МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ИНЖЕНЕРНОЙ ГРАФИКИ

Конспект лекций по начертательной геометрии

для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Брест 2009

УДК К 515(076.8)

Издание второе исправленное и дополненное.

Составители: Т.Н. Базенков, к.т.н., профессор
Н.С. Житенева, доцент
Т.В. Шевчук, ассистент

Под редакцией доцента Н.С. Житеневой.

Рецензент: О.В. Ярошевич зав. кафедрой «Инженерная графика и САПР» УО «БГАТУ», к.п.н., доцент

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Точки, расположенные в пространстве, обозначают прописными буквами латинского алфавита **A, B, C, D**, ... или цифрами **1, 2, 3, 4**,..
2. Прямые и кривые линии в пространстве – строчными буквами латинского алфавита ***a, b, c, d***, ...
3. Плоскость проекций при образовании эпюра – прописной буквой греческого алфавита: горизонтальная – Π_1, фронтальная – Π_2, профильная – Π_3.
4. Плоскости – строчными буквами греческого алфавита: **α, β, γ, δ;** точки схода следов строчными буквами греческого алфавита с индексами α_x, β_x, γ_x, δ_x ...
5. Поверхности – прописными буквами греческого алфавита **Φ, Δ, θ, Σ,...**
6. Способ задания указывается в скобках рядом с буквенным обозначением геометрической фигуры.
   Например:
   - ***a (A, B)*** – прямая задана двумя точками ***A*** и ***B***;
   - **α *(A, B, C)*** – плоскость задана тремя точками ***A, B*** и ***C;***
   - **β (a, A)** – плоскость задана прямой **a** и точкой **A**;
   - **γ *(a∩b)*** – плоскость задана пересекающимися прямыми ***a*** и ***b;***
   - **δ *(l ∥ m)*** – плоскость задана параллельными прямыми ***l*** и ***m***.
7. Углы – строчными буквами греческого алфавита **φ, ψ, ω.** Прямой угол обозначается прямоугольником.
8. Особые прямые имеют постоянные обозначения:
   - линии уровня: горизонталь – ***h;*** фронталь – ***f;*** профиль – ***p;***
   - следы плоскости общего положения обозначают той же буквой, что и плоскость, с добавлением подстрочного индекса, соответствующего плоскости проекций, например, α_1, α_2;
   - оси вращения – ***i, j***.
9. Последовательность геометрических фигур – надстрочным индексом: точек – A^1 A^2, A^3, ... ; прямых – a^1, a^2, a^3, ... ; плоскостей – α^1, α^2 , α^3.
10. Центр проецирования – прописной буквой латинского алфавита ***S***.
11. Направление проецирования – строчной буквой латинского алфавита **s**.
12. Новая плоскость проекций при замене плоскостей проекций – буквой ***П*** с добавлением подстрочного индекса: Π_4, Π_5, Π_6.
13. Проекции точек, прямых и плоскостей – соответствующей буквой с добавлением подстрочного индекса, характеризующего плоскость проекций:
    - на плоскости Π_1 – A_1, a_1, ...
    - на плоскости Π_2 – A_2, a_2, ...
    - на плоскости Π_3 – A_3, a_3, ...
14. Основные операции:
    - совпадение двух геометрических фигур ≡, например, $a \equiv b$, $A_1 \equiv B_1$;
    - включает, содержит, $l \subset \alpha$, например, прямая l принадлежит плоскости α;
    - взаимная принадлежность геометрических фигур ∈, например, $A \in a$, $a \in B$;
    - пересечение двух геометрических фигур и множеств ∩, например, $l \cap \alpha$, $\beta \cap \gamma$;
    - результат геометрической операции =, например, $K = l \cap \alpha$.

Латинский алфавит			*Греческий алфавит*		
A a - а	*N n-*	*эн*	*A α - альфа*	*N ν -*	*ни*
B b - бэ	*O o-*	*о*	*B β - бэта*	*Ξ ξ -*	*кси*
C c - цэ	*P p -*	*пэ*	*Γ γ - гамма*	*O o*	*омикрон*
D d- дэ	*Q q-*	*ку*	*Δ δ - дельта*	*Π π*	*пи*
E e - е	*R r-*	*эр*	*E Ε - эпсилон*	*P ρ -*	*ро*
F f-эф	*S s -*	*эс*	*Z ζ - дзета*	*Σ σ -*	*сигма*
G g - ге (же)	*T t -*	*тэ*	*H η - эта*	*T τ -*	*тау*
H h- ха (аш)	*U u -*	*у*	*Θ θ - тэта*	*Y Υ -*	*ипсилон*
И ι- и	*Vv -*	*вэ*	*I I - йота*	*Φ φ*	*фи*
J j - йот (жи)	*W w -*	*дубль-вэ*	*K χ - каппа*	*X x -*	*хи*
K к- ка	*X x -*	*икс*	*Λ λ - лямбда*	*Ψ ψ -*	*пси*
L l- эль	*Y y-*	*игрек*	*M μ - ми*	*Ω ω*	*омега*
M m - эм	*Z z -*	*зет*			

РАЗДЕЛ I. Тема: «Методы проецирования. Точка. Прямая и плоскость»

Лекция № 1. МЕТОДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ. ТОЧКА

План лекции

1. Введение. Предмет и методы начертательной геометрии.
2. Методы проецирования (центральное и параллельное).
   2.1. Центральное проецирование.
   2.2. Параллельное проецирование.
   2.3. Свойства центрального и параллельного проецирования.
3. Проецирование точки. Эпюр Монжа.
   3.1. Система двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций.
   3.2. Система трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций.
   3.3. Эпюр Монжа или комплексный чертеж.
   3.4. Система прямоугольных (декартовых) координат.
   3.5. Таблица знаков.

1. Введение

Начертательная геометрия входит в число дисциплин, составляющих основу инженерного образования. По своему содержанию и методам она занимает особое положение среди других наук, она является лучшим средством развития у человека пространственного воображения, без которого немыслимо никакое инженерное творчество.

Начертательная геометрия составляет теоретическую базу для составления чертежа и представляет собой науку:

1. Об изображениях пространственных предметов на плоскости – построение чертежа (прямая задача).

2. О способах решения пространственных задач по плоским изображениям (обратная задача).

К таким задачам относятся:

- Позиционные – задачи на взаимную принадлежность и пересечение фигур.
- Метрические – на определение расстояний и натуральных величин геометрических фигур.

Основным методом для решения задач является метод проецирования, основоположником которого является французский ученый Гаспар Монж (В 1799 году он оформил разрозненные сведения в виде труда, который назвал «Начертательная геометрия»).

В 1810 году впервые в Петербурге в институте инженеров путей сообщения курс начертательной геометрии начал читать французский ученый Патье, а в 1821 году русский ученый профессор Севастьянов.

Свойства геометрических объектов, таких как точка, прямая, плоскость, поверхность изучаются с помощью их проекций, в основе построения которых лежит метод проецирования. Геометрические объекты в пространстве называются оригиналами, а их изображения на плоскости – проекциями.

Проецирование – это построение изображения геометрического объекта на плоскости путем проведения через все его точки воображаемых проецирующих лучей до пересечения их с плоскостью, называемой плоскостью проекций.

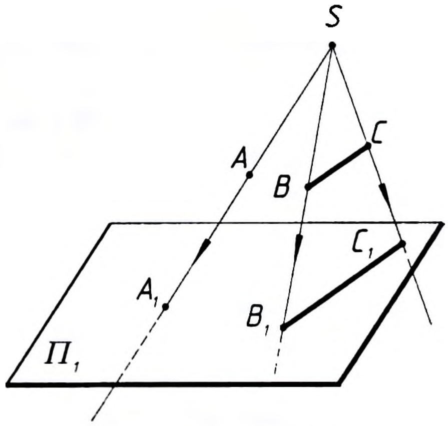
2. Методы проецирования

В зависимости от способа проведения проецирующих лучей различают:

1. Центральное и 2. Параллельное:

а) косоугольное;
б) прямоугольное

2.1. Центральное проецирование



Аппарат проецирования:

$П_1$ – плоскость проекций,
S – центр проецирования,
A – объект проецирования,
SA – проецирующий луч,
A_1 – центральная проекция,
точки А на плоскость $П_1$.

Рисунок 1.1

Проекцией точки на плоскость называется точка пересечения проецирующего луча с плоскостью проекций.

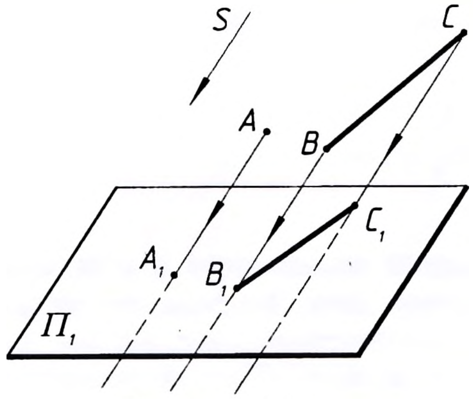
Объектов проецирования может быть множество, центр проецирования – один.

Множество лучей, проходящих через один центр проецирования (или точку зрения), образуют коническую поверхность. Отсюда этот метод еще называется коническим, и на нем основано построение перспективных проекций.

2.2. Параллельное проецирование

Параллельное проецирование подразделяют на косоугольное и прямоугольное, при этом точка зрения находится в бесконечности или в несобственной точке.

а) Косоугольное (S не перпендикулярно $П_1$).



Аппарат проецирования:

$П_1$ – плоскость проекций,
S – направление проецирования,
A, B, C – объекты проецирования.
A_1 – проекция точки А на плоскость $П_1$.

Рисунок 1.2

б) Прямоугольное или ортогональное (S перпендикулярно $П_1$).

Аппарат проецирования тот же:

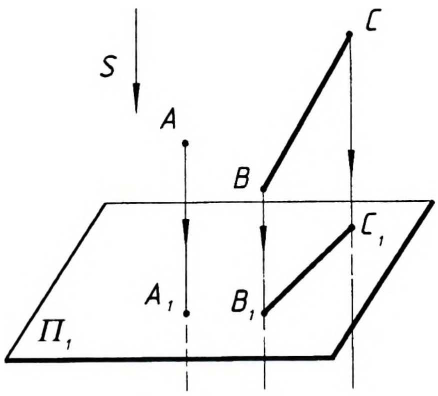


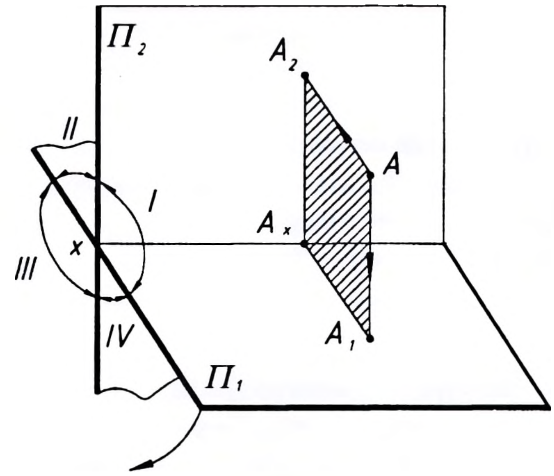
Рисунок 1.3

2.3. Свойства центрального и параллельного проецирования

1. Точка проецируется точкой, прямая – прямой.
2. Каждая точка и линия в пространстве имеют единственную свою проекцию.
3. Каждая точка на плоскости проекций может быть проекцией множества точек, если через них проходит общая для них проецирующая прямая.
4. Каждая линия на плоскости может быть проекцией множества линий, если она расположена на общей для них проецирующей плоскости. Для единственного решения требуются дополнительные условия (например, даны две проекции прямой).
5. Для построения проекций прямой достаточно спроецировать две ее точки и через полученные проекции этих точек провести прямую линию.
6. Если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции этой прямой.
7. Если прямая параллельна направлению проецирования, то проекцией прямой (и любого его отрезка) является точка.
8. Отрезок прямой линии, параллельный плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в натуральную величину.

3. Проецирование точки на 2 и 3 плоскости проекций

3.1. Система двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций



$П_1$ – горизонтальная плоскость проекций,
$П_2$ – фронтальная плоскость проекций,
A_1 – горизонтальная проекция точки A,
A_2 – фронтальная проекция точки A.

$x = П_1 \cap П_2$

$A_2 A_x - \perp x$,
$A_1 A_x - \perp x$.

Рисунок 1.4

Проецирующие лучи образуют плоскость ⊥ оси x, значит две проекции A_1 и A_2 находятся на одной прямой ⊥ оси x, называемой линией проекционной связи. Пространство двумя плоскостями проекций делится на 4 части, которые называются четвертями пространства. Ось x делит горизонтальную плоскость проекций на переднюю и заднюю полу, а фронтальная плоскость – на верхнюю и нижнюю полу.

