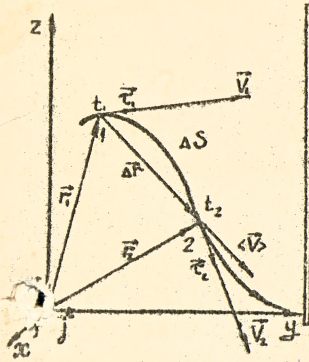


Министерство высшего
и среднего специального
образование БССР

Брестский
инженерно-строительный
институт

кафедра физики

# ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

## по курсу физики

Часть I. Физические основы механики
Фронтальная лабораторная работа №1

## „Изучение теории погрешностей и кинематики материальной точки."

(Методические указания)

Брест

1987

БРЕСТСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ

# ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

по курсу физики

Часть I. Физические основы механики.

Фронтальная лабораторная работа № I

"Изучение теории погрешностей и кинематики материальной точки".

(методические указания)

Утверждены Ученым советом
механического факультета
1987.II.19
протокол № 

Утверждаю

Брест, 1987

УДК 53 (076.5)

Лабораторные работы по курсу физики. Часть I.

Физические основы механики. Фронтальная лабораторная работа № I "Изучение теории погрешностей и кинематики материальной точки" (методические указания).

Брест, БИСИ, 1987.

В методических указаниях изложены основы теории погрешностей в рамках физического практикума курса общей физики технических вузов. Даны практические указания к методике измерений и обработке результатов. Сформулированы задания для самостоятельной работы студентов, а также контрольные вопросы и литература.

Методическое пособие составлено в соответствии с типовой программой курса физики для инженерно-технических специальностей вузов. Предназначены для студентов дневной, вечерней и заочной форм обучения БИСИ.

Рассмотрена на научно-методическом семинаре кафедры физики 87.10.23.

Рекомендована кафедрой физики к публикации на ротапринте БИСИ 87.10.23 протокол № 4.

Авторы: Гладыщук А.А., Луценко Е.В., Чопчиц Н.И.

Рецензенты: кафедра физики БГПИ им. А.С.Пушкина, доцент БГПИ, к.ф.-м.н. Косарев В.М.

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № I

# ИЗУЧЕНИЕ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ И КИНЕМАТИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

I. Цель работы: Изучение основ теории погрешностей и методов обработки экспериментальных результатов. Определение кинематических характеристик по стробоскопическим фотографиям.

П. Приборы и принадлежности: стробоскопические фотографии, линейка, карандаш.

## Ш. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ:

### а) Измерения. Погрешности измерений.

Основным методом получения информации об изучаемых явлениях в физике является опыт, то есть наблюдение явления в точно контролируемых условиях, позволяющих следить за его ходом и воссоздавать необходимое число раз при повторении этих условий. Количественную информацию о явлении дает измерение - нахождение значений физических величин, характеризующих явление, опытным путем с помощью специальных технических средств. В учебных лабораториях чаще всего используются два вида измерений: прямые и косвенные.

Прямыми называются измерения, в которых значение измеряемой величины находится непосредственно из отсчета по шкале прибора. Вычисления при этом сводятся к учету цены деления прибора или других переводных множителей.

Примеры: измерение длины линейкой, штангенциркулем, времени секундомером, массы - весами, тока - амперметром и т.д.

Косвенными называются измерения, при которых интересующая величина находится как функция одной или нескольких прямым образом измеряемых величин.

Примеры: определение плотности вещества по массе и объему, емкости конденсатора по его заряду и напряжению между обкладками и т.д.

Каковы бы ни были способы и методы измерения, измеренное значение $x_{изм.}$ физической величины $x$ почти всегда отличается от её истинного значения $x_{ист.}$

Ошибкой измерения называется разность

$$\delta x = x_{\text{изм.}} - x_{\text{ист.}} \qquad (\mathrm{I.I})$$

Ошибки измерения систематизируются по двум основным признакам: месту возникновения и характеру проявления, следующим образом:

ошибки измерений

| | | | |
|---|---|---|---|
| методические | приборные | личные | ← по месту возникновения |
| систематические | случайные | промахи | ← по характеру проявления |

Методическими ошибками называют ошибки, возникающие из-за несовершенства методов измерения и обработки результатов. Например, часто пренебрегают трением, сопротивлением соединительных проводов и измерительных приборов и т.д.

Приборными ошибками называют ошибки, обусловленные несовершенством (ограниченной точностью) применяемых средств измерения.

Личные ошибки обусловлены индивидуальными особенностями экспериментатора, несовершенством его органов чувств и проявляются, например, в неправильном отсчитывании десятых долей шкалы прибора.

Систематическими ошибками называются ошибки, величина и знак которых от опыта к опыту сохраняются или изменяются закономерно. Они называются постоянно действующими причинами, односторонне влияющими на результат измерений, например, неправильной градуировкой прибора или его установкой, несовершенством методики измерений и т.д.

Случайными ошибками называются ошибки, величина и знак которых от опыта к опыту изменяется непредсказуемым образом. Они вызываются, как правило, большим количеством одновременно действующих причин, влияние которых на процедуру измерения неупорядочено и не может быть учтено заранее (вибрации, колебания температуры, движение воздуха, колебания напряжения в сети, люфт и трение в измерительных приборах и т.д.). При наличии случайных ошибок единичное измерение недопустимо!

Промахами называются грубые ошибки, возникающие вследствие неправильных действий экспериментатора (небрежность или описка при записи результатов, неправильно снятое показание прибора и т.д.) Наблюдения, содержащие промахи, отбрасываются, как не заслуживающие доверия. Наличие ошибок измерения приводит к следующему правилу:

Кроме измеренного значения физической величины должна указываться и возможная величина ошибки.

Поскольку истинное значение измеряемой величины в (I.I) неизвестно, неизвестна и ошибка измерения $\delta x$. Для оценки возможной величины ошибки $\delta x$ вводится понятие погрешности $\Delta x$.

