

РАСЧЕТ ФУНДАМЕНТНЫХ СЕТЧАТЫХ ПЛИТ НА УПРУГОМ СЛОЕ**С. В. Босаков¹, О. В. Козунова²**

¹ Д. т. н., профессор, гл. науч. сотр. РУП «Институт БелНИИС», профессор кафедры «Математические методы в строительстве» БНТУ, Минск, Беларусь

² К. т. н., доцент, докторант БНТУ, Минск, Беларусь

Реферат

В рассматриваемой работе авторами разработана методика расчета фундаментных сетчатых плит на упругом основании, моделируемом упругим однородным изотропным слоем, под действием внешней нагрузки. Из истории развития расчета конструкций на упругом основании видно, что методы их расчета совершенствовались и уточнялись по мере развития научно-технического прогресса. Это можно проследить на различных моделях упругого основания, которыми моделировались реальные грунты в естественном залегании или в искусственном основании при постановке принципиально новых задач расчета конструкций.

Разнообразие практических задач приводит к неоднозначному моделированию упругого основания. Авторы ссылаются на работы А. Н. Тарасевича, О. В. Козуновой и С. Д. Семенюка, в которых приведен обширный систематизированный обзор моделей упругого основания для расчета фундаментных балок, балочных и фундаментных плит, а также для расчета перекрестных лент фундаментов мелкозаложенного.

Актуальность и своевременность предлагаемой работы в том, что вопросы расчета сетчатых плит и системы перекрестных лент на упругом основании до настоящего времени не исследованы в полной мере. Авторам известны работы М. И. Горбунова-Посадова, И. А. Симвулиди, Г. Я. Попова, С. Д. Семенюка, С. Н. Клепикова, в которых различными подходами проведены исследования по расчету сетчатых плит и пространственных монолитных фундаментов как системы перекрестных лент на упругом основании.

Предлагаемая методика основана на вариационном методе Ритца и смешанном методе строительной механики с использованием функций влияния Жемочкина. Для определения коэффициентов канонических уравнений и свободных членов смешанного метода строительной механики через способ Жемочкина в расчете используются соотношения прогибов с защемленной в центре плиты нормалью.

Численная реализация нового универсального подхода выполнена на примере симметрично нагруженной равномерно-распределенной нагрузкой прямоугольной фундаментной плиты с отверстиями на упругом однородном изотропном слое. Приводятся графические результаты расчета для осадок фундаментной сетчатой плиты и распределения контактных напряжений под плитой.

Ключевые слова: фундаментная сетчатая плита, упругое основание, упругое полупространство, упругий однородный изотропный слой, вариационный метод Ритца, способ Жемочкина, смешанный метод строительной механики, функции влияния, осадки, контактные напряжения.

CALCULATION OF FOUNDATION MESH SLABS ON AN ELASTIC LAYER

S. Bosakov, O. Kozunova

Abstract

In this work, the authors developed a methodology for calculating mesh plates on an elastic base modeled by an elastic half-space under the action of an external load. From the history of the development of calculation of structures on an elastic basis, it can be seen that the methods of their calculation have been improved and refined as scientific and technological progress develops. This can be traced on various models of the elastic foundation, which were used to simulate real soils in a natural occurrence or in an artificial foundation when setting up fundamentally new problems of structural analysis.

Load of a rectangular foundation slab with holes in the elastic half-space. Graphical calculation results are given. A variety of practical problems leads to ambiguous modeling of the elastic base. The authors cite the works of Tarasevich, Kozunova and Semenyuk, which provides an extensive systematic review of elastic foundation models for calculating foundation beams, beam and foundation plates, as well as for calculating cross tapes of shallow foundations.

The relevance and timeliness of the proposed work is that the issues of calculating mesh plates and a system of cross tapes on an elastic base have not yet been fully investigated. The authors know the work of M. I. Gorbunova-Posadova, I. A. Simvulidi, G. Ya. Popova, S. D. Semenyuk, S. N. Klepikova, in which various approaches conducted research on the calculation of mesh plates of spatial monolithic foundations, as a system of cross tapes on an elastic base.