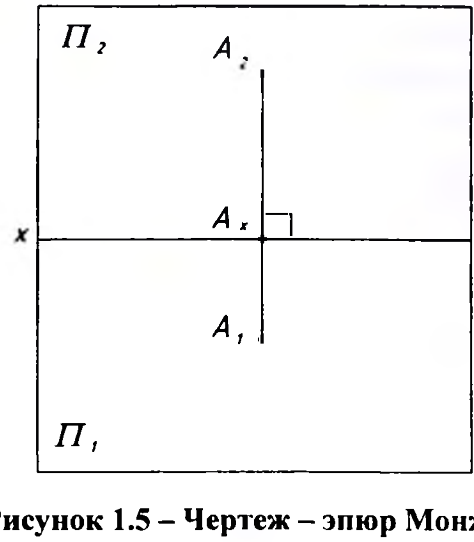
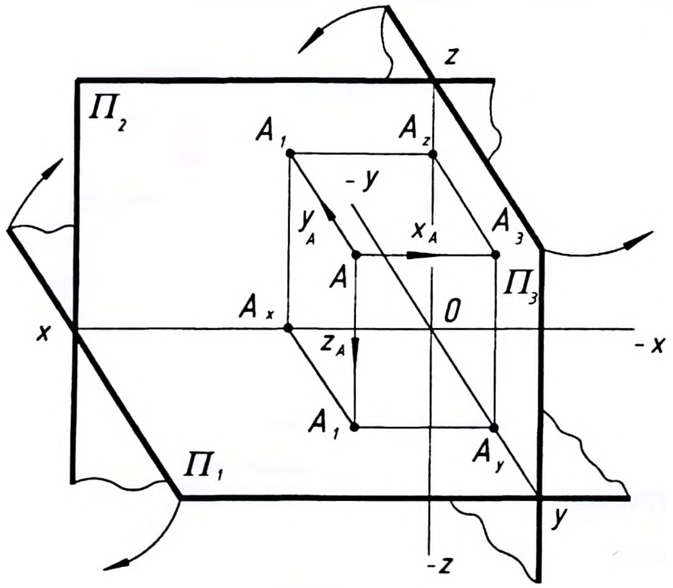


Рисунок 1.5 – Чертеж – эпюр Монжа

3.2. Система трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций



$x = \Pi_1 \cap \Pi_2$,

$y = \Pi_1 \cap \Pi_3$,

$z = \Pi_2 \cap \Pi_3$.

Π_1 – горизонтальная плоскость проекций,
Π_2 – фронтальная плоскость проекций,
Π_3 – профильная плоскость проекций,
A_1 – горизонтальная проекция точки А,
A_2 – фронтальная проекция точки А,
A_3 – профильная проекция точки А

Рисунок 1.6

3.3. Эпюр Монжа или комплексный чертеж

Правило: чтобы построить профильную проекцию точки, необходимо через фронтальную проекцию точки провести прямую, перпендикулярную оси Z (линия связи), и на этой прямой отложить координату Y данной точки вправо от оси Z, если она положительна, и влево, если она отрицательна.

По комплексному чертежу всегда можно определить положение точки в пространстве.

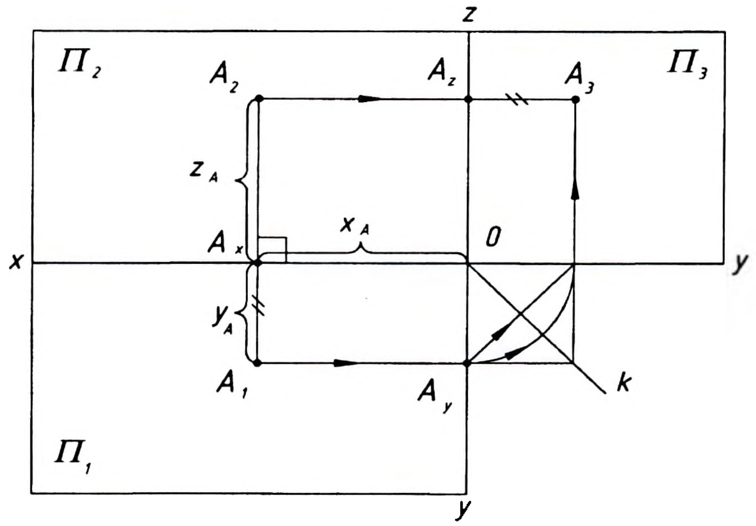


Рисунок 1.7

3.4. Система прямоугольных (декартовых) координат

Точка определена в пространстве тремя координатами:

X – расстояние от точки А до плоскости Π_3 (абсцисса точки – AA_3),
Y – расстояние от точки А до плоскости Π_2 (ордината точки – AA_2),
Z – расстояние от точки А до плоскости Π_1 (аппликата точки – AA_1).

3.5. Система знаков

Октант	X	Y	Z	Октант	X	Y	Z
1	+	+	+	5	-	+	+
2	+	-	+	6	-	-	+
3	+	-	-	7	-	-	-
4	+	+	-	8	-	+	-

Пример. Используя правило знаков, определить, в какой четверти находятся точки А, В и С.

А (+ + +) – ? октант,
В (+ - -) – ? октант,
С (+ - +) – ? октант.

Лекция № 2. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

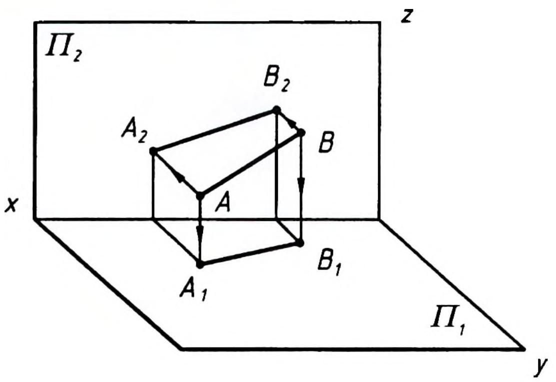
План лекции

1. Прямая.
   1.1. Проекции прямой.
   1.2. Классификация прямых.
   1.3. Точка на прямой.
   1.4. Деление отрезка в данном отношении.
   1.5. Следы прямой.
2. Проекции плоскости.
   2.1. Способы задания плоскости.
   2.2. Следы плоскости.
   2.3. Классификация плоскостей.
   2.4. Линии в плоскости.
   2.5. Главные линии плоскости.

1. Прямая

1.1. Проекции прямой

Прямая в пространстве безгранична. Ее положение определяется двумя точками. На чертеже прямую определяют двумя проекциями прямой: l (A_2B_2; A_1B_1) (рис. 2.1). Проекции прямой проходят через одноименные проекции точек, которыми она задана. Проекциями прямой могут быть прямая или точка. В последнем случае прямая расположена перпендикулярно к плоскости проекций.



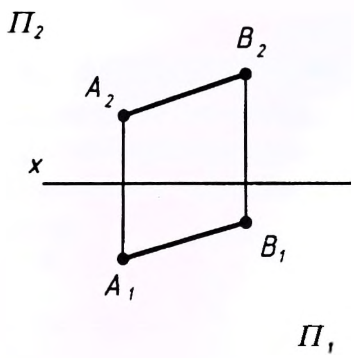


Рисунок 2.1

Прямую на эпюре можно задавать не только проекциями ее отрезка, но и проекциями некоторой произвольной части прямой. При этом проекцию обозначают одной буквой l (l_1, l_2), (рис. 2.2)

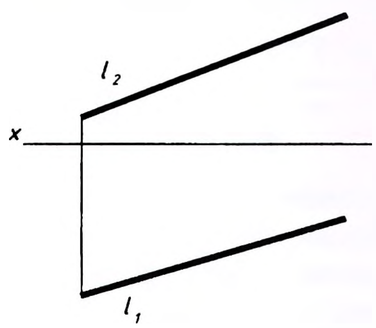


Рисунок 2.2

1.2. Классификация прямых

По своему положению относительно плоскостей проекций прямые подразделяются на:

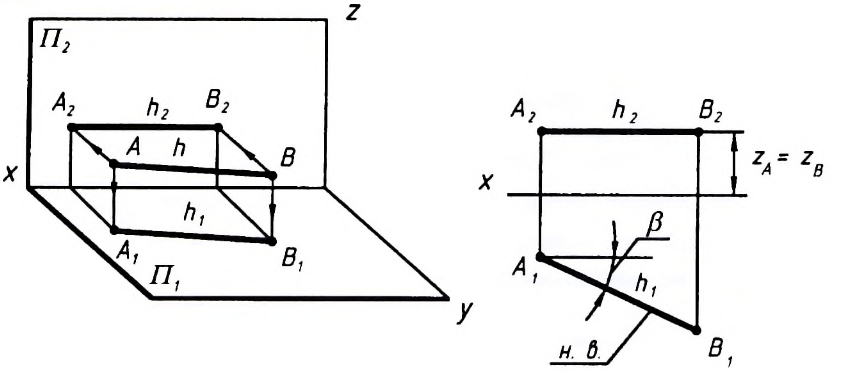
прямые <u>общего положения</u> → прямые не | | и не ⊥ ни к одной из плоскостей проекций

<u>частного положения</u> → уровня; проецирующие

Прямые <u>общего положения</u> проецируются на плоскости проекций с искажением, причем проекции отрезка всегда меньше самого отрезка (рис. 2.1, рис. 2.2).

Прямые <u>уровня</u> – это прямые || одной из плоскостей проекций. Они подразделяются на прямые:

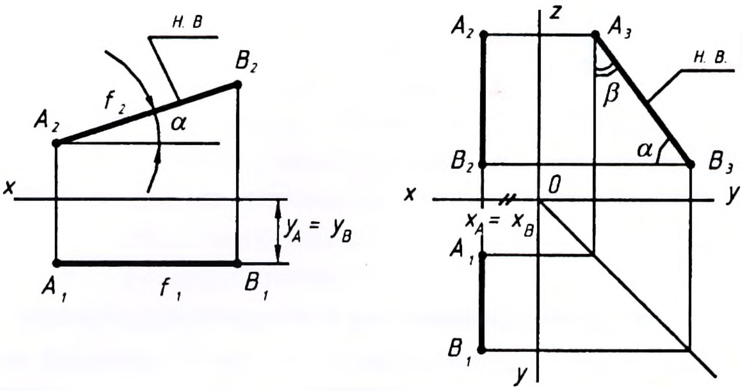
1. Горизонтального уровня
   $AB \parallel \Pi_1$
   (рис. 2.3)
2. Фронтального уровня
   $AB \parallel \Pi_2$
   (рис. 2.4)
3. Профильного уровня
   $AB \parallel \Pi_3$



$Z_A = Z_B$,
$A_2B_2 \parallel x$, $\beta = \widehat{AB\,\Pi_2}$

Рисунок 2.3

$y_A = y_B$
$A_1B_1 \parallel x$
$\alpha = \widehat{AB\,\Pi_1}$



$x_A = x_B$
$A_2B_2 \parallel z$,
$A_1B_1 \parallel y$

Рисунок 2.4

Прямые ∈ одной из плоскостей проекций называются прямыми нулевого уровня.

$AB \in \Pi_1$ $\qquad$ $CD \in \Pi_2$

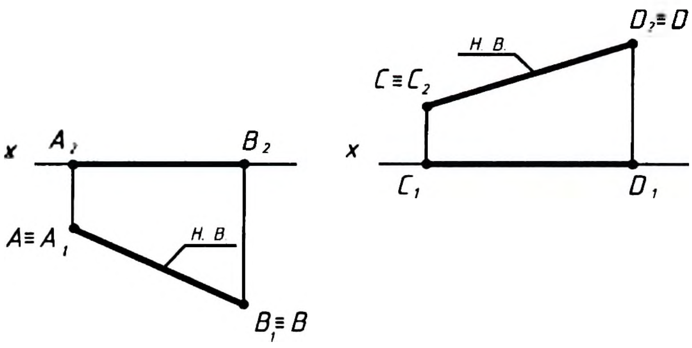


Рисунок 2.5

<u>Проецирующие</u> прямые – это прямые ⊥ к одной из плоскостей проекций (и || двум другим плоскостям проекций).

<u>Проецирующие прямые</u>

1. Горизонтально-проецирующие
   $AB \perp \Pi_1$
   $A_2B_2 \perp x$
   $\alpha = 90^0$, $\beta = 0$
2. Фронтально-проецирующие
   $CD \perp \Pi_2$
   $C_1D_1 \perp x$
   $\alpha = 0$, $\beta = 90^0$
3. Профильно-проецирующие
   $AB \perp \Pi_3$
   $A_1B_1 \perp y$, $A_2B_2 \perp z$
   $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 90^0$

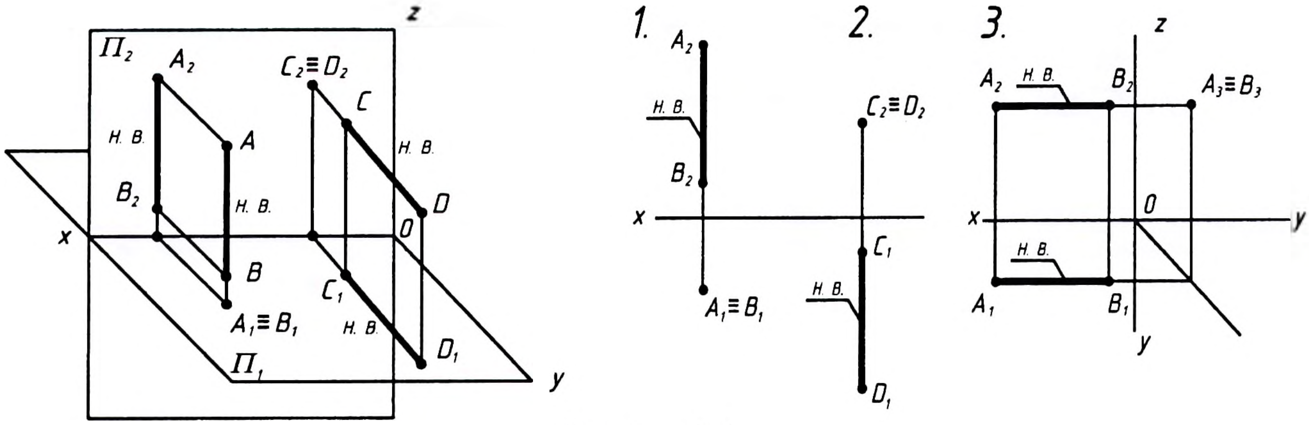
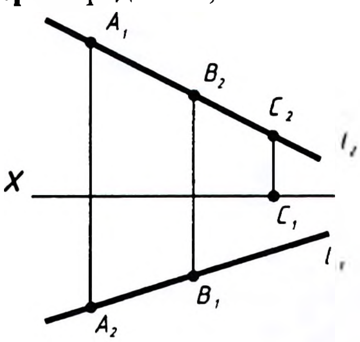


Рисунок 2.6

1.3. Точка на прямой

Аксиома (принадлежности). Если точка принадлежит прямой, то одноименные проекции точки принадлежат одноименным проекциям прямой.