Погрешность $\Delta x$ измерения - это количественная мера неизвестной экспериментатору ошибки измерения $\delta x$. Количественно $\Delta x$ можно задать как наибольшую возможную по модулю ошибку, так чтобы выполнялось неравенство:

$$|\delta x| \leqslant \Delta x \qquad (I.2)$$

Тогда из (I.I) и (I.2) следует, что истинное значение измеряемой величины лежит в интервале

$$x_{изм} - \Delta x \leqslant x_{ист} \leqslant x_{изм} + \Delta x$$

$$\text{или} \qquad x_{ист} = x_{изм} \pm \Delta x. \qquad (I.3)$$

Опыт, однако, показывает, что нерационально, а часто и невозможно выбирать $\Delta x$ столь большим, чтобы неравенства (I.2) и (I.3) выполнялись абсолютно надежно. Действительно, чем больше $\Delta x$, тем менее ценным является результат. Например, результат измерения длины маятника $L$ =(108 ± 50) см несомненно надежное результата $L$ =(108 ± I)см, однако ценность первого результата значительно ниже ценности второго. Поэтому величину $\Delta x$ задают так, чтобы неравенства (I.2) и (I.3) выполнялись с некоторой вероятностью $P$. В учебных лабораториях принимают $P$ = 0,95. Это означает, что при многократном повторении опыта в одних и тех же условиях в среднем в 95 случаях из 100 ошибки не превысят $\Delta x$.

Основная задача физического измерения состоит в том, чтобы указать интервал, внутри которого с заданной наперед вероятностью находится истинное значение искомой величины.

Интервал значений величины $x$, заданный соотношением (I.3), называется доверительным интервалом, а вероятность $P$ - доверительной вероятностью или надежностью, соответствующей этому доверительному интервалу.

По способу учета в лабораторном практикуме погрешности делятся на 4 типа: поправки $-\Delta x_{попр.}$, погрешности разброса $-\Delta x_{разб}$, приборные погрешности $-\Delta x_{пр.}$, погрешности отсчета и округления $-\Delta x_{окр.}$.

Поправки вводятся тогда, когда известна или найдена величина и знак систематической ошибки. Например, если известна неточность градуировки прибора (указана в паспорте или графике поправок), то на нее вводится поправка.

Погрешности разброса учитывают те случайные ошибки, которые приводят к разбросу результатов около некоторого среднего значения при многократном повторении опыта в неизменных условиях.

Погрешности приборов учитывают неизвестные экспериментатору систематические ошибки конкретного прибора, связанные с его конструктивными особенностями.

Погрешности отсчета и округления учитывают те случайные ошибки, которые вызваны несовершенством органов чувств экспериментатора и округлением результатов.

Величина погрешности $\Delta x$ (она называется абсолютной) не всегда удобна для характеристики точности измерений и получаемых результатов. Например, если абсолютная погрешность измерения длины $\Delta l \approx 1$ мм, а измеряемая длина составляет несколько метров, то точность измерений хорошая, а если измеряемая длина всего несколько миллиметров, то точность будет уже плохой. В связи с этим, а также из-за неудобства сравнения точности измерения разных величин, например, длины и времени, вводят относительную погрешность измерения, которую обычно выражают в процентах

$$E = \frac{\Delta x}{x_{ист}} \approx \frac{\Delta x}{x_{изм}} \quad \text{или} \quad E \approx \frac{\Delta x}{x_{изм}} \cdot 100\% . \qquad (1.4)$$

## б) ПОГРЕШНОСТИ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ.

Будем считать далее, что поправки на известную систематическую погрешность уже учтены. Единичное измерение величины называют наблюдением.

Пусть произведено $n$ наблюдений величины $x$ в неизменных условиях и получены результаты $x_1$, $x_2$ ... $x_n$. В качестве наиболее вероятного значения величины $x$ принимается среднее арифметическое значений, найденных в отдельных наблюдениях:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \qquad (1.5)$$

Пусть $\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle$ – случайное отклонение результата $i$ -го измерения от среднего, то величину

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} \qquad (1.6)$$

называют средней квадратичной погрешностью отдельного наблюдения.

В теории вероятностей и математической статистике доказывается, что случайные отклонения результатов отдельных наблюдений от среднего, то есть $\Delta x_i$, в хорошо проведенном опыте не должны превосходить $3S$. Если в каком-то наблюдении получено $\Delta x_i > 3S$, то это наблюдение должно считаться промахом. Величина

$$S_n = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} \qquad (1.7)$$

называется средней квадратичной погрешностью всей серии $n$ наблюдений. В математической статистике доказывается, что погрешность разброса связана с $S_n$ соотношением

$$\Delta x_{разб} = t_{n;p} \cdot S_n , \qquad (I.8)$$

где множитель $t_{n,p}$ называется коэффициентом Стьюдента. Индекс у коэффициента указывает число опытов, а индекс $P$ – доверительную вероятность. Поскольку в лабораторном практикуме принята доверительная вероятность $P$ = 0,95, то приведем значение коэффициентов $t_{n;0,95}$ для этой вероятности:

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | I0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_{n;0,95}$ | I,60 | 0,82 | 0,77 | 0,74 | 0,73 | 0,72 | 0,7I | 0,7I | 0,70 |

Из таблицы видно, что чем больше проведено измерений, тем уже доверительный интервал, то есть тем точнее измерение.

Погрешность прибора $\Delta x$ в прямых измерениях учитывается следующим образом. Для каждого типа приборов предприятие-изготовитель гарантирует на уровне доверительной вероятности $P$ = 0,997 некоторую предельную погрешность $\Delta$ пред.. Значения $\Delta$ пред. для наиболее часто используемых мер и приборов указаны в таблице, находящейся в лаборатории. Поскольку в учебной лаборатории ограничиваются значением доверительной вероятности $P$ =0,95, то принимается

$$\Delta x_{пр} = \frac{2}{3}\Delta_{пред} . \qquad (I.9)$$

Погрешность отсчета и округления $\Delta x_{окр.}$ при доверительной вероятности $P$ = 0,95 может быть принята равной половине цены деления шкалы прибора при округлении до целого деления и 0,3 от цены деления $h$ при округлении до половины деления. Полная абсолютная погрешность прямого измерения рассчитывается по формуле

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x^2_{разб} + \Delta x^2_{окр} + \Delta x^2_{пр}} . \qquad (I.I0)$$

Окончательный результат записывается в виде

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x \qquad (I.II)$$

и имеет надежность на уровне $P$ = 0,95.