The proposed methodology is based on the Ritz variational method and the mixed method of structural mechanics using the influence functions of Zhemochkin. To determine the coefficients of the canonical equations and the free terms of the mixed method of structural mechanics through the Zhemochkin method, the calculation uses the ratio of deflections with the normal pinched in the center of the plate.

The numerical implementation of the new approach is carried out on the example of a symmetrically loaded uniformly distributed for the precipitation of the mesh plate and the distribution of contact stresses under the plate.

Keywords: mesh plate, elastic base, elastic half-space, Ritz variational method, Zhemochkin method, mixed method of structural mechanics, influence functions, precipitation, contact stresses under the plate.

Введение. Обзор литературы

Одним из разделов строительной механики является расчет конструкций на упругом основании. Задача расчета таких конструкций состоит в определении реактивных давлений (контактных напряжений), возникающих под подошвой фундаментных конструкций, в определении осадок сооружения. Одной из основных задач является также определение напряженно-деформированного состояния самой конструкции, лежащей на упругом основании [1, 2].

Из истории развития расчета конструкций на упругом основании видно, что в результате научно-технического прогресса совершенствовались и уточнялись методы расчета указанных выше конструкций [1–6]. Это можно проследить на различных моделях упругого основания, которыми моделировались реальные грунты в естественном залегании или в искусственном основании при постановке принципиально новых задач расчета конструкций.

Разнообразие практических задач приводит к неоднозначному моделированию упругого основания. Особую трудность представляет собой выбор расчетной модели упругого основания для разных видов грунтов. Обзор моделей упругого основания для расчета фундаментных балок, балочных плит и фундаментных плит сплошного сечения приводится в работах [7, 8]. В монографии Семенюка С. Д. в ходе статического расчета перекрестных лент фундаментов мелкого заложения систематизируются и классифицируются модели упругого основания [9] с дальнейшими практическими приложениями.

Если на начальном этапе довольствовались гипотезой линейного распределения реактивных напряжений [1, 2, 5], то при бурном строительстве железнодорожных путей, а также понтонных сооружений, получила развитие модель Фусса – Винклера – Циммермана [10, 11]. Однако и последняя не удовлетворяла реальной работе связных грунтов. Так появилась модель упругого полупространства (при пространственной постановке задачи) и всем известное решение Буссинеска для этой модели [2, 12], а при плоской постановке – модель упругой полуплоскости с решением Фламана [2, 8] соответственно. В дальнейшем появились различные модификации и комбинации указанных моделей. Комбинация модели упругого полупространства и модели Винклера весьма успешно подходит для расчета конструкций на неоднородных основаниях, имеющих слоистую структуру. Такие основания встречаются при устройстве фундаментов на песчаной подушке и моделируются комбинированными моделями [13, 14].

С механической точки зрения расчет конструкций на упругом основании есть решение контактной задачи соприкасающихся тел [15]. Данные задачи сводятся к решению интегральных уравнений, решение которых зависит от ядра интегрального уравнения и формы соприкасающихся тел [16]. При простых формах контактирующих тел основная трудность состоит в определении ядра интегрального уравнения, которое еще называют функцией Грина контактирующих тел [6, 15, 16]. Функция Грина представляет собой функцию перемещений точек поверхности упругого основания от действия единичной сосредоточенной силы [6].

В инженерной практике нецелесообразно решать каждую контактную задачу через интегральные уравнения в связи с трудоемкими математическими вычислениями. Поэтому на практике успешно используют метод Жемочкина [17], который сводит контактную задачу к задаче строительной механики.

Вопросы расчета фундаментных сетчатых плит и системы перекрестных лент на упругом основании до настоящего времени не исследованы в полной мере. Авторам известны работы М. И. Горбунова-Посадова [2], И. А. Симвулиди [18], Г. Я. Попова [19], С. Д. Семенюка [9], С. Н. Клепикова [4], в которых различными подходами проведены исследования по расчету сетчатых плит и пространственных монолитных фундаментов, как системы перекрестных лент на упругом основании.