Пример. Определить, какие из заданных точек $\in$ прямой L.



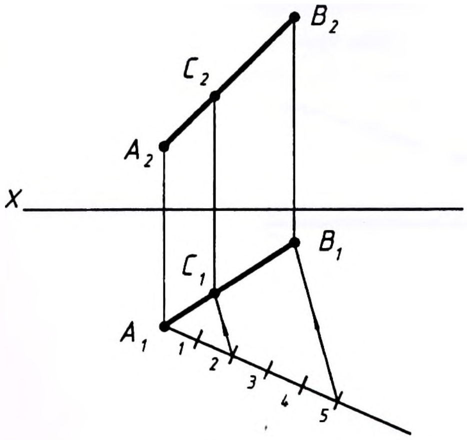
B $\in$ l,
т. к. $B_1 \in l_1$, $B_2 \in l_2$

Рисунок 2.7

1.4. Деление отрезка в данном отношении

Теорема. Если точка делит отрезок прямой в данном отношении, то проекции этой точки делят проекции данной прямой в том же отношении.

Пример. Разделить отрезок АВ точкой С в отношении 2:3, считая от точки А.



AC : CB=2:3

Рисунок 2.8

Из горизонтальной проекции точки А проводим вспомогательную прямую и откладываем на ней 5(2+3) отрезков произвольной длины, но равных между собой.

Проводим отрезок $5B_1$ и | | ему через точку 2 проводим прямую до пересечения с горизонтальной проекцией прямой A_1B_1. Получаем проекцию точки C_1 и затем точку C_2, таким образом, точка С делит отрезок АВ в отношении 2:3.

Для профильных прямых необходима проверка по третьей проекции.

1.5. Следы прямой

Следом прямой называется точка пересечения прямой с плоскостью проекций.

Прямая общего положения в системе трех плоскостей проекций имеет три следа: горизонтальный, фронтальный и профильный.

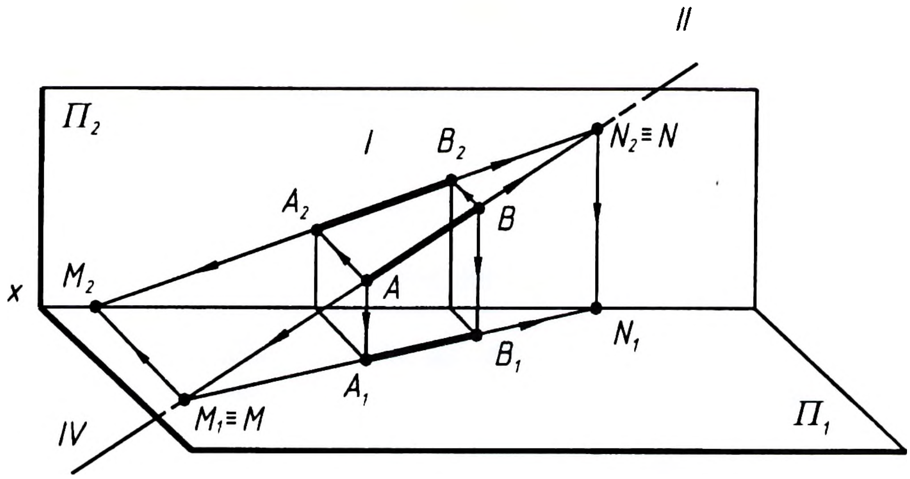


Рисунок 2.9

Прямая не имеет следа на плоскости проекций, если она || этой плоскости проекций. Для построения горизонтального следа прямой необходимо продолжить прямую до пересечения с горизонтальной плоскостью проекций $П_1$, при этом горизонтальная проекция горизонтального следа M_1 совпадает с самим следом M, а фронтальная проекция горизонтального следа M_2 лежит на оси проекций x. Аналогично, для построения фронтального следа N необходимо продолжить прямую до пересечения с фронтальной плоскостью проекций, при этом фронтальная проекция N_2 фронтального следа N совпадает с самим следом, а горизонтальная проекция фронтального следа N_1 лежит на оси проекций.

Правило. Чтобы построить горизонтальный след прямой M, необходимо фронтальную проекцию прямой продолжить до пересечения с осью x и получить фронтальную проекцию горизонтального следа M_2. Из полученной точки восстановить или опустить ⊥ до пересечения с продолжением горизонтальной проекции прямой. Получаем горизонтальный след M, совпадающий с ее горизонтальной проекцией M_1.

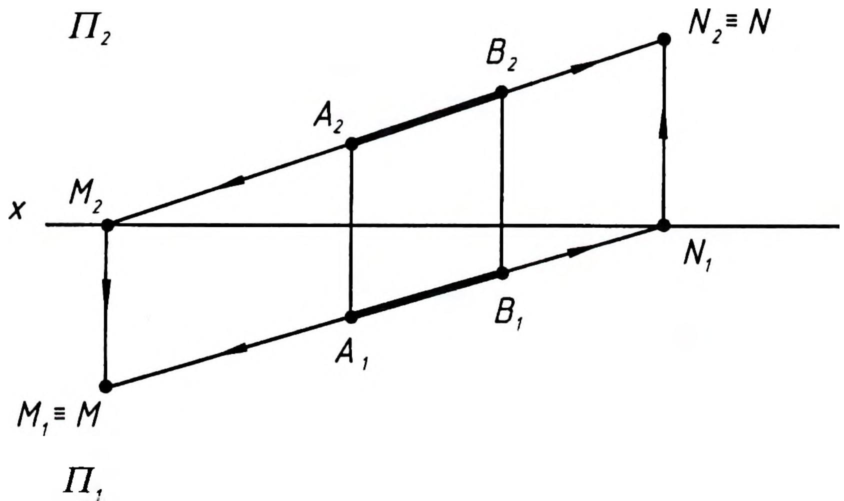


Рисунок 2.10

2. Проекции плоскости

Плоскость можно рассматривать как совокупность последовательных положений прямой линии *l*, проходящей через неподвижную точку S пространства и скользящей по некоторой неподвижной прямой m.

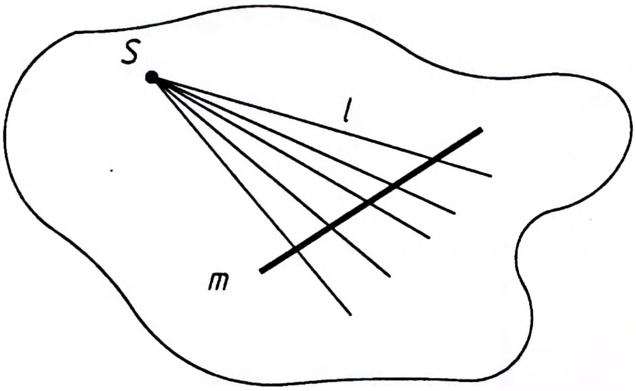


Рисунок 2.11

2.1. Способы задания плоскости

Плоскость в пространстве безгранична. Плоскость общего положения на эпюре задается (рис. 2.12):

1. Тремя точками, не лежащими на одной прямой.
2. Прямой и точкой вне ее.
3. Двумя пересекающимися прямыми.
4. Двумя параллельными прямыми.
5. Отсеком плоскости.
6. Следами.

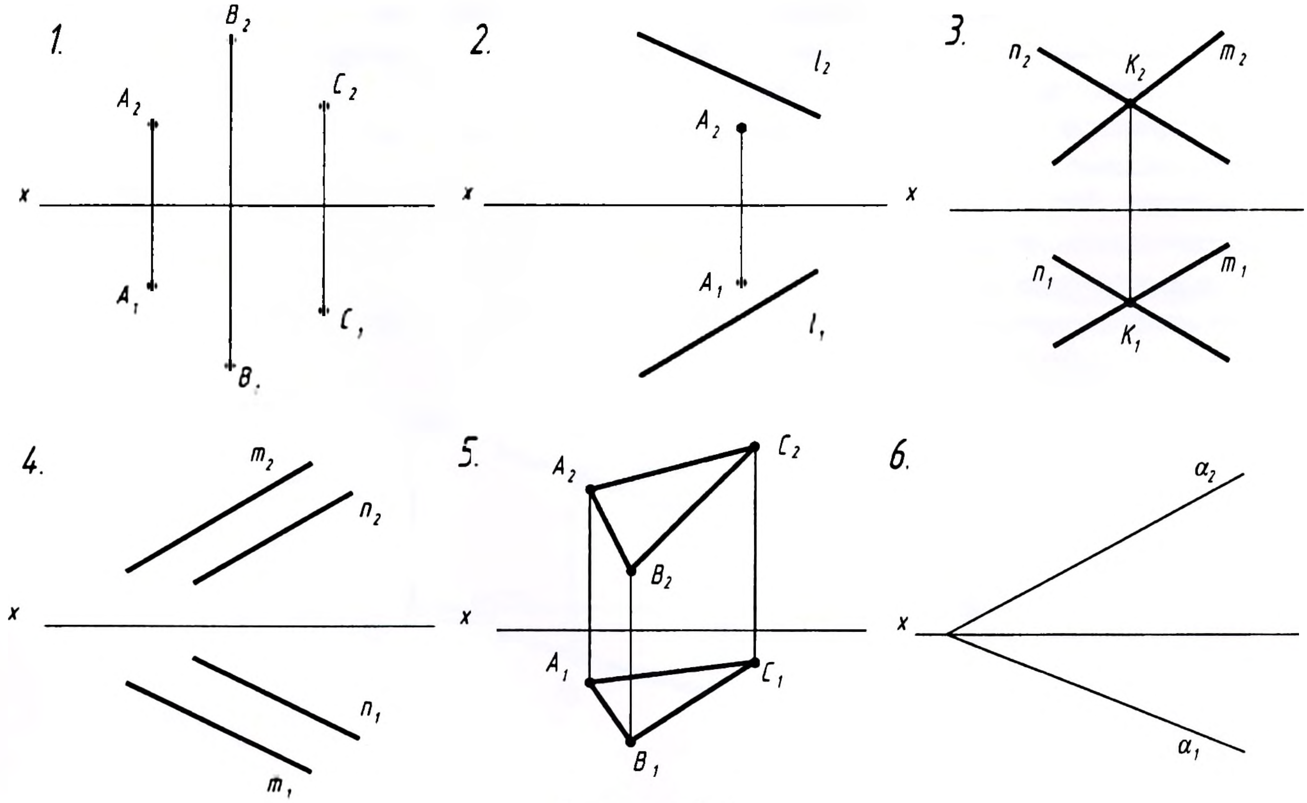


Рисунок 2.12

Примечание: при решении задач можно перейти от одного способа задания плоскости к другому.

2.2. Следы плоскости

Следом плоскости называется линия пересечения плоскости с плоскостями проекций.

Плоскости общего положения в системе трех плоскостей проекций имеют три следа: горизонтальный – α_1, фронтальный – α_2, профильный – α_3. В системе двух плоскостей проекций – два следа: горизонтальный – α_1, фронтальный – α_2; α_x, α_y, α_z – точки схода следов.

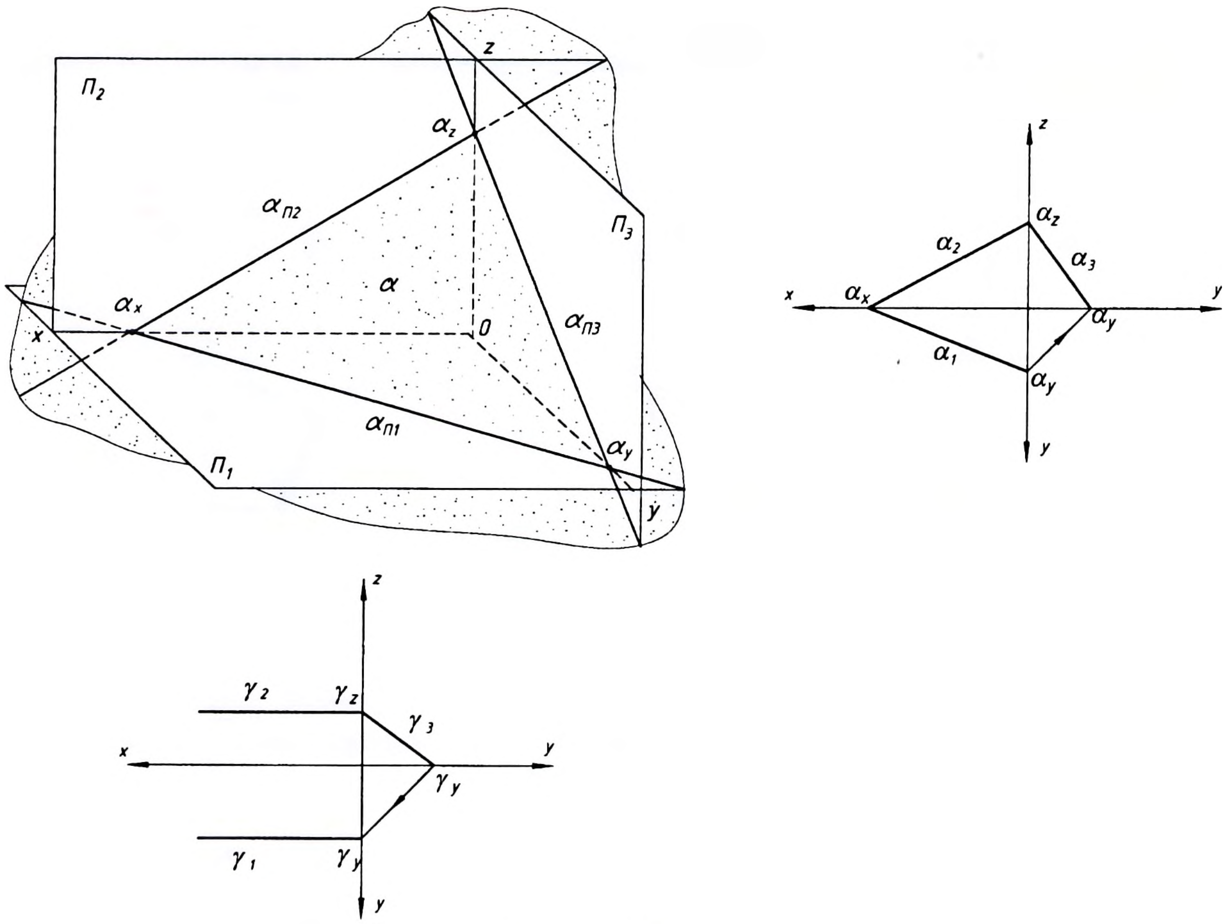


Рисунок 2.13

2.3. Классификация плоскостей

В зависимости от положения плоскости в пространстве они подразделяются на:

плоскости

общего положения — плоскости не | | и не ⊥ ни одной из плоскостей проекций

и

частного положения:
- уровня
- проецирующие

Плоскости уровня – плоскости | | одной из плоскостей проекций (и ⊥ двум другим плоскостям проекций) (рис. 2.14).

