для наглядности виде. Любая прямая внутри заштрихованной полосы с учетом погрешностей коэффициентов соответствует уравнению (24).

Построить полосу, соответствующую любой из пар уравнений, которые вы решаете в п.3.

Способ построения полосы достаточно ясен из рис.3: на оси абсцисс от точки $x_0 = -(2m + m'j)R^2 - \frac{M_{1p}R}{a_j}$ влево и вправо откладываются погрешности этой величины, а на оси ординат вверх и вниз от точки $y_0 = \frac{(2m + m'j)a_j + \frac{M_{1p}}{R}}{m'j}$ откладываются погрешности Δy_0 . Чтобы не усложнять расчеты, будем считать $\Delta M_{1p} = 0$, $\Delta a_j = 0$, т.е. будем считать, что эти величины известны точно. Погрешности Δm , $\Delta m'$, ΔR заданы формой записи этих величин в паспорте установки.

Найдите $\Delta \rho_0$ и $\Delta \mathcal{U}$ стандартным образом, и постройте полосы.

5. Погрешности в определении ρ и \mathcal{U} путем решения системы из любых двух уравнений (24) определяются по вершинам четырехугольника, полученного в результате пересечения полос, соответствующих каждому уравнению. Изобразите этот четырехугольник для выбранной в п.4 пары уравнений и найдите $\Delta \rho$, $\Delta \mathcal{U}$.

Чем меньше угол между прямыми, соответствующими уравнениям (24), тем больше размеры этого четырехугольника, несмотря на то, что каждая из полос может быть достаточно узкой.

Итак, мы имеем дело со следующей ситуацией. Коэффициенты каждого из уравнений (24) определены с сравнительно небольшими погрешностями. Но решение системы из любой пары уравнений имеет столь большие погрешности, то оно практически непригодно. Это, еще раз подчеркивая, следствие того, что соответствующие полосы идут под небольшими углами друг к другу.

Задачи такого типа называются некорректными. При решении некорректных задач традиционными методами погрешность решения оказывается неприемлемо большой — значительно большей, чем погрешности, с которой определены коэффициенты.

Существуют специальные математические методы решения некорректных задач, позволяющие найти решение с погрешностью того же порядка, что и погрешности коэффициентов. Поскольку идейная и техническая сторона этих методов достаточно сложна, мы на них останавливаться не будем. Рассмотрим в вычислительном аспекте упрощенный (адаптированный) вариант этих методов, позволяющий получить достаточно хорошие результаты.

Из формул (15) находим

$$\frac{1}{a-a'} = \frac{\frac{\gamma}{R^2} + 2m}{g} \cdot \frac{1}{m'} + \frac{1}{g} \quad (25)$$

Обозначим

$$\frac{1}{a-a'} = y; \quad \frac{1}{m'} = x; \quad \frac{\frac{\gamma}{R^2} + 2m}{g} \cdot A_0; \quad \frac{1}{g} = B_0 \quad (26)$$

Тогда (25) примет вид

$$y = A_0 x + B_0$$

Величины a'_j были определены в п.6 задания I, а величины a_j в п. I настоящего задания. Располагая рядом значений $y_j = \frac{1}{a_j - a'_j}$ при различных $x_j = \frac{1}{m'_j}$, по формулам (21) находим A_0 и B_0 .

Тогда в соответствии с (26) имеем

$$g = \frac{A}{B^2}; \quad \mathcal{J} = R^2 \left(\frac{A}{B} - 2m \right) \quad (27)$$

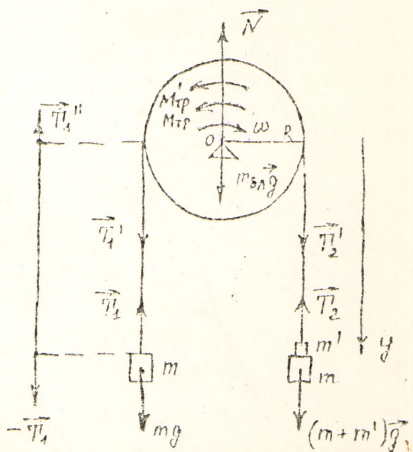
Найдите g и \mathcal{J} .