### в) ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ.

При косвенных измерениях интересующая нас физическая величина $y$ задается как функция прямым образом измеряемых физических величин $x_1 , x_2 \ldots x_n ; y = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$. Наиболее вероятное значение величины $y$, то есть результат косвенного измерения, находится следующим образом:

$$y_{изм} = f(\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \ldots, \langle x_n \rangle). \qquad (I.12)$$

Поскольку каждая из величин $\langle x_i \rangle$ ($i = 1,2\ldots n$) определена с погрешностью $\Delta x_i$, то и величина $y$ изм., вычисленная по формуле (I.12), также будет найдена с некоторой погрешностью, которая вычисляется по формуле:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}/_{\langle x_1 \rangle} \Delta x_1\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}/_{\langle x_n \rangle} \Delta x_n\right)^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}/_{\langle x_i \rangle} \Delta x_i\right)^2} \qquad (I.13)$$

где $\partial f/\partial x_i/_{\langle x_i \rangle}$ – частные производные функции (I.12) по аргументам $x_i$, вычисленные при средних значениях $\langle x_i \rangle$. Доверительная вероятность для погрешности $\Delta y$ будет равна $P = 0{,}95$ при условии, что она имеет такое значение для каждой из погрешностей $\Delta x_i$.

Относительная погрешность косвенной величины $y$ равна:

$$E_y = \frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial x_i}/_{\langle x_i \rangle} \Delta x_i\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \ln y}{\partial x_i}/_{\langle x_i \rangle} \Delta x_i\right)^2}. \qquad (I.14)$$

г) ГРАФИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ.

Выбор координатных осей. По оси абсцисс всегда откладывается аргумент, по оси ординат – функция.

Выбор масштаба . При выборе масштаба необходимо придерживаться следующих рекомендаций:

I) шкалы на всех осях должны легко читаться, поэтому одна клеточка миллиметровой бумаги должна соответствовать удобному числу единиц измеряемой величины (I,2,5,I0...) ;

2) экспериментальные точки не должны сливаться друг с другом ;

3) масштабы вдоль осей следует выбирать так, чтобы основная часть графика имела наклон, близкий к $45^\circ$ и лежала в средней части между осями ;

4) если на графике необязательно иметь начало координат, начало и конец разметки по осям должны соответствовать минимальным и максимальным значениям аргумента и функции ;

5) десятичные множители удобнее отнести к единице измерения, тогда деления на осях будут помечены цифрами I,2,3 и т.д., а не I0000, 20000 или 0,00I ; 0,002.

Построение графиков. На график наносятся все полученные в измерениях точки (выносные линии не проводятся). Через экспериментальные точки проводится наилучшая плавная кривая. Непосредственное соединение экспериментальных точек ломаной линией не допускается. Точки должны располагаться как можно ближе к кривой так, чтобы по обе стороны от нее находилось по возможности одинаковое число точек.

Нанесение ошибок на график. Ошибка в экспериментальном значении указывается в виде крестиков, размеры которых в выбранном масштабе дают удвоенное значение погрешностей в этом масштабе. Кривая графика должна пересекать прямоугольники, образованные крестиками погрешностей.

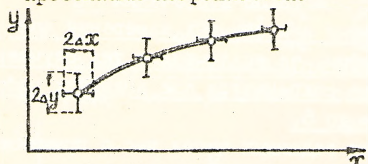

Рис. I.

Оформление графиков. Каждый график выполняется на миллиметровой бумаге, снабжается заголовком, содержащим точное описание зависимости, показываемой на нем, и вклеивается в отчет.

д) ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ.

Значащими цифрами числа называются все его цифры, кроме нуля, если он стоит вначале. Пример: 0,03010 - 4 значащие цифры.

Общее правило - при вычислении сумм, разностей, произведений, частных результат не должен содержать больше значащих цифр, чем наименее точное из слагаемых, сомножителей и т.д.

При вычислении функций ограничиваются числом значащих цифр аргумента. Если результат вычисления является промежуточным и используется при дальнейших вычислениях, нужно сохранить в нем на одну значащую цифру больше, чем это требуется предыдущим правилом. Если в вычисляемое выражение входят постоянные типа $\pi$ , $\gamma$ , константы приборов и т.п., следует для них брать значащих цифр на одну больше, чем в самом неточном из участвующих в выражении чисел. Это делается для того, чтобы вычисления с постоянными не вносили дополнительной ошибки.

Если это по каким-либо причинам невозможно (например, значение постоянной прибора недостаточно точно известно), то соответствующую константу в выражении для физической величины следует рассматривать наравне с другими переменными и в окончательное выражение для физической величины будет входить погрешность соответствующей константы.

Абсолютную погрешность следует всегда выражать в тех же единицах, что и саму измеряемую величину. Например, $L = (1,572 \pm 0,004)$ м, но не $L = 1,572 \pm 4$ мм. Число и его погрешность всегда записываются так, чтобы их последние цифры принадлежали к одному и тому же десятичному разряду. Нельзя писать $24 \pm 0,2$ или $21,62 \pm 0,3$. Правильная запись $24,0 \pm 0,2$ или $21,6 \pm 0,3$.

Нуль писать так же обязательно, как и любую другую цифру: 25,30 ± 0,02, но не 25,3 ± 0,02.

Приближенные числа рекомендуется представлять в нормальном виде, для чего первая значащая цифра записывается в разряде единиц, а остальные - в разряде десятых, сотых и т.д. долей. Например: $a$ =(3,56 ± 0,04)·I0$^{-9}$ м = (3,56 ± 0,04) нм

Вычисленные погрешности прямых и косвенных измерений должны округляться до одной значащей цифры, за исключением тех случаев, когда она равна I - в этом случае сохраняется две значащих цифры, причем вторая из них округляется до 5.

При записи констант и других заданных чисел часто применяется неявный способ указания их погрешностей: выписываются только надежно известные значащие цифры числового значения, а ненадежные отбрасываются с применением обычных правил округления. Например, запись $L$ = I,2 м читается как $L$ =(I,20 ± 0,05) м и т.д.

## IУ. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

Материальной точкой называется тело, размерами, структурой и внутренними движениями которого в данных условиях при описании движения можно пренебречь.