1. Горизонтального уровня. ABC | | Π_1
2. Фронтального уровня. DEF | | Π_2
3. Профильного уровня. KLM | | Π_3

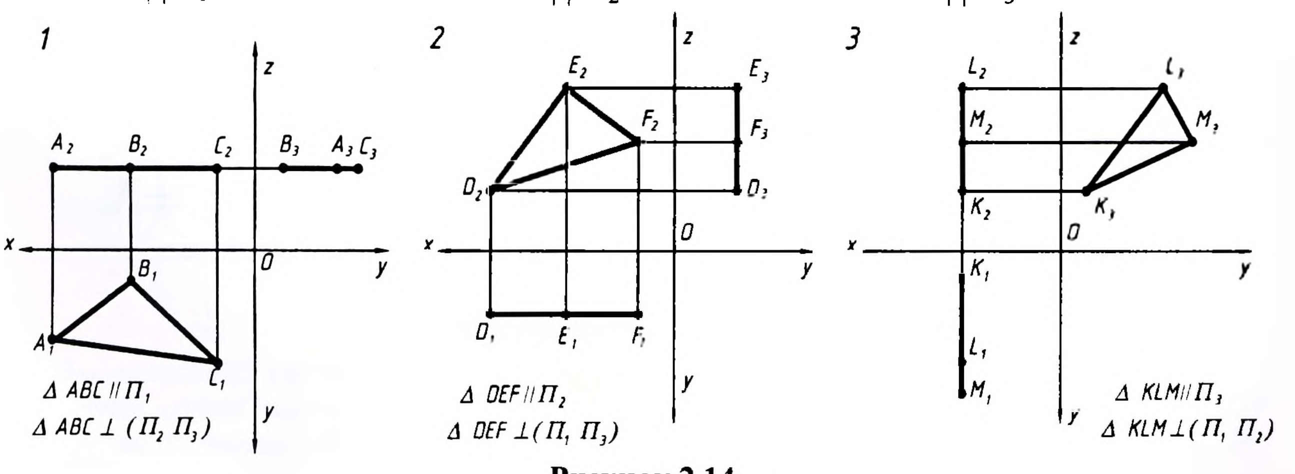


Рисунок 2.14

Плоскости <u>проецирующие</u> – плоскости ⊥ одной из плоскостей проекций (рис. 2.15).

1. Горизонтально проецирующие DEF⊥ $П_1$
2. Фронтально проецирующие ABC ⊥ $П_2$
3. Профильно проецирующие ABC ⊥ $П_3$

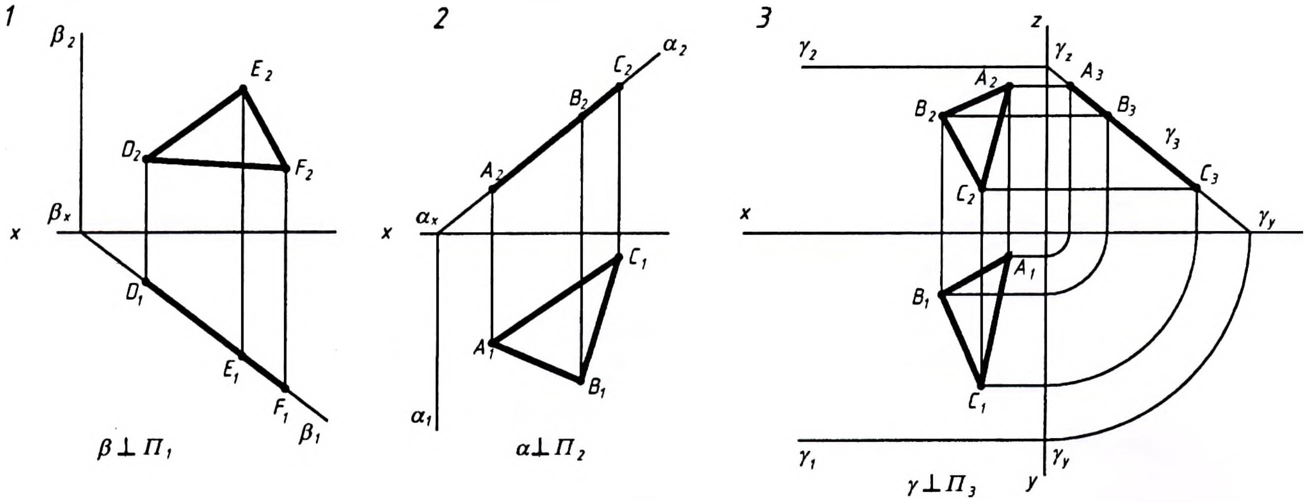


Рисунок 2.15

Плоскости частного положения обладают собирательным свойством: проекции точек, линий, плоских фигур, лежащих в плоскости, проецируются на соответствующие следы плоскости.

2.4. Линии в плоскости

Прямая принадлежит плоскости, если она проходит:

- через две точки, принадлежащие плоскости (рис. 2.16);
- через точку, принадлежащую данной плоскости, и параллельна прямой, находящейся в данной плоскости или параллельной ей.

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в плоскости.

2.5. Главные линии плоскости

Горизонталь (h_1,h_2) – прямая, лежащая в плоскости и | | горизонтальной плоскости проекций (линия уровня), (рис. 2.26, а).

Фронталь (f_1,f_2) – прямая, лежащая в плоскости и | | фронтальной плоскости проекций (линия уровня), (рис. 2.26, б).

Профиль (p_1,p_2) – прямая, лежащая в плоскости и | | профильной плоскости проекций (линия уровня).

Линия наибольшего ската (c_1,c_2) – прямая, лежащая в плоскости и ⊥ линиям уровня плоскости (с - л.н.с. к пл. П) (рис. 2.16, б).

а) б)

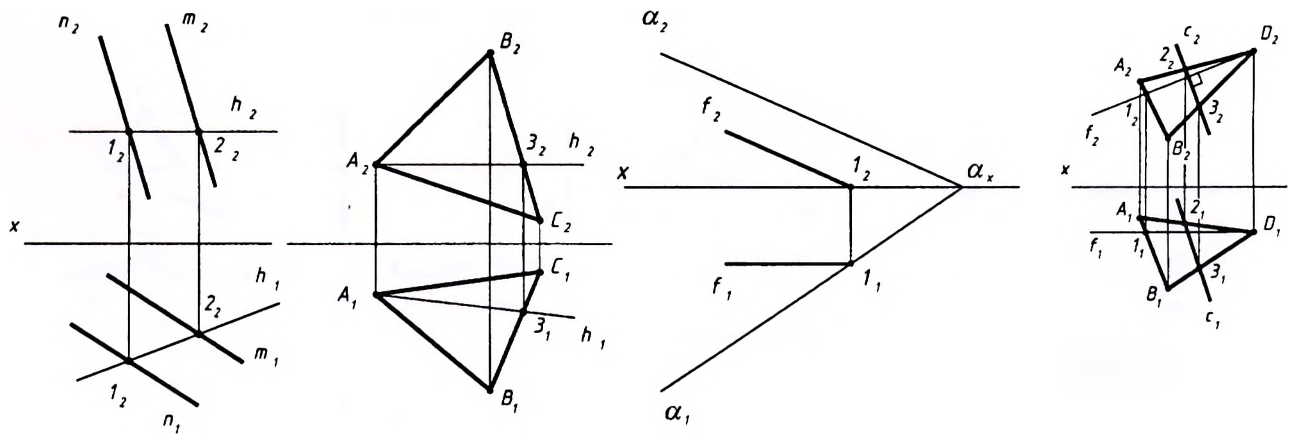


Рисунок 2.16

РАЗДЕЛ II. Тема: «Позиционные задачи»

Лекция № 3. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

План лекции

1. Взаимная принадлежность точек, прямых и плоскостей.
2. Взаимное положение прямых.
   2.1. Параллельные прямые.
   2.2. Пересекающиеся прямые.
   2.3. Скрещивающиеся прямые.
3. Взаимное пересечение геометрических фигур.
4. Взаимное положение прямой и плоскости.
   4.1. Частные случаи пересечения (прямая | | плоскости, прямая ⊥ плоскости).
   4.2. Прямая, пересекающая плоскость.

1. Взаимная принадлежность точек, прямых и плоскостей

Позиционными задачами называются задачи, связанные с определением на комплексном чертеже взаимного расположения заданных геометрических фигур, включая задачи на взаимную принадлежность и на взаимное пересечение.

<u>1 группа задач</u>

1. Принадлежность точки прямой (свойство параллельного проецирования).
2. Принадлежность точки плоскости (строится линия,∈ плоскости).
3. Принадлежность точки поверхности (строится линия, ∈ поверхности).

<u>2 группа задач</u>

Принадлежность линии плоскости и поверхности.

<u>3 группа задач</u>

Принадлежность плоскости поверхности (невозможно в общем случае – исключение гранная поверхность, но тогда происходит совпадение плоскостей). В общем случае возможно только касание – предельное положение пересечения.

Пример. Определить, ∈ или нет точка D плоскости, заданной Δ ABC (см. 1 группу задач).

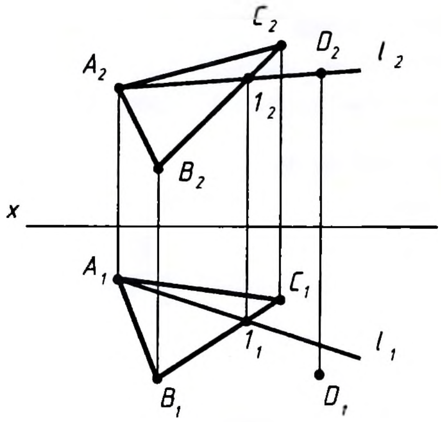


Рисунок 3.1

D∈ пл. Δ ABC – ?
<u>Ход решения:</u>
Допустим, что D∈ пл. Δ ABC, тогда она должна ∈ прямой, например, прямой l, этой плоскости.
<u>Ответ:</u>
D не ∈ пл. Δ ABC, т.к. $D_2 \in l_2$, а D_1 не∈ l_1.

Если одноименные проекции точки ∈ одноименным проекциям прямой, лежащей в плоскости, то и точка ∈ заданной плоскости.

2. Взаимное положение прямых

Возможны три случая взаимного положения прямых:

1. Прямые параллельны.
2. Прямые пересекаются.
3. Прямые скрещиваются.

2.1. Параллельные прямые

Если в пространстве прямые | |, то их одноименные проекции тоже параллельны.

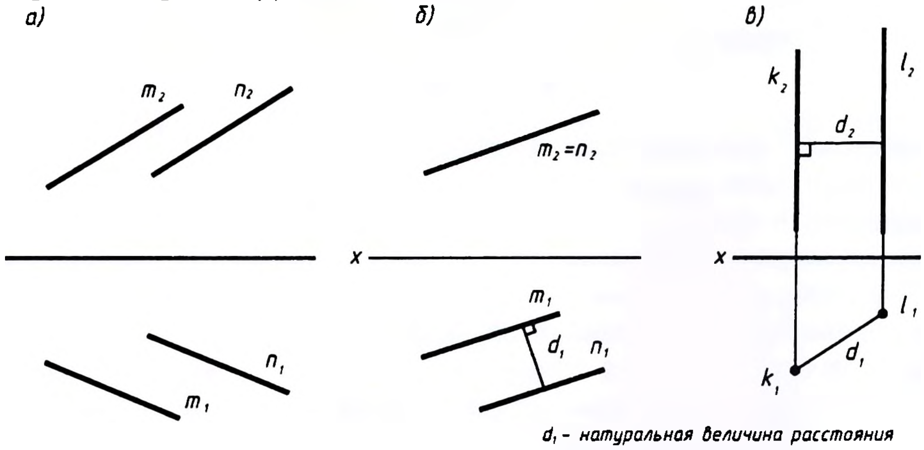


Рисунок 3.2

Исключением являются прямые частного положения, например, прямые профильного уровня.

Пример. Определить, параллельны ли отрезки прямых AB и CD.

Ответ: не | |.