6. Погрешности величин g и \mathcal{J} рассчитать еще труднее, чем $\Delta M_{тр}$ (п. I задание 2), поскольку нуждается в выяснении нетривиальные вопросы, связанные с оценкой точности решения некорректной задачи. Приведем, поэтому следующий подликативный вариант.

Считая известным точное значение $g = g_0 = 9,79 \text{ м/с}^2$, найдите относительную погрешность определения величины g и сравните ее с минимально возможной, найденной в задании I при верификации модели 2. Целью именно сделайте выводы. Считая относительные погрешности определения \mathcal{J} , $M_{тр}$ и g одинаковыми, найдите $\Delta \mathcal{J}$, $\Delta M_{тр}$ и запишите окончательные результаты определения момента инерции \mathcal{J} и момента сил трения $M_{тр}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Применение законов динамики вращательного и поступательного движений

Рассмотрим блок радиуса R с моментом инерции \mathcal{J} , который может вращаться вокруг горизонтальной оси. Через блок перекинута невесомая, нерастяжимая нить, на концах которой висят грузы массой m каждый. Если на один из грузов (на рисунке — на правый) положить перегрузок достаточно большей массы m' , система придет в движение (разумеется, при отсутствии сил трения перегрузок сколь угодно малой массы приводит систему в движение, но при наличии сил трения это не так). Вычислим ускорения грузов, считая, что при движении нить по блоку не скользит. Будем считать, что диссипативные силы, зависящие от скорости (например, силы сопротивления воздуха) отсутствуют.



На левый груз действует сила тяжести $m_1 \vec{g}$ и сила \vec{T}_2 со стороны нити. На левый вертикальный участок нити действуют две силы: сила $(-\vec{T}_1)$ со стороны левого груза, которая по 3-му закону Ньютона равна силе \vec{T}_1 по модулю и противоположна по направлению и сила \vec{T}_2' со стороны участка нити, находящегося на блоке (на рисунке слева отдельно показан левый участок нити и силы, на него действующие; напомним, что нить считается невесомой). Запишем второй закон Ньютона для левого участка нити:

$$m_{\text{нити}} \vec{a}_{\text{нити}} = -\vec{T}_1 + \vec{T}_2' = 0, \text{ поскольку } m_{\text{нити}} = 0$$

Тогда $\vec{T}_2' = \vec{T}_1$. По третьему закону Ньютона сила \vec{T}_2' , с которой левый вертикальный участок нити действует на участок, находящийся на блоке, равна

$$\vec{T}_2 = -\vec{T}_2' = -\vec{T}_1$$

Фактически, сила \vec{T}_1 оказывается приложенной к блоку, поскольку в отсутствие проскальзывания блок и участок нити, находящийся на нем, составляют единое целое.

Аналогичные рассуждения применимы и для правого вертикального участка нити. Для модулей сил, следовательно, имеем

$$T_1 = T_1' ; \quad T_2 = T_2' \quad (\text{П-1})$$

Благодаря нерастяжимости нити модули перемещений грузов на обоих концах нити одинаковы, одинаковы модули скоростей и ускорений грузов, но направления их, конечно, противоположны:

$$\vec{a}_1 = -\vec{a}_2, \quad a_1 = a_2 = a,$$

где a - модуль ускорения каждого груза. Запишем второй закон Ньютона для каждого груза в проекции на ось y , направленную вертикально вниз:

$$\begin{cases} -ma = mg - T_1 & (\text{П-2}) \\ (m + m')a = (m + m')g - T_2 & (\text{П-3}) \end{cases}$$

Рассмотрим теперь силы, действующие на блок. Помимо сил тяжести $m_2 \vec{g}$, сил \vec{T}_1' и \vec{T}_2' , о которых шла речь выше, на него действует сила реакции оси \vec{N} , а также силы трения в оси блока. Детальный анализ этих сил трения очень сложен, поэтому ограничимся рассмотрением упрощенной модели, которая достаточно хорошо подтверждается опытом. Для вращения блока существенны не сами силы трения, а их моменты относительно оси вращения. Можно предположить, что резуль-

тирующий момент сил трения можно представить в виде двух слагаемых: постоянного M_{TP} , и момента M'_{TP} , пропорционального реакции оси N .