Системой отсчета (СО) называется совокупность тела отсчета, относительно которого рассматривается движение других тел, линеек и часов. Прежде чем говорить о движении и его описывать, нужно выбрать СО.

Кинематика изучает геометрические формы и типы движений безотносительно к причинам, их вызывающим. Все СО кинематически эквивалентны в смысле возможности выбрать любую из них для описания движения.

Геометрическим изображением СО является система координат (СК) В декартовой прямоугольной СК движение точки описывается заданием вектор-функции

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\,, \qquad (I.I5)$$

выражающей зависимость радиус-вектора движущейся точки от времени. Задание вектор-функции (I.I5) эквивалентно заданию трех функций, описывающих зависимость от времени координат точки:

$$x = x(t)\,;\; y = y(t)\,;\; z = z(t). \qquad (I.I6)$$

Выражения (I.I5) и (I I6) называются кинематическим законом движения точки. Траекторией точки в данной СО называется кривая, описываемая точкой при движении. Уравнение траектории получается из (I.I6) путем исключения времени $t$ .

Вектором перемещения $\Delta\vec{r}$ за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ называется вектор, равный (рис. 2)

$$\Delta\vec{r} \overset{def}{=} \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \qquad (I.I7)$$

Путь $\Delta S$, пройденный точкой за промежуток времени $\Delta t$, определяется как длина дуги между точками I и 2

$$\Delta S \overset{def}{=} L(\overset{\frown}{1,2}). \qquad (I.I8)$$

Вектором средней скорости $\langle\Delta\vec{V}\rangle$ называется величина (рис.2)

$$\langle\Delta\vec{V}\rangle \overset{def}{=} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}. \qquad (I.I9)$$

Вектор мгновенной скорости $\vec{V}$ характеризует быстроту изменения радиус-вектора точки в данный момент времени и определяется

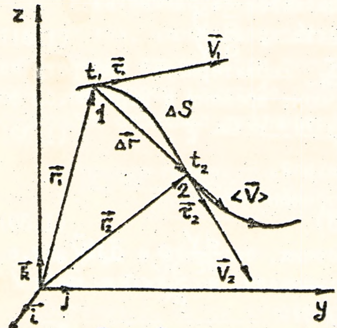


Рис. 2

равенством

$$\vec{V} \overset{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \langle\vec{V}\rangle = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (I.20)$$

Проекции этого вектора на координатные оси равны

$$V_x = \frac{dx}{dt}; \; V_y = \frac{dy}{dt}; \; V_z = \frac{dz}{dt}. \qquad (I.20)$$

Тогда $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$ (I.2I)

и модуль вектора скорости:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \qquad (I.2I)$$

Вектор $\vec{V}$ направлен по касательной к траектории в сторону движения точки (рис. 2). Движение точки можно задать и иначе: задается уравнение траектории, положение точки на траектории в начальный момент времени $t = 0$ и зависимость пройденного пути от времени $S = S(t)$. Такой способ задания движения принято называть естественным. Тогда модуль вектора скорости определяется равенством

$$V = \frac{dS}{dt}, \qquad (I.22)$$

а сам вектор записывается в виде: $\vec{V} = V \cdot \vec{\tau}$, (I.23)

где $\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной ($|\vec{\tau}| = 1; \vec{\tau} = \frac{\vec{V}}{V}$).

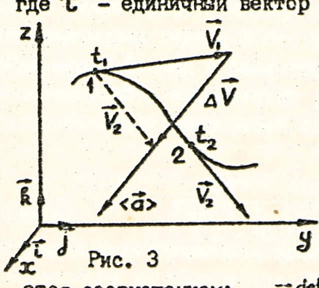


Рис. 3

Направляющие косинусы вектора скорости: $\cos(\vec{V},\vec{i}) = V_x/V$;

$$\cos(\vec{V},\vec{j}) = V_y/V; \; \cos(\vec{V},\vec{k}) = V_z/V. \qquad (I.24)$$

Вектор среднего ускорения $\langle\vec{a}\rangle$ определяется равенством (рис. 3)

$$\langle\vec{a}\rangle \overset{def}{=} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\Delta t}. \qquad (I.25)$$

Вектор мгновенного ускорения $\vec{a}$ характеризует быстроту изменения вектора скорости в данный момент и определяется соотношением:

$$\vec{a} \overset{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \langle\vec{a}\rangle = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (I.26)$$

Проекции вектора ускорения на координатные оси:

$$a_x=\frac{dV_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2};\; a_y=\frac{dV_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2};\; a_z=\frac{dV_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (I.27)$$

Тогда $$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k} \qquad (I.28)$$

и модуль вектора ускорения

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \qquad (I.29)$$

Направляющие косинусы вектора ускорения

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}})=\frac{a_x}{a};\; \cos(\widehat{\vec{a},\vec{j}})=\frac{a_y}{a};\; \cos(\widehat{\vec{a},\vec{k}})=\frac{a_z}{a}. \qquad (I.30)$$

Угол между векторами $\vec{V}$, $\vec{a}$ определяется из равенства

$$\cos(\widehat{\vec{V},\vec{a}})=\frac{a_xV_x+a_yV_y+a_zV_z}{aV}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{V}}{a\cdot V}. \qquad (I.31)$$

Тангенциальное ускорение точки $\vec{a}_\tau$ характеризует быстроту изменения модуля скорости в данный момент времени и выражается формулой

$$\vec{a}_\tau=\frac{dV}{dt}\vec{\tau}=\frac{V_xa_x+V_ya_y+V_za_z}{V}\vec{\tau}, \qquad (I.32)$$

где $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной.

Очевидно, имеет место также равенство

$$\vec{a}_\tau=\vec{\tau}\cdot a\cdot\cos(\widehat{\vec{V},\vec{a}}). \qquad (I.33)$$

Если $V$ возрастает с течением времени, то $\frac{dV}{dt}>0$ и $\vec{a}_\tau\uparrow\uparrow\vec{V}$, т.е. $(\widehat{\vec{V},\vec{a}})$ – острый угол, если $V$ убывает, то $\frac{dV}{dt}<0$ и $\vec{a}_\tau\uparrow\downarrow\vec{V}$, т.е. $(\widehat{\vec{V},\vec{a}})$ – угол тупой (рис. 4).