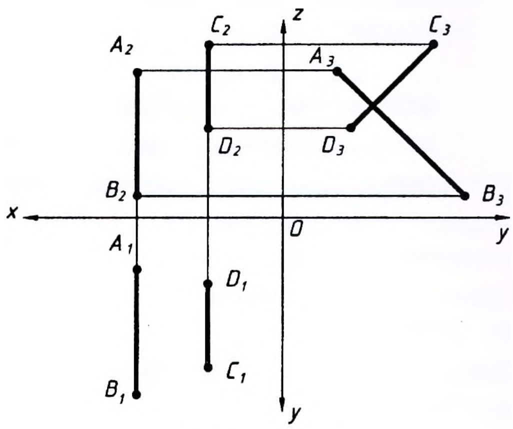


Рисунок 3.3

2.2. Пересекающиеся прямые

Если в пространстве прямые пересекаются, то на чертеже пересекаются их одноименные проекции и точки пересечения одноименных проекций лежат на одной линии связи (рис. 3.4).

2.3. Скрещивающиеся прямые

Это прямые не | | и непересекающиеся (т. е. не лежащие в одной плоскости). Если в пространстве прямые скрещиваются, то на чертеже их одноименные проекции пересекаются, но точки пересечения одноименных проекций не лежат на одной линии связи (рис. 3.5).

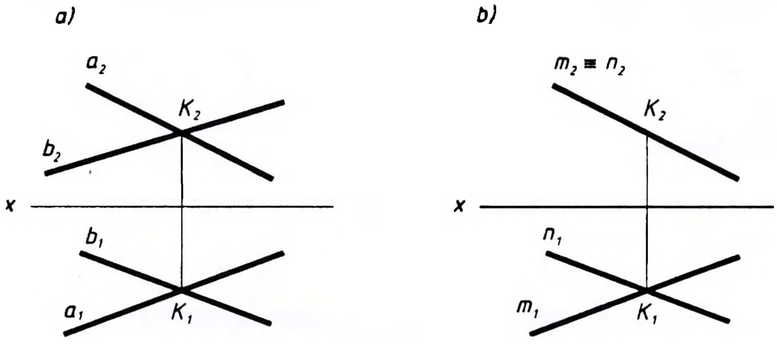


Рисунок 3.4

Видимость скрещивающихся прямых определяется с помощью конкурирующих точек

1, 2 – горизонтально-конкурирующие точки (лежат на горизонтально – проецирующем луче),

3, 4 – фронтально-конкурирующие точки (лежат на фронтально – проецирующем луче).

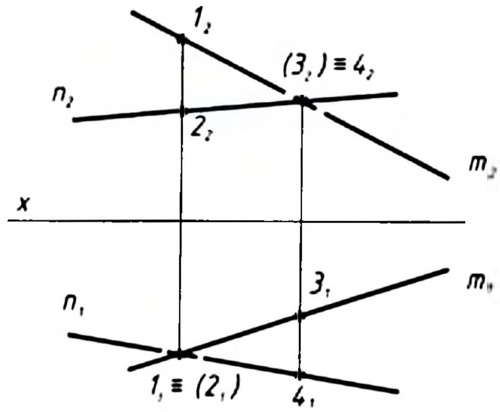


Рисунок 3.5

3. Взаимное пересечение геометрических фигур

1. Пересечение прямой с плоскостью.
2. Пересечение прямой с поверхностью.
3. Пересечение плоскости с плоскостью.
4. Пересечение плоскости с поверхностью.
5. Пересечение поверхности с поверхностью.

4. Взаимное положение прямой и плоскости

- Прямая может $\in$ плоскости (см. лекцию № 2).
- Прямая может пересекать плоскость.

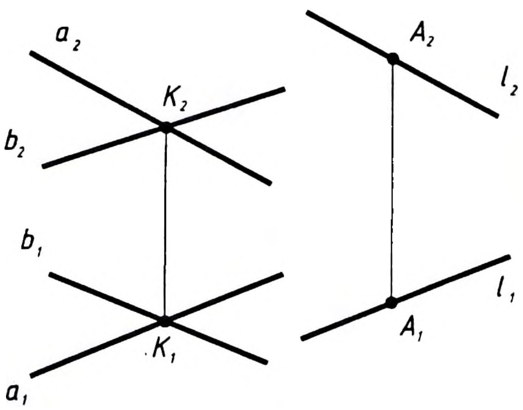
4.1. Частные случаи пересечения

а) прямая | | плоскости (пересекает плоскость в ∞),
в) прямая $\perp$ плоскости.

Прямая || плоскости

Прямая | | плоскости, если она || любой прямой, $\in$ плоскости.

Пример. Через точку А провести прямую | | заданной плоскости.



Ход решения:
Проводим l_1 | | a_1 (через A_1), l_2 | | a_2 (через A_2), значит прямая l | | заданной плоскости.

Рисунок 3.6

4.2. Прямая, пересекающая плоскость

При решении задач можно выделить три случая:

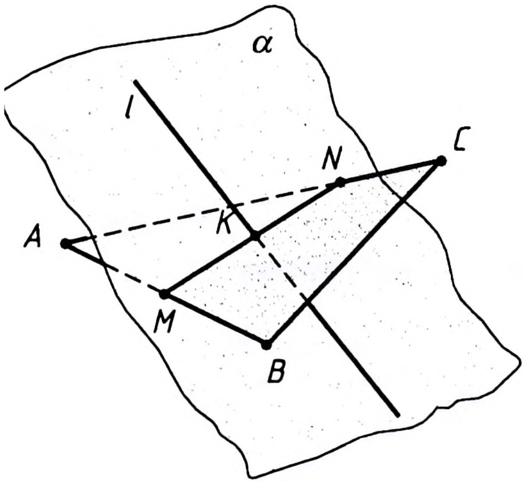
1. Прямая общего положения и плоскость частного положения.
2. Прямая частного положения и плоскость общего положения.
3. Прямая и плоскость общего положения.

Рассмотрим третий общий случай. Задача по определению точки пересечения (встречи) прямой с плоскостью является одной из основных задач начертательной геометрии.

Алгоритм решения задачи

1. Заключаем прямую во вспомогательную плоскость (частного положения) – плоскость-«посредник».
2. Определяем линию пересечения заданной плоскости со вспомогательной плоскостью.
3. Определяем точку пересечения заданной прямой с заданной плоскостью как точку пересечения заданной прямой с линией пересечения плоскостей – вспомогательной и заданной.

Рассмотрим пространственный чертеж.



1. $\alpha \subset l$
2. $\alpha \cap (ABC) = MN$
3. $MN \cap l = K$

Рисунок 3.7

Пример. Определить точку пересечения прямой с плоскостью.

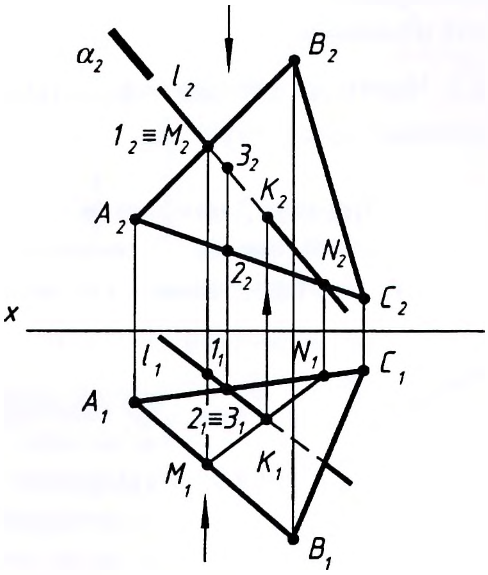


Рисунок 3.8

Запишем алгоритм решения задачи:

1. Заключаем прямую l во вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость $\alpha \perp \Pi_2$, при этом $\alpha_2 \subset l_2$ (совпадает).
2. Находим проекции линии пересечения плоскости α и Δ ABC = M_1N_1 и M_2N_2.
3. Определяем проекции точки K (K_1, K_2) на пересечении l_1 и M_1N_1 – K_1, $K_2 \in l_2$.
4. Определяем видимость прямой.

Точка K – всегда видимая (т. к. является общей для геометрических образов). Для определения видимости на фронтальной проекции возьмем пару фронтально – конкурирующих точек, например, 1 и M. Эти точки лежат на фронтально-проецирующем луче. Фронтальные проекции точек совпадают $1_2 \equiv M_2$, а горизонтальная проекция точки M расположена ближе к наблюдателю, чем точки 1, значит прямая AB расположена ближе, чем прямая l, а следовательно на фронтальной проекции прямая l до точки K не будет видна.

Для определения видимости на горизонтальной плоскости проекций поступаем аналогично, выбирая горизонтально-конкурирующую пару точек (2, 3) (рис. 3.8).

Пример. Определить точку пересечения прямой с плоскостью, заданной следами (общий случай). Применяем алгоритм решения основной задачи начертательной геометрии (рис. 3.9). Видимость определяется аналогично.

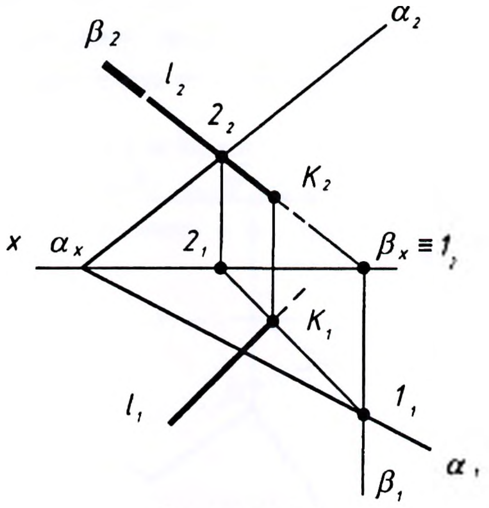


Рисунок 3.9

Пример. Определить точку встречи прямой с плоскостью.
1 – проецирующей плоскости с прямой общего положения, 2 и 3 проецирующей прямой с плоскостью общего положения.

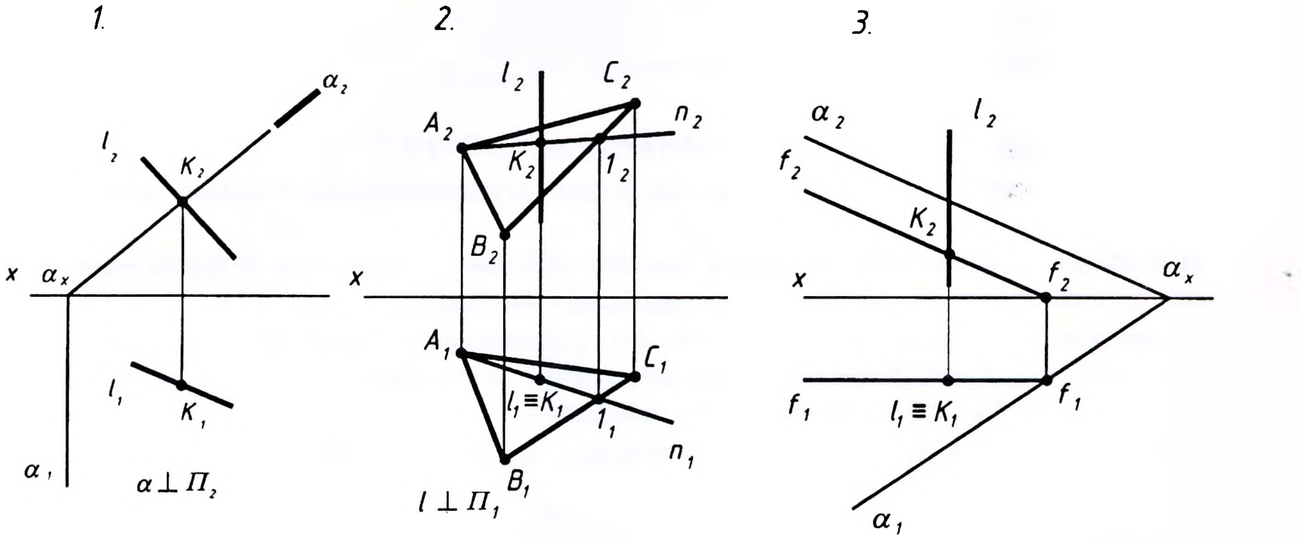


Рисунок 3.10

В первом примере используем свойство проецирующих плоскостей: (любой геометрический образ, ∈ плоскости частного положения, проецируется на след этой плоскости). Во втором примере горизонтальная проекция точки пересечения совпадает с горизонтальной проекцией прямой ($K_1 = l_1$). Для нахождения фронтальной проекции точки K_2 проводим через точку K прямую,∈ плоскости, например, n (n_1, n_2). Третий пример аналогичен второму (для решения используем фронталь f).

Лекция № 4. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ (продолжение)

План лекции

1. Теорема о проецировании прямого угла.
2. Прямая ⊥ плоскости.
3. Взаимное положение плоскостей.

4. Частные случаи пересечения:
   4.1. Параллельность плоскостей.
   4.2. Пересекающиеся плоскости.
   4.3. Перпендикулярность плоскостей.

1. Теорема о проецировании прямого угла

Теорема. Прямой угол проецируется на плоскость проекций в натуральную величину (без искажения), если одна из его сторон | | этой плоскости проекций, а вторая не ⊥ к ней (рис. 4.1,а).

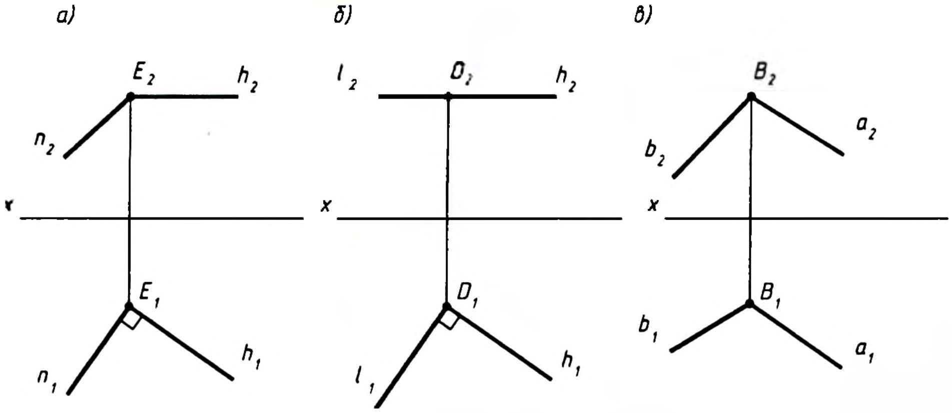


Рисунок 4.1

Возможны следующие случаи проецирования прямого угла.