Ниже используется общий подход для расчета сетчатых плит на линейно-деформируемом основании, который был предложен ранее авторами и численно апробирован для упругого полупространства в статье [23]. Этот универсальный подход основан на способе Жемочкина [17], позволяющем с единых позиций рассчитывать сетчатые плиты или систему перекрестных лент любой формы и жесткости на различных моделях упругого основания на произвольную вертикальную нагрузку. Численная реализация предлагаемого подхода выполнена на примере симметрично нагруженной равномерно распределенной нагрузкой прямоугольной фундаментной плиты с отверстиями на упругом однородном изотропном слое.

Постановка задачи и алгоритм линейного расчета. Рассматривается прямоугольная фундаментная плита как сетчатая плита на упругом основании размерами $L \times B$ постоянной толщины h с прямоугольными отверстиями (размерами a и b) под действием вертикальной нагрузки (рисунок 1).

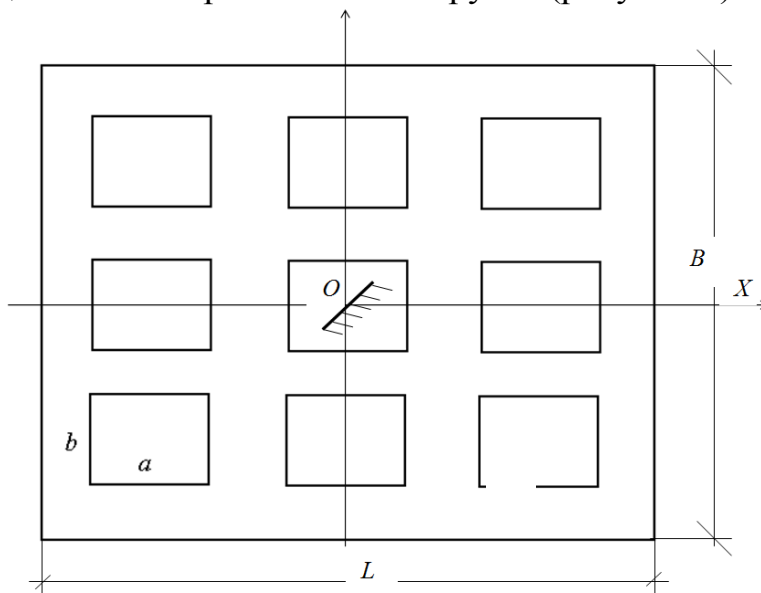


Рисунок 1 – Прямоугольная фундаментная плита с отверстиями или сетчатая плита

Принимаются следующие гипотезы и допущения:

- для сетчатой плиты или фундамента из перекрестных лент справедливы гипотезы изгиба тонкой плиты [15];
- связи между плитой и упругим основанием могут работать на сжатие и растяжение;
- в зоне контакта плиты и основания не учитываются касательные напряжения;
- длина a , ширина b отверстий в плите соответствуют соотношению

$$2 < \left(\frac{\text{Min}(L, B)}{a}, \left(\frac{\text{Min}(L, B)}{b} \right) \right) < 6$$

Такие соотношения обычно встречаются в практике возведения фундаментов мелкого заложения в виде монолитной железобетонной плиты с отверстиями, то есть сетчатой плиты.

В предлагаемой работе ставится задача определения контактных напряжений под подошвой сетчатой плиты, ее осадок и внутренних усилий в плите от вертикальной нагрузки.

Решение задачи

Поставленную задачу будем решать методом Жемочкина [17]. Разобьем плиту на одинаковые прямоугольные участки и в центре каждого участка поставим связь, через которую осуществляется контакт плиты с упругим основанием. Надо отметить, что ленту по ширине необходимо разбивать не менее чем на два участка, чтобы учесть влияние крутящих моментов. Будем считать, что усилие в связи вызывает равномерную эпюру контактных напряжений в пределах каждого участка.