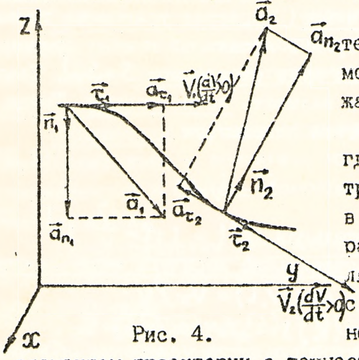


Рис. 4.

Нормальное ускорение $\vec{a}_n$ характеризует быстроту изменения в данный момент направления вектора $\vec{V}$ и выражается формулой

$$\vec{a}_n=\frac{V^2}{R}\vec{n}, \qquad (I.34)$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к траектории ($\vec{\tau}\cdot\vec{n}=0$), направленный в сторону вогнутости траектории, $R$ – радиус кривизны траектории, представляющий собой радиус соприкасающейся с траекторией в данной точке окружности, совпадающей с бесконечно малым элементом траектории с точностью до бесконечно малых второго порядка малости.

Полное ускорение можно записать в виде:

$$\vec{a}=\vec{a}_n+\vec{a}_\tau \quad \text{и} \quad a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}. \qquad (I.35)$$

Удобным способом нахождения всех кинематических характеристик движения точки является способ, основанный на использовании стробоскопических фотографий движущейся точки. Стробоскопические фотографии получаются, если движущуюся точку фотографировать на один и тот же кадр через строго фиксированные промежутки времени $\tau$, называемые периодом стробоскопирования. Время открытия затвора при этом должно быть малым для того, чтобы за это время фотографируемая точка заметно не сдвинулась и ее изображение не смазалось. Применяется также вариант фотографирования в темноте с открытым затвором, а движущийся объект освещается короткими мощными импульсами света, следующими друг за другом через время $\tau$. На фотографиях указывается обычно масштаб расстояний и период $\tau$. Если движение точки происходит по пространственной кривой, то лучше как минимум две фотографии, снятые фотоаппаратами с разных позиций. Если движение происходит в плоскости, то фотоаппарат располагают так, чтобы плоскость пленки была параллельна этой плоскости. Можно считать при этом, что на фотографии в неискаженном виде в некотором масштабе получается картина движения точки. На фотографии стрелкой указывается также направление движения точки.

## У. ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПО СТРОБОСКОПИЧЕСКИМ ФОТОГРАФИЯМ

На рис. 5 приведена стробоскопическая фотография движения материальной точки и указаны координатные оси.

Задание I. Найти кинематический закон движения точки.

Спроецируем точки на координатные оси с учетом масштаба и выпишем таблицу значений (табл. I) координат точки, считая, что фотографирование началось при $t = 0$. Измерения координат $x$ и $y$ прямые, поэтому оценим их погрешности по методике, изложенной в пункте б). Поскольку в данном случае нет особого смысла много раз измерять координаты, ибо мы будем получать все время один и тот же результат, то следует положить $\Delta x_{разбр.} = \Delta y_{разбр.} = 0$. Это не значит, конечно, что случайных ошибок нет - просто они меньше точности используемых инструментов. Приборная погрешность при измерениях стандартной линейкой длиной 200 мм составляет $\Delta x_{приб.} = 0{,}2 \cdot \frac{2}{3} = 0{,}13$ мм. Погрешность отсчета и округления при округлении координат до I мм составит 0,5 мм. Следует также учесть неидеальность процедуры проектирования, которая также приводит к погрешности отсчета и округления и составляет примерно 0,5 мм (подумайте, почему!). Результирующая погрешность с учетом масштаба будет равна по формуле (1.10):

$$\Delta y = \Delta x = 10\sqrt{(0{,}13)^2 + (0{,}5)^2 + (0{,}5)^2} = 7{,}3 \text{ мм}$$

(множитель 10 за счет масштаба).

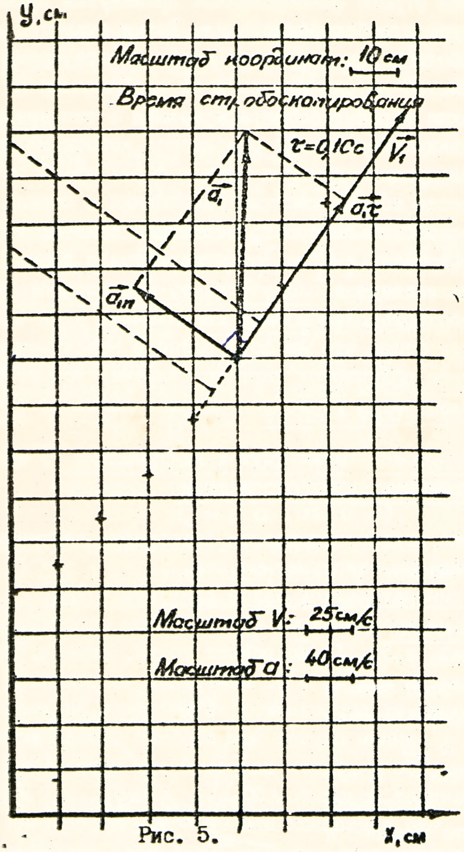


Рис. 5.

Поскольку отсчеты $x$ и $y$ округлялись до целых сантиметров, то следует положить $\Delta x = \Delta y$ = I0 мм=Iсм. Для установления вида функциональной зависимости $x = x(t)$ изобразим данные табл. I на рис. 6, откладывая время $t$ по горизонтали, а координату $x$ - по вертикали (в том же масштабе, что и на рис.5, руководствуясь при этом правилами, изложенными в пункте д). (рис.6).

При этом учитываем, что погрешность $\Delta t$ задана неявно (она равна 0,0005с) Из рис. 6 сразу видно, что искомая функциональная зависимость $x = x(t)$ линейная. Задача, следовательно, состоит в том, чтобы провести по точкам рис.6 прямую, наилучшим в некотором смысле образом соответствующую этим точкам. Можно, конечно, это сделать графически, однако это не дает полной уверенности в том, что прямая - наилучшая.