- Если обе стороны угла | | какой-либо плоскости проекций, то угол проецируется на эту плоскость в натуральную величину (рис. 4.1, б).
- Если обе стороны прямого угла будут прямыми общего положения, то прямой угол проецируется на плоскости проекций с искажением (рис. 4.1, в).

2. Прямая ⊥ плоскости

Теорема. Прямая ⊥ плоскости, если она ⊥ двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

В качестве пересекающихся прямых обычно выбирают горизонталь и фронталь плоскости. (В этом случае используется теорема о проецировании прямого угла).

Следствие. Если прямая ⊥ плоскости, то горизонтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна фронтальной проекции фронтали.

Пример. Из точки D опустить перпендикуляр к плоскости Δ ABE.

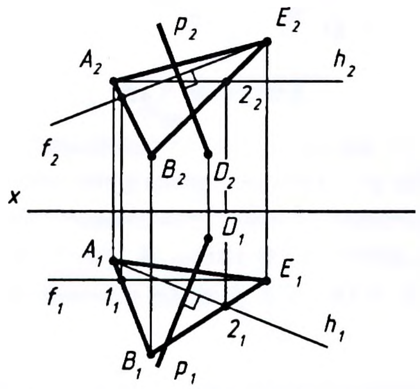


Рисунок 4.2

На рисунке 4.2 построены только направления перпендикуляра. Далее можно определить расстояние от точки D до плоскости Δ ABE, для чего необходимо определить точку пересечения этого перпендикуляра с плоскостью, т. е. его основание, и затем найти натуральную величину этого перпендикуляра (рассмотрим позднее).

3. Взаимное положение плоскостей

- Плоскости могут ∈ плоскости.
- Плоскости могут пересекаться.

4. Частные случаи пересечения:

- Плоскости | | (пересекаются в бесконечности).
- Плоскости взаимно перпендикулярны, т. е. пересекаются под прямым углом.

4. 1. Параллельность плоскостей

Признак. Две плоскости | | между собой, если две пересекающиеся прямые одной плоскости | | двум пересекающимся прямым другой плоскости (рис. 4.3).

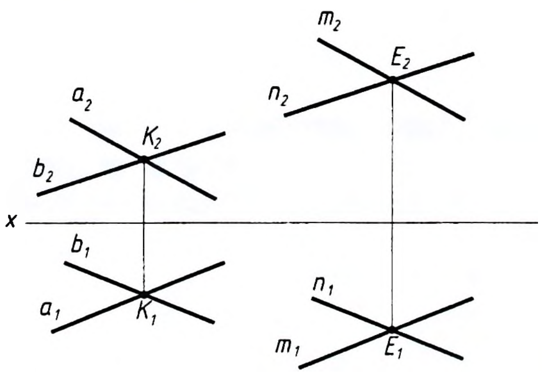


Рисунок 4.3

Следствие. Если две плоскости в пространстве | |, то на чертеже | | одноименные следы плоскостей (рис. 4.4), а также их горизонтали и фронтали (рис. 4.5).

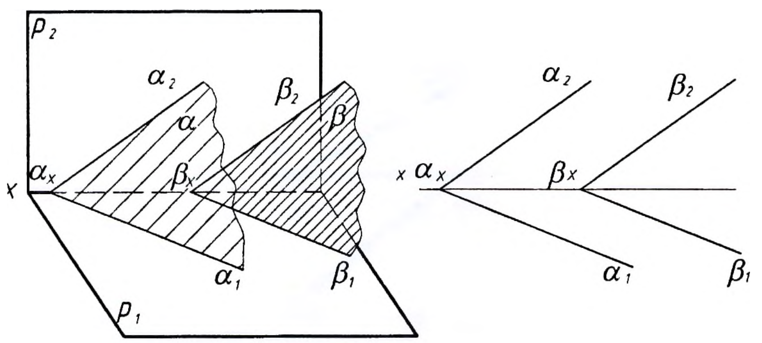


Рисунок 4.4

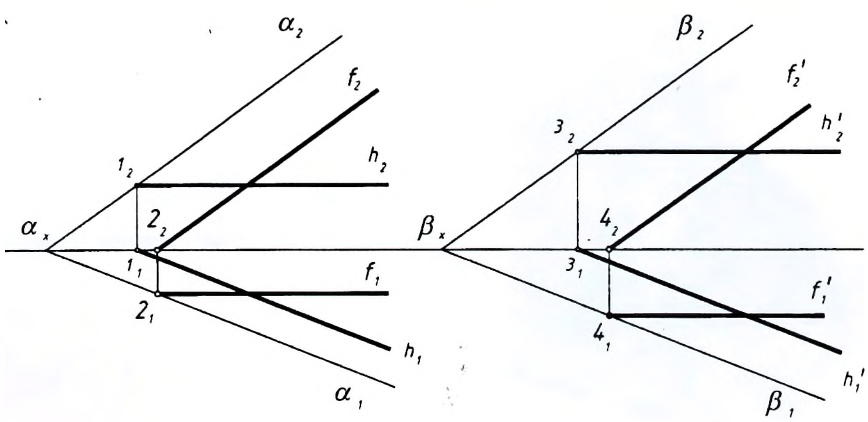
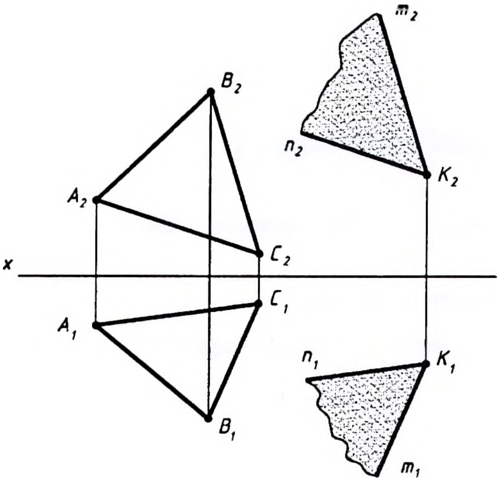


Рисунок 4.5

Пример. Через точку K построить плоскость β | | - ую плоскости Δ ABC.



Проводим
через K_2:
$m_2 \,||\, B_2C_2$,
$n_2 \,||\, A_2C_2$.

через K_1:
$m_1 \,||\, B_1C_1$,
$n_1 \,||\, A_1C_1$.
Значит плоскости | | между собой.

Рисунок 4.6

4.2. Пересекающиеся плоскости

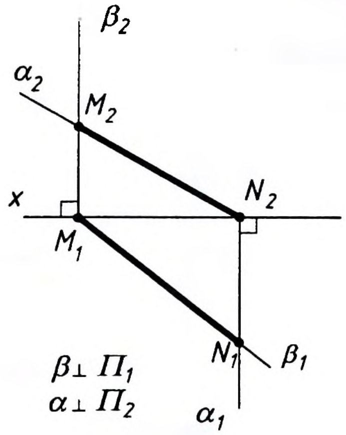
Две плоскости пересекаются по прямой, для построения которой необходимо определить две точки,∈ одновременно каждой из пересекающихся плоскостей, либо одну общую точку, если известно направление линии пересечения.

При решении задач можно выделить 3 случая:

а) Обе плоскости частного положения.
б) Одна плоскость частного положения, а вторая общего.
в) Обе плоскости общего положения.

Пример. Построить линию пересечения плоскостей α и β.

а)



б)

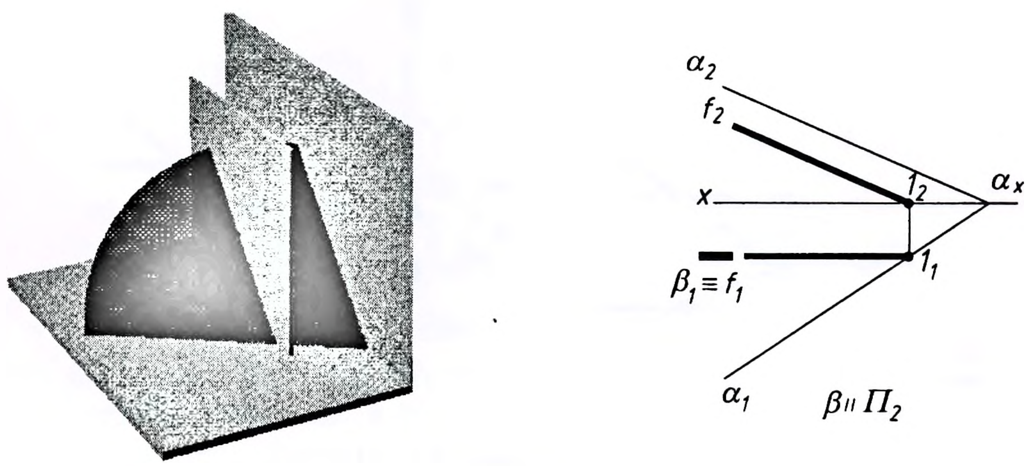


Рисунок 4.7

Пример. Построить линию пересечения плоскостей
α (Δ ABC) и β (m || n).

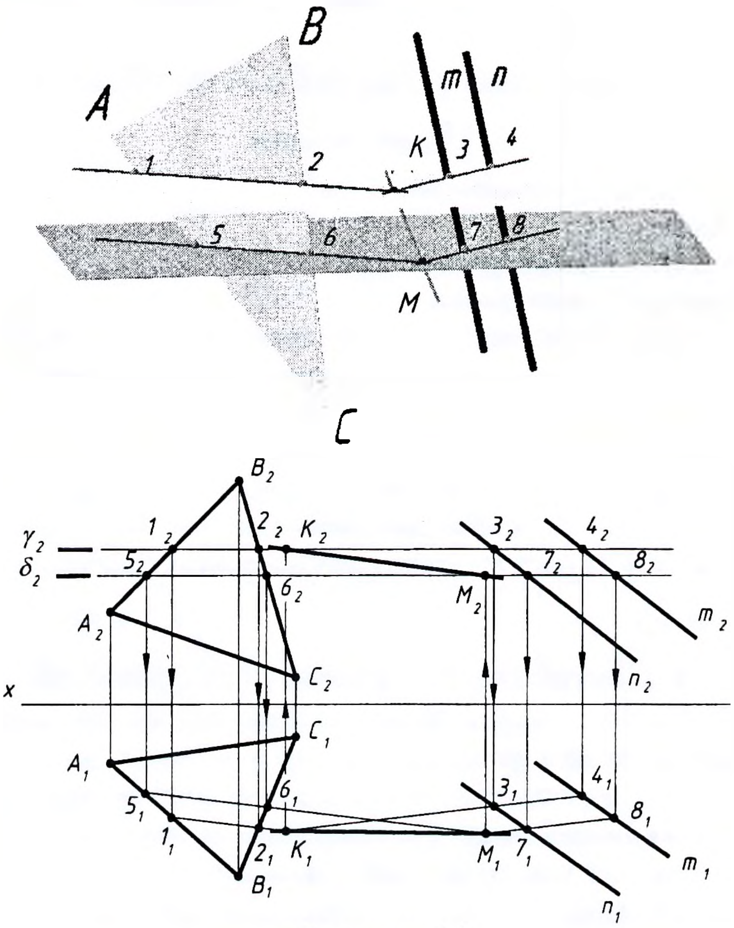


Рисунок 4.8

<u>Ход решения:</u>

1. Вводим плоскость-«посредник» γ (обычно плоскость частного положения, уровня или проецирующую).
2. Находим проекции линии пересечения плоскостей γ и α = 1, 2.
3. Находим проекции линии пересечения плоскостей γ и β = 3, 4.
4. Находим проекции точки K= 1, 2 $\cap$ 3, 4. K – точка общая для 3-х плоскостей α, β и γ.

Определяем вторую общую точку, например, M.
Повторяем алгоритм решения задачи, вводим плоскость - посредник δ.

4.3. Перпендикулярность плоскостей

Теорема. Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой плоскости.

Пример. Через точку E построить плоскость β, $\perp$-ую плоскости α (Δ ABC).

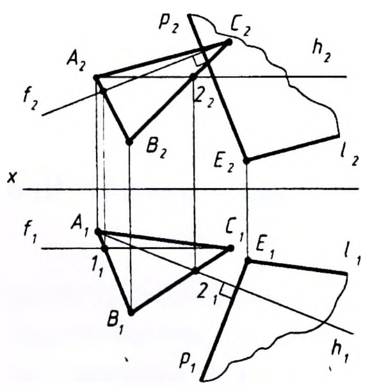


Рисунок 4.9

<u>Ход решения:</u>

1. Из точки E опускаем $\perp$ к пл. α, для этого строим:

а) h и f $\in$ α (Δ ABC),

б) $p_2 \perp f_2$,

в) $p_1 \perp h_1$,

2. Проводим l_1 || A_1C_1.
3. Проводим l_2 || A_2C_2.

Плоскость β $\perp$- на плоскости α (Δ ABC), т. к. проходит через $\perp$ к плоскости α (рис. 4.9).