Составляем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) смешанного метода строительной механики

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{1,1}X_1 + \dots + \delta_{1,n}X_n + u_0 - \phi_x y_1 - \phi_y x_1 + \Delta_{1,F} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n,1}X_1 + \dots + \delta_{n,n}X_n + u_0 + \phi_x y_n + \phi_y x_n + \Delta_{n,F} = 0 \\ -\sum_{i=1}^n X_i + R = 0 \\ \sum_{i=1}^n X_i y_i + M_{xR} = 0 \\ \sum_{i=1}^n X_i x_i + M_{yR} = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\delta_{i,j}$ – взаимное перемещение разрезанной связи с номером i от действия единичных сил, приложенных в j -той связи Жемочкина, через которую осуществляется контакт плиты с упругим основанием. Состоит из двух слагаемых [17]; X_i – неизвестное усилие в связи i Жемочкина; u_0 , ϕ_x , ϕ_y – неизвестные вертикальное и угловые перемещения во введенном в центре плиты защемлении; x_i , y_i – координаты центра прямоугольного участка Жемочкина с номером i ; $\Delta_{i,F}$ – перемещение точки i сетчатой плиты с защемленной нормалью от действия внешней нагрузки F ; R , M_{xR} , M_{yR} – равнодействующая внешней нагрузки и моменты равнодействующей относительно осей X и Y соответственно; n – количество участков Жемочкина.

Коэффициенты при неизвестных $\delta_{i,j}$ в уравнениях СЛАУ для упругого полупространства с модулем упругости E_0 и коэффициентом Пуассона ν_0 определяются по формуле [17]

$$\delta_{i,k} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta x} F_{i,k} + \frac{L^2}{D} W_{i,k}, \quad (2)$$

где $W_{i,k}$ – вертикальное перемещение середины участка с номером i сетчатой плиты с защемленной нормалью от действия единичной силы, приложенной в точке k сетчатой плиты; L – размер плиты в направлении оси OX ; Δx – размер участка Жемочкина по оси OX ; $F_{i,k}$ – безразмерная функция для определения вертикального перемещения точки i поверхности упругого основания от

действия единичной силы, распределенной по участку с номером k ; ν_0, E_0 – коэффициент Пуассона и модуль упругости упругого основания.

Безразмерная функция $F_{i,k}$ в формуле (2) определяется через соотношения из монографии [14], а именно

$$F_{i,i} = 2 \frac{c}{b} \left[\ln \frac{b}{c} + \frac{b}{c} \ln \left(\frac{c}{b} + \sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1} \right) + \ln \left(1 + \sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 1} \right) \right];$$

$$F_{i,k} = \frac{1}{|x_i - x_k|}. \quad (3)$$

Для упругого однородного изотропного слоя, шарнирно соединенного с недеформируемым основанием, вертикальные перемещения поверхности упругого слоя от сосредоточенной силы P определяются через соотношение (2.13) из монографии [6]

$$W(R) = \frac{P(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\left(4 + \frac{R^2}{h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} P_n \left(\frac{2h}{\sqrt{R^2 + 4h^2}} \right) \right], \quad (4)$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ – радиус-вектор перемещающихся точек с координатами (x, y) исследуемой поверхности упругого слоя;

h – мощность (толщина) упругого слоя, м;

$\Gamma(n+1)$ – гамма-функция [17];

$P_n \left(\frac{2h}{\sqrt{R^2 + 4h^2}} \right)$ – полином Лежандра [17];

a_n – неопределенные коэффициенты разложения в ряд.

В монографии [6] были определены в следующих значениях $a_0 = -1$; $a_1 = -3/2$; $a_2 = -1$; $a_3 = -1/3$; $a_4 = 1/18$; ...

После интегрирования (4) по площади прямоугольного участка размерами $\Delta x \cdot \Delta y$ получаем выражения для определения перемещений центра участка Б. Н. Жемочкина с номером i от действия сосредоточенной силы, равной 1, приложенной к центру участка с номером k .

Первое слагаемое в формуле (4) определяет функцию вертикальных перемещений для упругого однородного изотропного полупространства (решение Буссинеска), интегрируется точно (оно сингулярное), остальные – не сингулярные и не интегрируются. Для практических расчетов в формуле (4) можно ограничиться пятью членами ряда [6].