Таблица I.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$, с | 0 | 0,10 | 0,20 | 0,30 | 0,40 | 0,50 | 0,60 | 0,70 | 0,80 | 0,90 | 1,00 |
| $x$, см | 0 | 11 | 19 | 29 | 41 | 51 | 59 | 71 | 79 | 91 | 100 |
| $y$, см | 50 | 57 | 64 | 74 | 85 | 100 | 116 | 134 | 153 | 176 | 200 |

Одним из способов аналитического решения задачи о нахождении наилучшей прямой, соответствующей экспериментальным точкам, является метод наименьших квадратов.

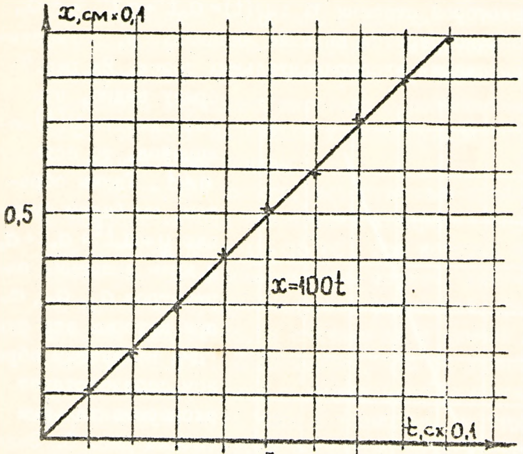


Рис. 6.

Идея метода состоит в следующем. Пусть уравнение искомой прямой имеет вид $x = at + b$ , где $a$ и $b$ - постоянные, подлежащие определению. При каждом значении времени $t_i$ (0,1...10) найдем величину $(at_i + b - x_i)^2$ , представляющую квадрат разности между экспериментальным значением величины $x_i$ и значением ( $at_i + b$ ), вычисленным по формуле, выражающей ожидаемую линейную зависимость. Образуем, далее, сумму $S = \sum_{i=0}^{n}(at_i + b - x_i)^2$. Прямая $x = at + b$ будет соответстсовать экспериментальным точкам наилучшим образом, если мы найдем такие значения $a$ и $b$ , при которых достигается минимум суммы $S$ . Условия минимума имеют вид $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$; $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$, что дает систему уравнений: $\sum_{i=0}^{10} t_i(at_i + b - x_i) = 0$ и $\sum_{i=0}^{10}(at_i + b - x_i) = 0$ . Подставляя численные значения, получим (выражаем $x$ в см.): $0{,}10(0{,}10a + b - 11) + 0{,}20(0{,}20a + b - 19) + \ldots + 1{,}00(1{,}00a + b - 100) = 0$ и $(0{,}10a + b - 11) + (0{,}20a + b - 19) + \ldots + (1{,}00a + b - 100) = 0$.

Решая систему и округляя значения $a$ и $b$ до трех значащих цифр (с такой точностью заданы $x$ и $t$), получим $a = 100$, $b = 0$. Таким образом, искомая зависимость $x = x(t)$ имеет вид

$$x = 100\,t \quad (\text{см}). \qquad (1.36)$$

Для нахождения вида функциональной зависимости $y = y(t)$ поступим аналогично, изобразив данные табл. 1 на координатной плоскости ( $y$ ; $t$ ) (рис. 7).

Из рис. 7 не вытекает, однако, с определенностью предположение о виде зависимости $y(t)$. В таких случаях обычно выдвигаются гипотезы о том, какому классу функций (полиномов, показательных, тригонометрических и т.д.) принадлежит искомая зависимость, а затем эти гипотезы принимаются или отвергаются. Чаще всего вначале выдвигается гипотеза о принадлежности неизвестной функции $y(t)$ к классу полиномов некоторой степени $n$ : $y(t)=a_0t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_n$ . Степень $n$ полинома обычно берется вначале минимальной, совместимой с характером расположения экспериментальных точек. Из рис.7

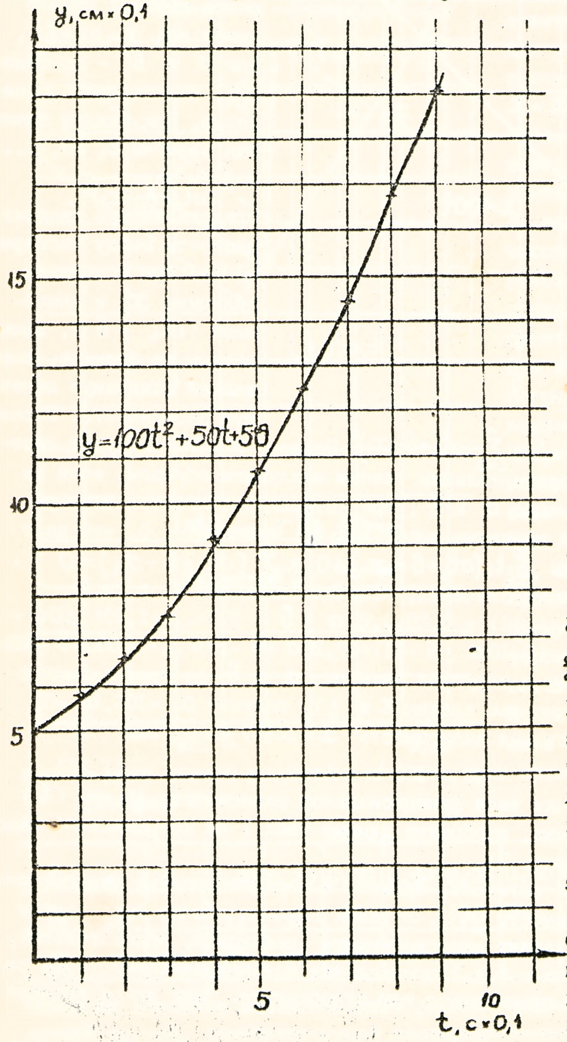


Рис. 7.