РАЗДЕЛ III. Тема «Способы преобразования проекций. Метрические задачи»

Лекция № 5. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ

План лекции

1. Способ замены плоскостей проекций.
2. Способы вращения.
   2.1. Вращение вокруг проецирующих осей.
   2.2. Вращение вокруг линии уровня.
   2.3. Совмещение (вращение вокруг следов плоскости, как частный случай способа 2.2).
   2.4. Плоскопараллельное перемещение (вращение вокруг невыявленных осей).

Решение многих позиционных и метрических задач упрощается, если объекты проецирования располагаются частным образом относительно плоскостей проекций.

Если проекции геометрических элементов или фигур заданы в общем виде, то для перевода их в частное положение используют способы преобразования проекций (или способы преобразования чертежа).

1. Способ замены плоскостей проекций

Суть способа заключается в том, что объект проецирования остается неподвижным, а плоскости проекций заменяют, причем не одновременно, а последовательно, т. е. одна из плоскостей заменяется новой, а вторая остается без изменений. Между новой и старой плоскостями проекций соблюдается ортогональность (т. е. плоскости должны быть взаимно перпендикулярны). Преобразование проекций некоторой геометрической фигуры связано с преобразованием проекций точек, $\in$ данной фигуре. Поэтому рассмотрим, какие изменения претерпевают проекции отдельной точки при переходе от одной системы плоскостей проекций к другой.

Рассмотрим систему взаимно перпендикулярных плоскостей $П_1$ и $П_2$.Вычертим пространственную модель.

Заменим фронтальную плоскость проекций $П_2$ на $П_4$.

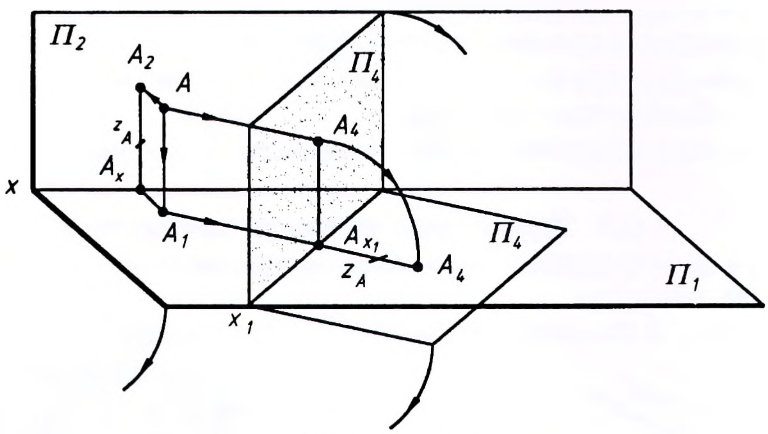


Рисунок 5.1

$П_4 \perp П_1$ и $x_1 = П_4 \cap П_1$.

Примечание. Фронтальные плоскости проекций имеют четные индексы $П_2$, $П_4$ и т.д. Горизонтальные плоскости проекций нечетные – $П_1$, $П_5$ и т. д.

Найдем фронтальную проекцию точки А – A_4.

Линии проекционной связи $\perp$ новой оси x_1,

$A_1 A_{x1} \perp x_1$,

$A_4 A_{x1} \perp x_1$.

$A_2 A_x = A A_1 = A_4 A_{x1} = z_A$

Совмещаем плоскость $П_4$ с $П_1$ и далее с $П_2$.

Построим эпюр точки. От системы x $П_2 / П_1$ переходим к системе x_1 $П_4 / П_1$.

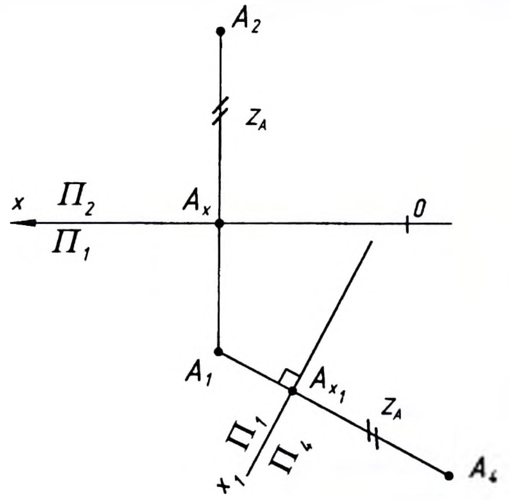


Рисунок 5.2

Правило: расстояние от новой оси до новой проекции точки равно расстоянию от старой проекции точки до старой оси. Значит, от новой оси x_1 откладываем координату Z_A.

Аналогично можно заменить горизонтальную плоскость проекций на новую $П_5$, оставив фронтальную плоскость проекций без изменений, и найти новую горизонтальную проекцию точки A_5 . При этом координата «Y» остается неизменной.

Решение всех метрических и позиционных задач способом замены плоскостей проекций можно свести к 4 основным типовым задачам:

1. Прямую общего положения преобразовать в прямую уровня.
2. Прямую уровня преобразовать в проецирующую.
3. Плоскость общего положения преобразовать в проецирующую.
4. Плоскость проецирующую преобразовать в плоскость уровня.

Рассмотрим решение основных типовых задач на примерах.

Пример. Прямую общего положения преобразовать в прямую уровня (прямую | | одной из плоскостей проекций), т. е. найти н. в. заданной прямой.

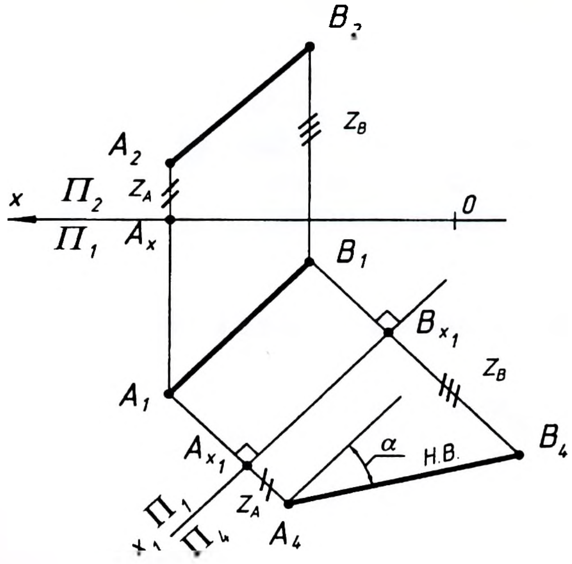


Рисунок 5.3

$П_2 \rightarrow П_4$

$П_4 \perp П_1$

$x_1 = П_4 \cap П_1$

AB | | $П_4$

(AB – прямая фр. уровня)

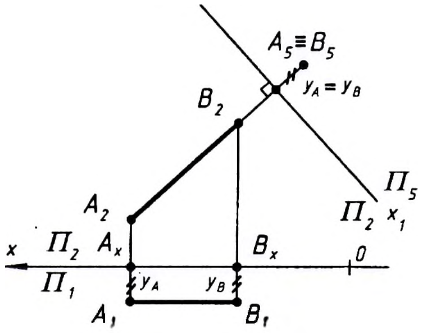
A_1 B_1 | | x_1. Для построения проекций точки A_4B_4 откладываем от новой оси координаты z для точек A и B.

A_4B_4 – н.в. AB.

Эту задачу можно также решить, заменяя горизонтальную плоскость проекций $П_1$ на $П_5$. В этом случае новую ось проводим | | фронтальной проекции прямой A_2B_2, и от новой оси откладываем координаты «Y» для точек A и B.

Пример. Прямую АВ, || одной из плоскостей проекций (т. е. прямую уровня), преобразовать в проецирующую прямую.

От системы x $П_2$ / $П_1$ переходим к системе x_1 $П_2$ / $П_5$.



$П_1 \rightarrow П_5$

$П_5 \perp П_2$

$x_1 = П_5 \cap П_2$

$AB \perp П_5$

АВ – горизонтально-проецирующая прямая

$A_2 B_2 \perp x_1$

Рисунок 5.4

Примечание: для того, чтобы прямую общего положения преобразовать в проецирующую прямую, производят две замены, т.е. решают последовательно обе задачи, первую и вторую.

Решение основных задач по преобразованию плоскостей (задачи 3 и 4) рассмотрим в следующей лекции.

2. Способы вращения

Суть способов заключается в том, что объект проецирования изменяет свое положение путем вращения вокруг некоторой оси. Плоскости проекций при этом остаются неподвижными.

В зависимости от положения оси различают следующие способы вращения:

2.1. Вращение вокруг проецирующих осей.

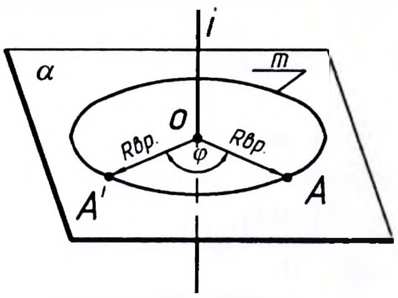
2.2. Вращение вокруг линии уровня.

2.3. Совмещение (вращение вокруг следов плоскости, как частный случай способа 2.2.)

2.4. Плоскопараллельное перемещение (вращение вокруг невыявленных осей).

2.1. Вращение вокруг проецирующих осей

При данном способе вращения объект проецирования вращается вокруг оси ⊥ фронтальной или горизонтальной плоскостям проекций.



Аппарат вращения:

i – ось вращения,

α – плоскость вращения,

i ⊥ α,

А – объект вращения,

m – окружность вращения,

O – центр вращения,

R – радиус вращения.

Рисунок 5.5

Пример. Точку А повернуть вокруг горизонтально-проецирующей оси на угол φ против часовой стрелки. Решение видно на рис. 5.6.

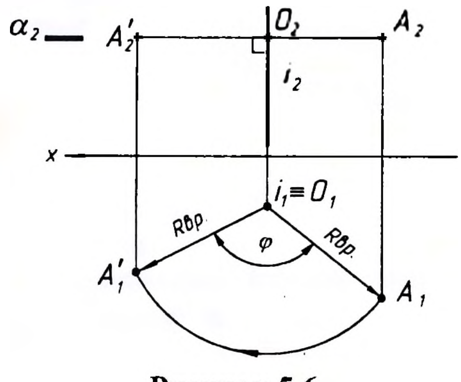


Рисунок 5.6

2.2. Вращение вокруг линии уровня

Пример. Определить н. в. угла A вращением вокруг линии уровня.

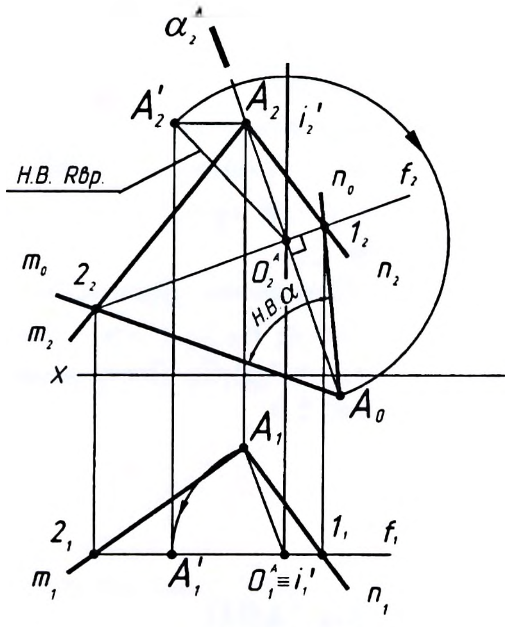


Рисунок 5.7

<u>Аппарат вращения:</u>
f – ось вращения (фронталь),
$i \equiv f$,
A – объект вращения,
α – плоскость вращения, ($\alpha_2 \perp f_2$)
O – центр вращения,
OA – радиус вращения.
Натуральную величину $R_{вр}$ определяем любым способом.
В данном примере натуральную величину $R_{вр}$ определяем вращением вокруг горизонтально-проецирующей оси i'.
Далее решение видно на рис. 5.7.

2.3. Совмещение (вращение вокруг следов плоскости)

Частный случай вращения вокруг горизонтали или фронтали, т. к. следы плоскости – это нулевые горизонтали и фронтали. Если вращение происходит вокруг горизонтального следа, то плоскость совмещается с горизонтальной плоскостью проекций. Если вокруг фронтального следа, то с фронтальной плоскостью проекций.

Пример. Определить н. в. Δ ABC, $\in$ плоскости α, способом совмещения вокруг фронтального следа.

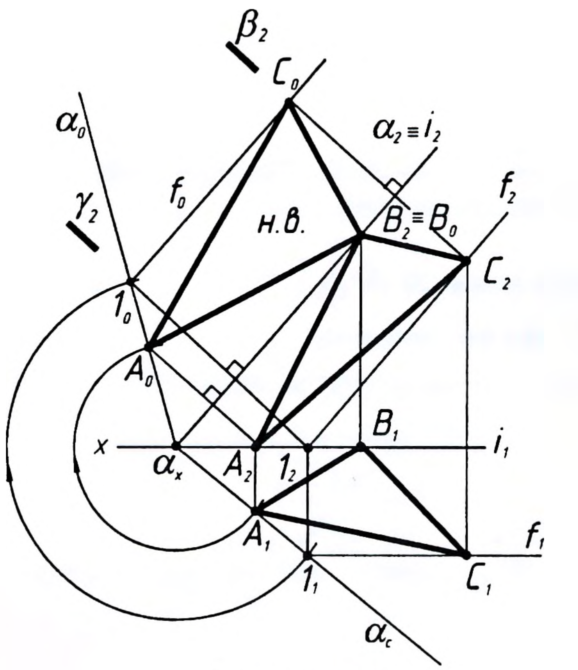


Рисунок 5.8

1. Определяем совмещенное положение горизонтального следа α_0. Для этого произвольную точку 1 вращаем вокруг α_2 (i_2) в плоскости $\gamma \perp$ оси i, получаем 1_0. α_0 пройдет через α_x и 1_0 (рис. 5.8).
2. Точки A и B $\in$ следам плоскости α в совмещенном положении: $A_0 \in \alpha_0$, $B_2 \in \alpha_2$.
3. Для нахождения совмещенного положения точки C_0 проведем через $C_1 - f_1$, затем f_0 и находим точку C_0.
4. Соединяем точки A_0 B_0 C_0 – это и есть н.в. Δ ABC.