В монографии [6] получено также и следующее соотношение для перемещения точки $M(x_i, y_i)$

$$\begin{aligned}
W(x_i, y_i) = & \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0 \Delta x} \left[\begin{aligned} & \frac{y_i - d}{\Delta y} \ln \frac{x_i - b + \sqrt{(x_i - b)^2 + (y_i - d)^2}}{x_i - a + \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - d)^2}} + \\ & + \frac{y_i - c}{\Delta y} \ln \frac{x_i - a + \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - c)^2}}{x_i - b + \sqrt{(x_i - b)^2 + (y_i - c)^2}} + \\ & + \frac{x_i - b}{\Delta y} \ln \frac{y_i - d + \sqrt{(x_i - b)^2 + (y_i - d)^2}}{y_i - c + \sqrt{(x_i - b)^2 + (y_i - c)^2}} + \\ & + \frac{x_i - a}{\Delta y} \ln \frac{y_i - c + \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - c)^2}}{y_i - d + \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - d)^2}} \end{aligned} \right] + \\
& + \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0 h} \sum_{h=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\left(4 + \frac{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}{h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} P_n \left(\frac{2h}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + 4h^2}} \right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Запишем соотношение (5) через безразмерную функцию $F_{i,k}$, а именно

$$W(x_i, y_i) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0 \Delta x} \cdot F_{ik}, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}
F_{ik} = & \left[\begin{aligned} & \frac{y_i - d}{\Delta y} \ln \frac{x_i - b + \sqrt{(x_i - b)^2 + (y_i - d)^2}}{x_i - a + \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - d)^2}} + \\ & + \frac{y_i - c}{\Delta y} \ln \frac{x_i - a + \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - c)^2}}{x_i - b + \sqrt{(x_i - b)^2 + (y_i - c)^2}} + \\ & + \frac{x_i - b}{\Delta y} \ln \frac{y_i - d + \sqrt{(x_i - b)^2 + (y_i - d)^2}}{y_i - c + \sqrt{(x_i - b)^2 + (y_i - c)^2}} + \\ & + \frac{x_i - a}{\Delta y} \ln \frac{y_i - c + \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - c)^2}}{y_i - d + \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - d)^2}} \end{aligned} \right] + \\
& + \frac{\Delta x}{h} \sum_{h=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\left(4 + \frac{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}{h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} P_n \left(\frac{2h}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + 4h^2}} \right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Наибольшую трудность вызывает определение прогибов сетчатой плиты с защемленной в центре плиты нормалью. Если бы плита была сплошной, то можно было бы воспользоваться решением, приведенным в монографии [9].

Поэтому в рассматриваемой работе для определения прогибов сетчатой плиты с защемленной в центре плиты нормалью был принят метод Ритца, где за

базисные функции принимались первые пять частных решений Клебша [6], удовлетворяющие граничным условиям по перемещениям в защемлении. Поэтому функция прогибов при определении энергии деформаций принималась в следующем виде [6]

$$W(x, y) = A_0 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + A_1 \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) + A_2 \frac{xy}{ab} + A_3 \frac{x}{a} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + A_4 \frac{y}{b} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right), \quad (8)$$

A_i – неизвестные коэффициенты, определяемые по методу Ритца [21] из условия минимума потенциальной энергии плиты с защемленной нормалью и действующей на нее сосредоточенной силы.

Далее составлялась и решалась система (1), по найденным усилиям в связях Жемочкина определялись осадки сетчатой плиты, по ним – моменты и поперечные силы в ее сечениях по известным формулам [15], и в зоне контакта плиты с упругим основанием – контактные напряжения.

Результаты расчета

Рассчитаем квадратную железобетонную сетчатую плиту размерами в плане $13 \text{ м} \times 13 \text{ м}$ с четырьмя квадратными отверстиями $a = b = 5 \text{ м}$. Цилиндрическая жесткость плиты – $D = 5000 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Плита расположена на упругом полупространстве и упругом однородном изотропном слое, шарнирно-соединенном с недеформируемом основанием, с постоянными упругими параметрами $\nu_0 = 0.35$ и $E_0 = 20 \text{ МПа}$ под действием равномерно распределенной нагрузки 10 кПа .