Рекомендуем самостоятельно разобраться в возможных механизмах возникновения этих слагаемых. Далее будем считать, что M_{TP} , M'_{TP} — это модули моментов сил трения. Выражение для M'_{TP} будет иметь, следовательно, вид $M'_{TP} = \mathcal{L}N$, где \mathcal{L} — положительная постоянная.

Поскольку центр масс блока покоится, то $\vec{N} + \vec{T}_2' + \vec{T}_2' = 0$. Переходя к модулям сил, получим $N = T_2 + T_2 + m\delta_2 g$, так что $M'_{TP} = \mathcal{L}(T_1 + T_2 + m\delta_2 g)$. Запишем для блока основное уравнение динамики вращательного движения.

$$J\epsilon = T_2' R - T_1' R - M_{TP} - M'_{TP},$$

или, с учетом (1) и выражения для M'_{TP} :

$$J\epsilon = (T_2 - T_1) R - M_{TP} - \mathcal{L}N = (T_2 - T_1) R - M_{TP} - \mathcal{L}(T_1 + T_2 + m\delta_2 g) \quad (\text{II-4})$$

Если нить по блоку не скользит, то модуль скорости грузов равен модулю линейной скорости точек на окружности блока:

$$V = \omega R$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получим следующую связь модуля ускорений грузов a и углового ускорения блока ϵ :

$$a = \epsilon R$$

Тогда (4) можно переписать в виде

$$J \cdot \frac{a}{R} = (T_2 - T_1) R - M_{TP} - \mathcal{L}(T_1 + T_2 + m\delta_2 g) \quad (\text{II-5})$$

Решая систему уравнений (2), (3), (5), находим для модуля ускорений грузов

$$a = \frac{m'g - \frac{J}{R}(2m + m' + m\delta_2)g - \frac{M_{TP}}{R}}{\frac{J}{R^2} + 2m + m' - \frac{J}{R}m'} \quad (\text{II-6})$$

Если система некоторое время движется с ускорением, определяемым формулой (6), а затем перегрузок массой m' снижается, то дальнейшее движение системы будет происходить с ускорением a' , выражение для которого вытекает из (6) при $m' = 0$:

$$a' = \frac{-\frac{J}{R}(2m + m\delta_2)g - \frac{M_{TP}}{R}}{\frac{J}{R^2} + 2m} \quad (\text{II-7})$$

Знак минус показывает, что движение вследствие наличия сил трения будет замедленным. Рассмотрим следующие частные случаи формул (6) и (7).

1. Трением в оси блока можно пренебречь: $\mathcal{L} = 0$, $M_{тр} = 0$. Тогда

$$a = \frac{m'g}{\frac{J}{R^2} + 2m + m'}; \quad a' = 0 \quad (\text{II-8})$$

Движение с перегрузком - равноускоренное, без него - равномерное.

2. Можно пренебречь составляющей силы трения, зависящей от реакции оси (подумайте, что это значит на языке конструктивных особенностей узла крепления блока к оси): $\mathcal{L} = 0$, $M_{тр} \neq 0$.

Тогда из (6), (7) следует

$$a = \frac{m'g - \frac{M_{тр}}{R}}{\frac{J}{R^2} + 2m + m'}; \quad a' = \frac{-\frac{M_{тр}}{R}}{\frac{J}{R^2} + 2m} \quad (\text{II-9})$$

В работе правый груз проходит с перегрузком задаваемый с экспериментатором путь S_1 (этап 1), а затем перегрузок снимается и измеряется время движения на пути S_2 , который также задается экспериментатором (этап 2). Поскольку во всех случаях ускорения a , a' - постоянные величины, справедливы все известные из школьного курса физики кинематические формулы.