сразу видно, что зависимость $y(t)$ нелинейна, то есть $n\neq 1$ . Таким образом, мы берем функцию $y=a_0t^2+a_1t+a_2$ и ищем значения параметров $a_1$, $a_2$, $a_0$, при которых эта функция наилучшим образом соответствует экспериментальным точкам рис. 6. Задача решается на основе метода наименьших квадратов. Условия минимума суммы $S=\sum\limits_{i=0}^{10}(a_0t_i^2+a_1t_i+a_2-y_i)^2$ дают

$$\frac{\partial S}{\partial a_0}=2\sum_{i=0}^{10}t_i^2(a_0t_i^2+a_1t_i+a_2-y_i)=0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1}=2\sum_{i=0}^{10}t_i(a_0t_i^2+a_1t_i+a_2-y_i)=0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2}=2\sum_{i=0}^{10}(a_0t_i^2+a_1t_i+a_2-y_i)=0.$$

Подставляя численные значения и решая систему уравнений, находим после округления $a_0$ =100 ; $a_1$ =50; $a_2$ =50. Таким образом, $y=100t^2+50t+50$ . (I.37)

Следует, однако, помнить, что предположение о полиноминальной зависимости $y$ от $t$ является лишь гипотезой. Ведь вполне возможно, что функция вида $y = a b^{\beta t} + c$, где постоянные подобраны с помощью метода наименьших квадратов, или полином степени большей 2 значительно лучше соответствуют экспериментальным точкам рис. 7. Иными словами, возникает вопрос, насколько оправдана гипотеза о полиноминальной зависимости степени 2, то есть насколько хорошо функция (I.37) соответствует экспериментальным точкам.

На первый взгляд, естественным представляется следующий путь. С помощью метода наименьших квадратов определим значения $a$, $b$, $c$ для функции вида $y = a b^{\beta t} + c$, при которых она наилучшим образом соответствует экспериментальным точкам, затем для этих значений $a$, $b$, $c$ вычислим сумму квадратов разностей, фигурирующих в методе наименьших квадратов, и сравним ее с суммой для полиноминальной зависимости (I.37). Естественно, что та зависимость, для которой эта сумма меньше, лучше отвечает экспериментальным точкам. Ясно, однако, что этот путь хотя и возможен, но трудоемок и малоперспективен, поскольку существует множество функций времени, которые могли бы, в принципе, соответствовать экспериментальным точкам рис. 5, например, зависимость $y = A \sin(Bt + C) + D$ с надлежаще подобранными константами $A$, $B$, $C$, $D$. Поэтому вопросы совместимости гипотезы о той или иной зависимости (в нашем случае зависимости I.37) с экспериментальными данными решаются с помощью так называемых критериев согласия (другое название - критерии значимости). Одним из наиболее удобных критериев является так называемый "критерий $\chi^2$" (читается хи-квадрат) или критерий Пирсона. В методе $\chi^2$ вычисляется величина

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=0}^{n} (a_0 t_i^2 + a_1 t_i + a_2 - y_i)^2}{(\Delta y)^2} . \tag{I.38}$$

При найденных методом наименьших квадратов значениях $a_0 = 100$, $a_1 = 50$, $a_2 = 50$, то есть сумма квадратов отклонений экспериментальных значений $y_i$ от вычисленных по формуле (I.37), деленная на квадрат погрешности измерения величины $y$. В нашем случае $\chi^2 = 3{,}0$. Найденное значение $\chi^2$ должно быть сопоставлено с теорией. Это делается с помощью таблицы распределения $\chi^2$, фрагмент которой приведен в табл. 2. В данной таблице $n$ - это число степеней свободы распределения $\chi^2$, равное числу измерений минус увеличенное на единицу число параметров, определяемых из эксперимента. В нашем случае число измерений равно II и с помощью метода наименьших квадратов было определено 3 параметра, так что $n$ = II - - (3 + I) = 7. Число $P$ в таблице - вероятность, выражаемая в процентах. По найденному значению $\chi^2$ = 3,0 и числу степеней свободы $n$ = 7 находим, что $P \approx$ 88%. Это означает, что если гипотеза о зависимости (I.37) справедлива, то найденное значение $\chi^2$ должно встречаться примерно в 88% случаев или, иначе, с вероятностью 0,88 величина $\chi^2$ будет превышать значение 3,0. Следовательно, на уровне доверительной вероятности 88% мы подтвердили зависимость (I.37). Если, например, при тех же условиях $\chi^2$ = I4,I, то это означало бы, что при справедливости гипотезы (I.37) такие большие отклонения встречались бы лишь в 5% случаев, так что наше найденное значение $\chi^2$ =I4,I свидетельствовало бы о ненадежности гипотезы и это заставило бы искать другую зависимость $y(t)$, например, в виде полинома третьей степени и т.д.

Выпишем окончательно найденный кинематический закон движения:

$$x = 100\,t\ (см)\,, \qquad y = \overset{C_0}{100}\,t^2 + \overset{C_1}{50}\,t + 50\ (см). \tag{I.39}$$

На рис. 6 и 7 построены для наглядности графики зависимостей (I.39).

<u>Задание 2. Найти модуль скорости точки в середине интервала наблюдения и углы, составляемые вектором скорости с осями координат в этот момент. Изобразить вектор скорости на рис. 5.</u>

Середина интервала наблюдения соответствует $t_1$ = 0,50 с. Используя формулы (I.20 ; I.21) и (I.24) получим:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 100\ см/с\ ; \quad V_y = \frac{dy}{dt} = (200t + 50)\ см/с\ ;$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{100^2 + (200t + 50)^2}\ см/с$$

Полагая $t_1$ = 0,50 с, получим $V_{1x}$ = I00 см/с ; $V_{1y}$ = I50 см/с ; $V_1$ = 180 см/с ; $\alpha = (\vec{V}_1, \vec{i}) = \arccos(V_{1x}/V_1) = 1,0$; $\beta = (\vec{V}_1, \vec{j}) = \arccos\frac{V_{1y}}{V_1} = 0,60.$

Рассчитаем погрешности. Погрешность $V_x$ задается формой записи: $\Delta V_x$ = 5 см/с. Для нахождения $\Delta V_y$ перепишем $V_y$ в виде $V_y = 2C_0 t + C_1$, где $C_0$ = I00 см/с$^2$, $C_1$ = 50 см/с, $\Delta C_0$ = 5 см/с$^2$, $\Delta C_1$ = 5 см/с.