Плита разбивалась на 156 одинаковых прямоугольных участков Жемочкина и на две по ширине ленты.

На рисунках 2, 3 приводятся линии равных перемещений (осадок) сетчатой плиты и на рисунках 4, 5 – линии равных контактных напряжений сеточной плиты для разных моделей упругого основания (см. рисунки 2, 4 – для упругого полупространства; рисунки 3, 5 – для упругого слоя).

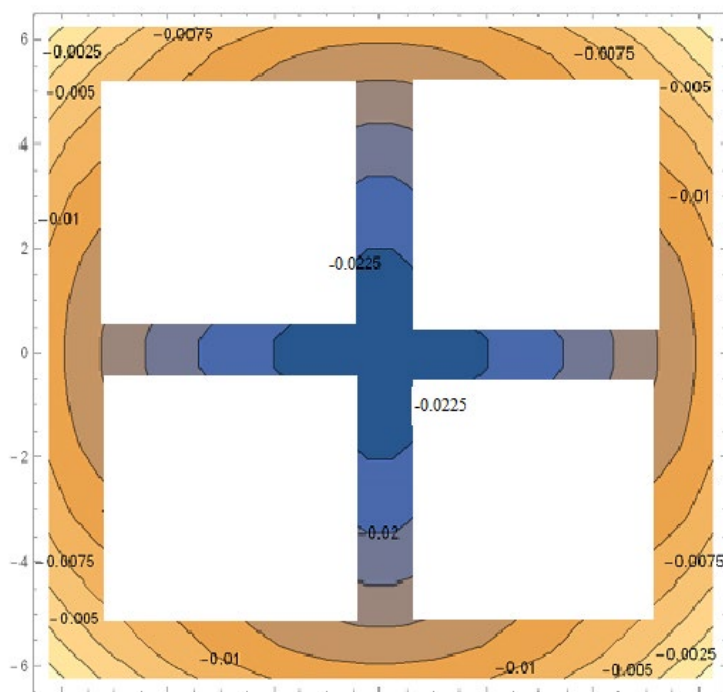


Рисунок 2 – Линии равных перемещений (м) сетчатой плиты на упругом полупространстве

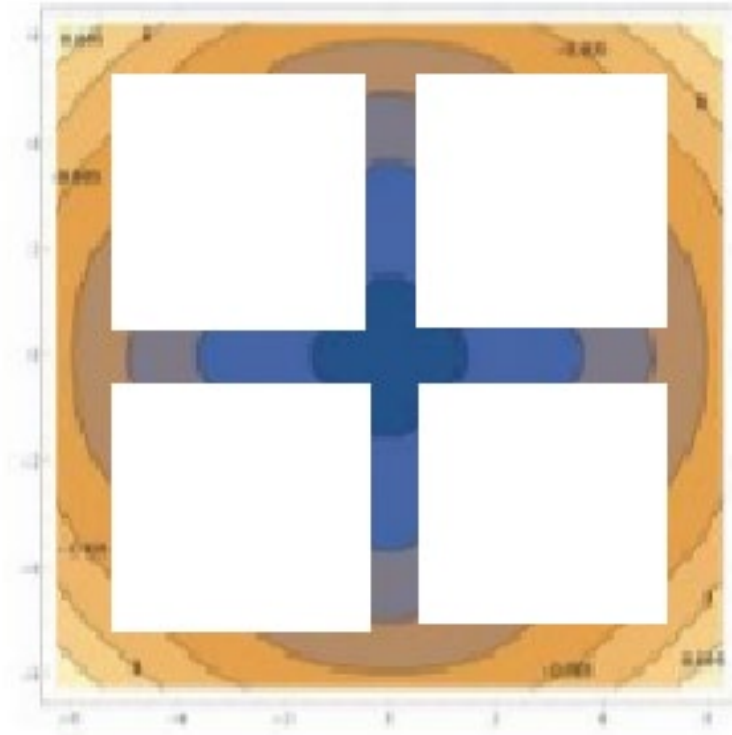


Рисунок 3 – Линии равных перемещений (м) сетчатой плиты на упругом изотропном слое