В частности, поскольку движение с перегрузком начинается без начальной скорости, скороть правого груза в конце этапа I (она же - начальная скорость для этапа 2) связана с путем S_1 соотношением

$$V_{20} = \sqrt{2aS_1} \quad (\text{II-10})$$

а время движения t_2 на этапе 2 связано с путем S_2 формулой

$$S_2 = V_{20}t_2 + \frac{a't_2^2}{2} \quad (\text{II-11})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Верификация моделей

Любая теоретическая модель реальной экспериментальной ситуации описывает эту ситуацию приближенно, поскольку не учитывает множество реально имеющих место эффектов. Поэтому, естественно, возникает вопросы:

Какие величины характеризуют точность, с которой модель соответствует реальной ситуации и как эти величины найти? Если эти величины найдены, то какими критериями следует руководствоваться при решении вопроса с том, устраивает ли данная модель точность описания?

На эти вопросы и отвечает процедура верификации модели. Не вдаваясь в детали, можно сказать, что верификация модели — это процедура выяснения степени ее соответствия реальной ситуации.

Точность результатов, получаемых в эксперименте, зависит от многих факторов: методики и условий измерений, измерительных инструментов и т.д. Поскольку, однако, любые косвенные измерения предполагают наличие некоторой модели, то точность получаемых результатов не может превышать точность, с которой модель соответствует реальной ситуации. Иначе говоря, если модель грубая, то при любой, сколь угодно высокой точности измерений и изопределенной методике обработки результатов, косвенно измеряемые величины будут определены грубо.

Итак, первая задача процесса верификации модели — установить нижний предел относительности погрешности косвенно определяемых в данной модели величин.

Разумеется, реальные погрешности будут больше из-за несовершенства приборов и других факторов. В любой модели выдвигаются гипотезы о возможности пренебрежения некоторыми эффектами. Оправданность этих предположений, обычно оценивается с помощью критериев согласия, например, критерия χ^2 (Пирсона).

Вторая задача процесса верификации состоит в установлении уровня значимости принимаемых моделью гипотез.

Заметим, наконец, что довольно неразумно использовать очень точную, а значит, и сложную модель, если измерительная процедура и инструменты грубы. Справедливо и обратное утверждение: неразумно, располагая точными измерителями и инструментами, использовать грубые модели.

Третья задача процесса верификации состоит в согласовании точности принимаемой для описания ситуации модели с возможностями измерительной процедуры.

УДК 53 (076.5)

Изучение законов и определение характеристик поступательного и вращательного движения на машине Атвуда (методические указания).
Брест, БрПИ, 1990

В методических указаниях представлена лабораторная работа М-2, посвященная изучению основных законов динамики поступательного и вращательного движения.

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей и всех форм обучения в БрПИ.

Авторы: В.Я. Хуснутдинова, доцент, к.ф.-м.н., Л.И. Яромская, ассистент, Н.И. Чопиц, доцент.

Рецензент: Косарев В.М., канд. физ.-мат. наук, доцент БрПИ

Рекомендовано кафедрой физики
к публикации на ротапринте
БрПИ 90.10.17

© Брестский политехнический институт, 1990

5. Вопрос 6 модели 1
6. Вопрос 7 модели 1
7. Вопрос 8 модели 1
8. Почему способ определения $M_{тр}$, основанный на нахождении минимальной массы перегрузка, приводящего систему в движение, является довольно грубым?
9. Определите скорости грузов в конце заданного перемещения на основе закона изменения механической энергии ($M_{тр} \neq 0$).

Л и т е р а т у р а :

1. Савельев Н.В. Курс физики. т.1. Механика. Молекулярная физика. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. - 352 с. §§ 28-33.
2. Детлаф А.А. и Яворский Б.М. Курс физики. - М.: Высш. шк., 1989. - 603 с. §§ 4.1-4.3.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Хуснутдинова Венера Ямалетдиновна
Яромская Людмила Ивановна
Чопчиц Николай Иванович

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

по курсу "Физики". Механика.

Изучение законов и определение характеристик поступательного и вращательного движения на машине Атвуда
/ Методические указания /

Ответственный за выпуск В.Я.Хуснутдинова.

Редактор Т.В.Строкач

Подписано к печати 2.06.90 г. Бумага писч. Печать офсетная.
Формат 60x84/16. Зсл. п. л. 1,4. Уч. изд. л. 1,5. Тираж 200 экз.
Заказ № 635. Бесплатно. Отпечатано на роталпринте Брестского
политехнического института. 224017, Брест, ул. Московская, 257.