Тогда, используя формулу (I.I3) получим:

$$\Delta V_y = \sqrt{\left(\frac{\partial V_y}{\partial C_0}\Big|_{t_1}\Delta C_0\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial C_1}\Big|_{t_1}\Delta C_1\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial t}\Big|_{t_1}\Delta t\right)^2} = \sqrt{(2t_1\Delta C_0)^2 + (2C_0\Delta t)^2 + (\Delta C_1)^2} = \sqrt{(2\cdot 0,50\cdot 5)^2 + (2\cdot 100\cdot 0,005)^2 + (5)^2} = 7\ см/с.$$

Таким образом, следует писать

$$V_{1x} = (100 \pm 5)\ см/с\ ; \quad V_{1y} = (150 \pm 7)\ см/с.$$

Аналогично рассчитываются погрешности $\Delta V, \Delta\alpha, \Delta\beta$ как косвенных физических величин. Изображаем в подходящем масштабе на рис.5 вектор $\vec{V}_1$ .

<u>Задание 3. Найти ускорение точки в тот же момент времени и углы, составляемые вектором ускорения, с осями координат. Изобразить вектор ускорения на рис. 5.</u>

Используя формулы (I.27 ÷ I.30), находим

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 0\ ; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = 200\ см/с^2\ ; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 200\ м/с.$$

Поскольку же величины от времени не зависят, такими же они и будут и при $t_1$ = 0,50 с. Их погрешности задаются формой записи. Изображаем в подходящем масштабе вектор $\vec{a} = \vec{a}_1$ на чертеже.

Далее: $\alpha_1 = (\widehat{\vec{a}_1, \vec{i}}) = \frac{\pi}{2}$ ; $\beta_1 = (\widehat{\vec{a}_1, \vec{j}}) = 0$.

Задание 4. Найти тангенциальное и нормальное ускорения точки в тот же момент времени. Показать на рис. 5 векторы $\vec{a}_{1\tau}$ и $\vec{a}_{1n}$ .

Используя формулу (I.32) и вышеполученные результаты, запишем

$$a_{1\tau} = \frac{V_{1x} a_{1x} + V_{1y} a_{1y}}{V_1} = \frac{100 \cdot 0 + 150 \cdot 200}{180} = 167 \text{ см/с}^2.$$

Направлен вектор $\vec{a}_{1\tau}$ так же, как и $\vec{V}_1$ . Изображаем его на чертеже. Вектор $\vec{a}_{1n}$ может быть найден геометрически как разность $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_{1\tau}$ (формула (I.35)): $\vec{a}_{1n} = \vec{a}_1 - \vec{a}_{1\tau}$ .

Правильность его нахождения по чертежу на рис. 5 можно проконтролировать, вычисляя его модуль:

$$a_{1n} = \sqrt{a_1^2 - a_{1\tau}^2} = \sqrt{(200)^2 - (167)^2} = 110 \text{ см/с}^2.$$

Задание 5. Найти радиус кривизны траектории в точке, соответствующей тому же моменту времени.

Используя формулу (I.34), находим:

$$R_1 = \frac{V_1^2}{a_{1n}} = \frac{(180)^2}{110} = 293 \text{ см}.$$

Расчет погрешностей в заданиях 4 и 5 проводятся так же, как и в задании 2. Во многих случаях оказывается полезным приближенный графический способ нахождения радиуса кривизны. Для этого точку на траектории, соответствующую моменту времени $t_1$ = 0,50 с, соединим прямолинейными отрезками с соседними точками, соответствующими моментам $t_2$ = 0,40 с и $t_3$ = 0,60 с. Из середины этих отрезков восстанавливаем перпендикуляр до их пересечения в точке O .

Точка O примерно совпадает с центром соприкасающейся окружности, соответствующей участку траектории вблизи точки, для которой велось построение. Радиус этой окружности примерно равен $R_1$ (на рис. 5 точка O находится за пределами листа бумаги.)

Задание 6. Найти зависимость пройденного пути $S$ от времени $t$ , то есть функцию $S = S(t)$.

Задание 7. Найти среднюю скорость и ускорение за весь интервал наблюдения.

Задание 8. Написать уравнение траектории точки.

Методику выполнения заданий 6, 7, 8 студентам предлагается разработать самостоятельно.

Стробоскопические фотографии для выполнения работы каждый студент получает у преподавателя.

Контрольные вопросы

1. Какие ошибки (пункт а)) имели место при выполнении работы и как они учитывались?
2. Как изменилась точность ваших результатов, если бы вы проводили все измерения и построения несколько раз, используя разные инструменты?
3. Как можно проверить отсутствие промахов в серии наблюдений?
4. Изложите методику расчета погрешностей при измерении объема цилиндра штангенциркулем.
5. Нарисуйте, примерно, как будет выглядеть стробоскопическая фотография движения точки при $\vec{a}_{\tau} \uparrow\uparrow \vec{V}$ и $\vec{a}_{\tau} \uparrow\downarrow \vec{V}$ .
6. Запишите выражение для векторов скорости $\vec{V}$ и нормального ускорения $\vec{a}_n$ в указанный преподавателем момент времени и проверьте выполнение условий $\vec{a}_n \cdot \vec{V} = 0$ .
7. Нанесите экспериментальные точки и постройте теоретическую кривую зависимости от времени той координаты, для которой она нелинейна, откладывая вдоль оси абсцисс значения $\left(t + \frac{a_1}{2a_0}\right)^2$ , а вдоль оси ординат - значения этой координаты. Сделайте выводы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сквайрс Дж. Практическая физика. - М.: Мир, 1971. - 246 с.
2. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. - Л.: Наука, 1974. - 108 с.
3. Физический практикум. / Под ред. Г.С.Кембровского. - Мн.: Изд-во "Университетское", 1986. - 352 с.

Анатолий Антонович Гладыщук

Евгений Викторович Лщенко

Николай Игнатьевич Чопчиц

Лабораторные работы по курсу физики.
Часть I. Физические основы механики.

Фронтальная лабораторная работа № I
"Изучение теории погрешностей и кинематика материальной точки".

(методические указания)

Методические указания утверждены
Ученым Советом института в качестве
официального материала.

Подписано к печати 1987.II.19
Бумага писчая № I. Офсетная печать.
Формат 60х84/16. Усл.печ.л. I,25.
Заказ № 908 . Тираж 500 экз.Бесплатно.
Отпечатано на ротапринте Брестского
инженерно-строительного института.
224017, г.Брест, ул.Московская, 267.