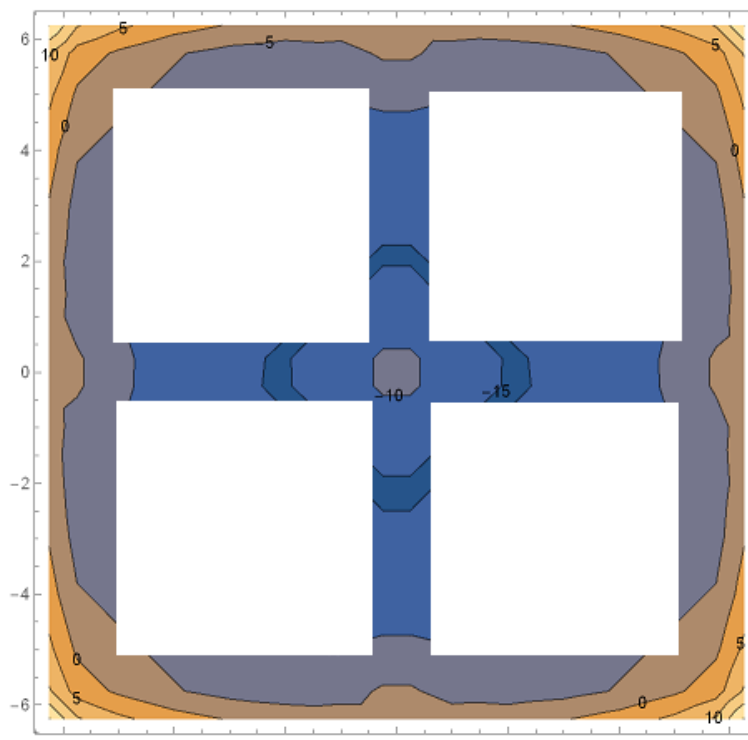


Рисунок 4 – Линии равных контактных напряжений (кПа) сетчатой плиты на упругом полупространстве

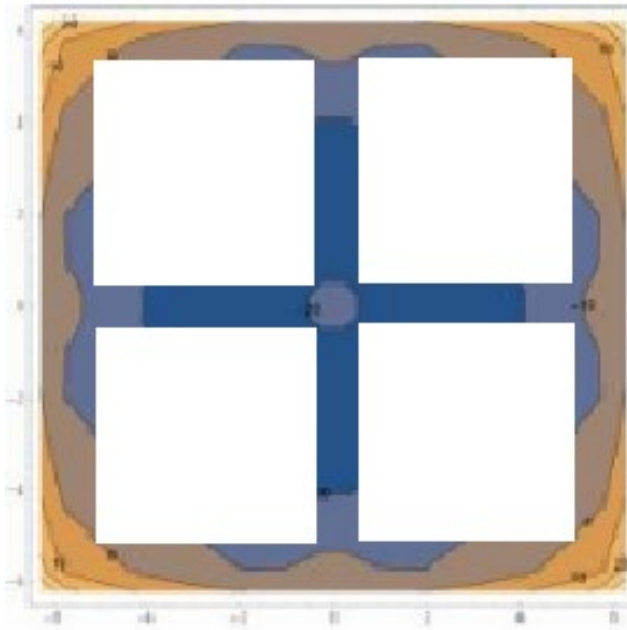


Рисунок 5 – Линии равных контактных напряжений (κПа) сетчатой плиты на упругом изотропном слое

Выводы и заключения

1. В работе приведен несложный, но универсальный подход, основанный на способе Жемочкина, для расчета сетчатой плиты на упругом основании под действием вертикальной нагрузки. Рассмотренный пример дает решение как для упругого полупространства, так и для упругого изотропного слоя. Это подтверждает тот факт, что в уравнении (2) безразмерная функция $F_{i,k}$ характеризует модель упругого основания и ее изменение в соответствии с [17] позволяет рассчитывать сетчатые плиты на разных моделях упругого основания.

2. При расчете сетчатой плиты на основании Винклера выражение для функции влияния (2) принимается в виде $F_{i,k} = 0, i \neq k$ и $F_{i,i} = \frac{1}{K \Delta x \Delta y}$, где K – коэффициент постели основания Винклера.

3. Используя результаты работы авторов [22] приведенный подход обобщается на расчет сетчатой плиты с учетом физической нелинейности ее материала.

Литература

1. Горбунов-Посадов, М. И. Балки и плиты на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов. – М. : Машстройиздат, 1949. – 238 с.
2. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Стройиздат, 1984. – 680 с.
3. Коренев, Б. Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании / Б. Г. Коренев. – М. : Госстройиздат, 1954. – 231 с.
4. Клепиков, С. Н. Расчет конструкций на упругом основании / С. Н. Клепиков. – Киев : Будівельник, 1967. – 184 с.
5. Развитие теории контактных задач в СССР / Академия наук СССР, Ин-т проблем механики ; отв. ред. Л. А. Галин. – М. : Наука, 1976. – 496 с.

6. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск : БНТУ, 2002. – 128 с.
7. Тарасевич, А. Н. Изгиб самонапряженных плит на упругом основании: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / А. Н. Тарасевич. – Брест, 2001. – 125 л.
8. Козунова, О. В. Статический анализ системы «балочная плита – нелинейно-упругое неоднородное основание» вариационно-разностным методом: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / О. В. Козунова. – Минск, 2017. – 168 л.
9. Семенюк, С. Д. Железобетонные пространственные фундаменты жилых и гражданских зданий на неравномерно-деформируемом основании / С. Д. Семенюк. – Могилев : БРУ, 2003. – 269 с.
10. Fuss, N. I. Recherches sur un problème de mécanique / Nicolas Fuss // Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis. – Petropolis, 1790. – V. 6 (1788). – P. 172–184.
11. Winkler, E. Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit / E. Winkler. – Praga, 1867. – 380 p.
12. Boussinesq, I. Applications des potentiels a l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides elastiques / I. Boussinesq. – Paris : Gauthiers-Villars, 1885. – 721 p.
13. Коган, Б. И. Напряжения и деформации многослойных покрытий / Б. И. Коган // Тр. ХАДИ. – 1953. – Вып. 14. – С. 33–46.
14. Босаков, С. В. Об одной модели упругого основания и ее использовании для расчета прямоугольной плиты на упругом основании / С. В. Босаков, С. И. Зиневич, О. В. Козунова // НТЖ : Строительная механика и расчет сооружений. – 2018. – № 4 (279). – С. 2–5.
15. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности: уч. для строит. спец. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – 2-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 2002. – 400 с.
16. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А. Б. Васильева [и др.]. – М. : Физматлит, 2003. – 432 с.
17. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчетов фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Сеницын. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Госстройиздат, 1962. – 240 с.
18. Симвулиди, И. А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании / И. А. Симвулиди. – М. : Высшая школа, 1987. – 576 с.
19. Попов, Г. Я. О расчете неограниченной шарнирно-разрезной балочной плиты, лежащей на упругом полупространстве / Г. Я. Попов // Изв. Вузов: Строительство и архитектура. – 1959. – Вып. 3. – С. 25–33.
20. Ржаницын, Р. А. Строительная механика / Р. А. Ржаницын. – М. : Высшая школа, 1991. – 439 с.
21. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости / С. В. Босаков. – Брест : БрГТУ, 2006. – 107 с.
22. Босаков, С. В. Развитие теории расчета шарнирно-соединенных балок на упругом основании с учетом их физической нелинейности / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Проблемы современного бетона и железобетона: сб. науч. тр. / Ин-т БелНИИС ; редкол.: О. Н. Лешкевич [и др.]. – Минск, 2019. – Вып. 11. – С. 11–24.
23. Босаков, С. В. Развитие теории расчета сетчатых плит на упругом основании / С. В. Босаков, О. В. Козунова // НТЖ: Строительная механика и расчет сооружений. – 2020. – № 3 (290). – С. 20–25.