2.4. Плоскопараллельное перемещение (вращение вокруг невыявленных осей)

Суть способа заключается в том, что плоскости проекций остаются на месте, а объект перемещается таким образом, чтобы все точки его перемещались в плоскостях, | | между собой и плоскости проекций.

Пример. Определить н.в. плоскости Δ ABC способом плоскопараллельного перемещения (преобразовать плоскость общего положения в плоскость уровня).

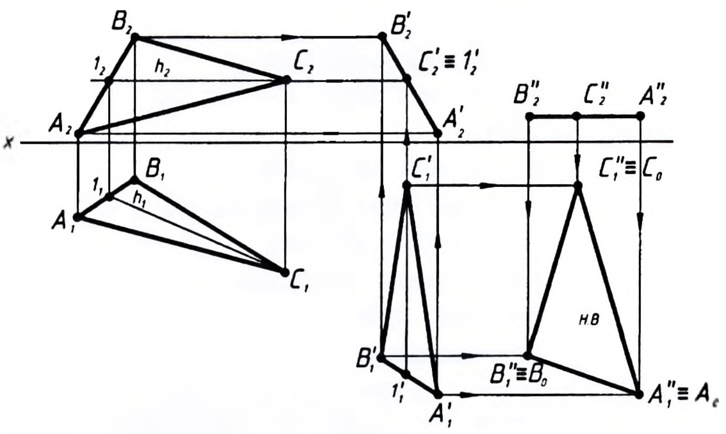


Рисунок 5.9

1. В плоскости Δ ABC проводим горизонталь h.
2. Перемещаем Δ ABC во фронтально-проецирующее положение. $h_1' \perp$ оси x. Δ ABC проецируется в линию $A_2' B_2' C_2'$
3. Располагаем фронтальную проекцию $A_2' B_2' C_2'$ || оси x и определяем н.в. Δ $A_0B_0C_0$. Построение видно из рис. 5.9.

Лекция № 6. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ (определение расстояний, определение величины части плоскости, определение величины угла)

План лекции

1. Определение расстояний.
   1.1. Расстояние между двумя точками:
      а) без преобразования чертежа;
      б) способом плоскопараллельного перемещения.
   1.2. Расстояние от точки до прямой:
      а) без преобразования чертежа;
      б) способом замены плоскостей проекций.
   1.3. Расстояние от точки до плоскости:
      а) без преобразования чертежа.
2. Определение величины части плоскости (способом замены плоскостей проекций).
3. Определение величины угла (вращением вокруг линии уровня).

1. Определение расстояний

1.1. Расстояние между двумя точками

Определить расстояние между двумя точками A и B – это значит определить н. в. отрезка AB. Рассмотрим пространственную модель.

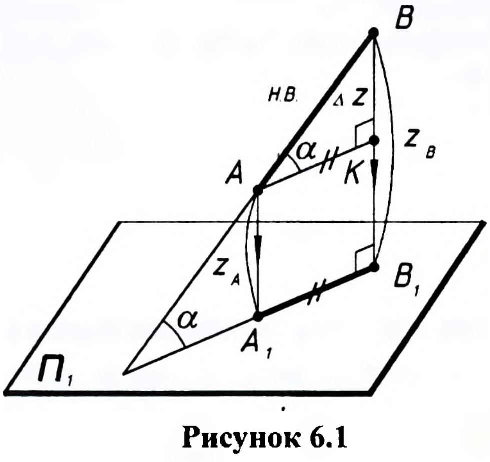


Рисунок 6.1

Т. к. AK || A_1B_1,
$BB_1 \perp П_1$.
$AK \perp BB_1$, значит Δ ABK – прямоугольный.
$AK = A_1B_1$,
$AA_1 = Z_A$,
$BB_1 = Z_B$,
$BK = \Delta Z = Z_B - Z_A$.
α – угол наклона прямой к плоскости $П_1$.

Правило прямоугольного треугольника

Н. в. отрезка прямой равна гипотенузе прямоугольного треугольника, у которого один катет равен одной из проекций данной прямой, а другой равен разности расстояний концов отрезка до той же плоскости проекций.

Построим эпюр Монжа.

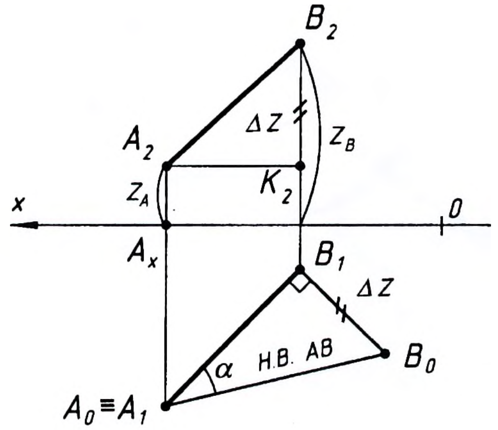


Рисунок 6.2

Аналогично определяем н. в. отрезка, используя плоскости $П_2$ и $П_3$. Одновременно определяем углы наклона прямой к плоскостям $П_2$ - β и $П_3$ - γ.

Алгоритм решения задачи:

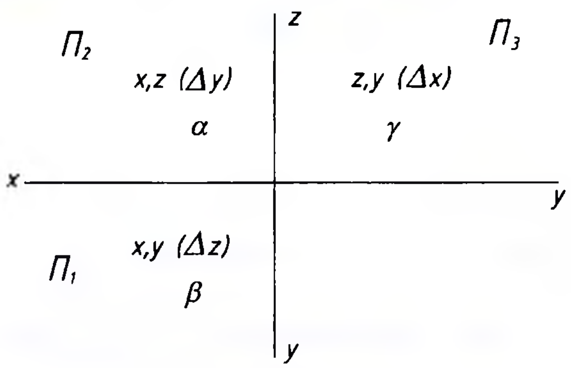
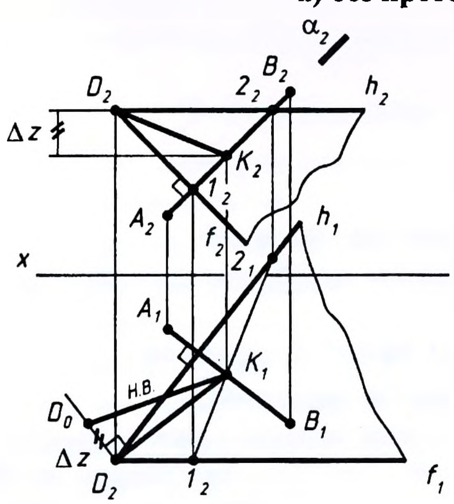


Рисунок 6.3

Можно определить расстояние между двумя точками, используя способ плоскопараллельного перемещения, например, между точками А и В (см. лекцию N5).

1. 2. Определение расстояния от точки до прямой

а) без преобразования чертежа



1. $D \subset \beta\ (h \cap f)$,
   $\beta \perp AB$.
2. $\beta \cap AB = K$ (K_1 и K_2).
3. н.в. DK (метод прямоугольного Δ).

Рисунок 6.4

б) способом замены плоскостей проекций

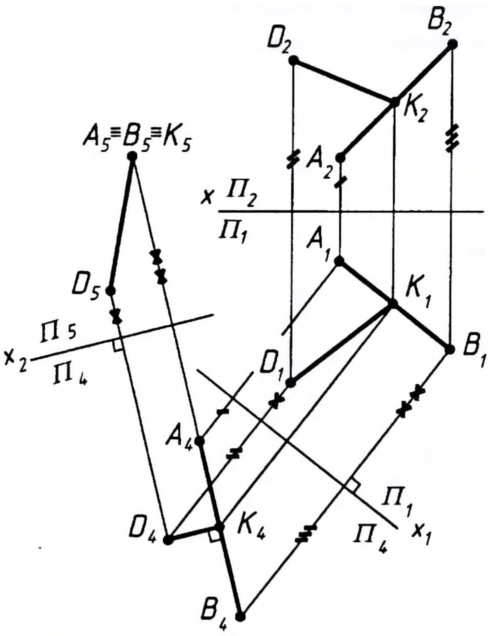


Рисунок 6.5

Используем две замены плоскостей проекций.

1. Вводим $П_4 \parallel AB$, $x_1 \parallel A_1B_1$.
2. Вводим $П_5 \perp AB$, $x_2 \perp A_4B_4$.

1.3. Расстояние от точки до плоскости

а) без преобразования чертежа

Пример. Определить расстояние от точки D до плоскости Δ ABE.

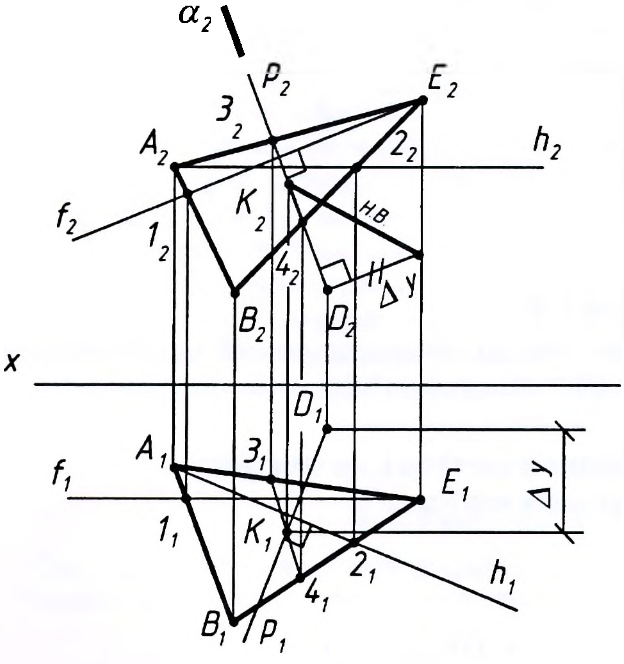


Рисунок 6.6

1. Перпендикуляр из точки D к плоскости Δ ABE (см. лекцию 4, рис. 4.2.).
2. Точка встречи перпендикуляра P с плоскостью Δ ABE, точку K определяем как основную задачу начертательной геометрии, по алгоритму.
3. Натуральную величину |DK| расстояния DK определяем методом прямоугольного треугольника.

б) способом замены плоскостей проекций

Это 3-я типовая задача – плоскость общего положения преобразовать в проецирующую.

2. Определение величины части плоскости

(способом замены плоскостей проекций)

(4-я типовая задача – проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня).

Можно решить задачу без преобразования чертежа. Для этого необходимо найти н. в. каждой стороны методом прямоугольного треугольника и при помощи засечек построить н. в. заданного треугольника.

3. Определение величины отсека плоскости (вращением вокруг линии уровня)

Пример. Определить н. в. Δ ABC вращением вокруг линии уровня.

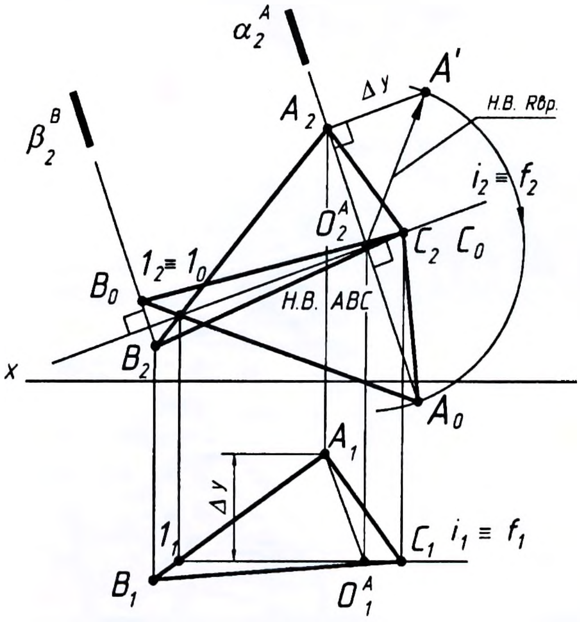


Рисунок 6.7

Аппарат вращения:
f – ось вращения (фронталь), $f \equiv i$,
A, B – объекты вращения,
α – плоскость вращения т. A,
O – центр вращения т. A,
OA – радиус вращения т. A.
Аналогично можно определить новое положение точки B.
Но можно соединить: A_0 с точкой 1_0, которая остается на оси вращения, и продолжить отрезок до пересечения со следом плоскости вращения β_2^B. Получаем точку B_0.
Натуральная величина $R_{вр}$ определена способом прямоугольного треугольника.

РАЗДЕЛ IV. Тема: «Поверхности. Пересечение поверхности плоскостью. Развертывание поверхностей. Способы построения разверток. Пересечение поверхностей»

Лекция № 7. ПОВЕРХНОСТИ

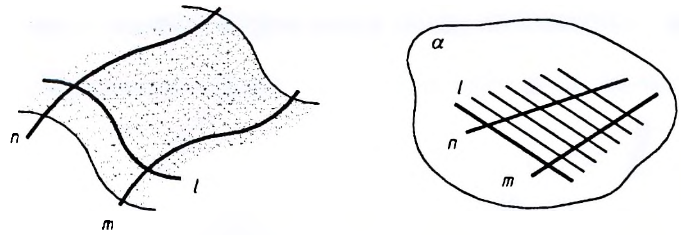
План лекции

1. Образование и задание поверхностей.
2. Классификация поверхностей.
3. Гранные поверхности и многогранники.
4. Проецирование многогранников. Точка и линия на поверхности многогранников.
5. Кривые поверхности.
6. Проецирование поверхностей вращения. Точка и линия на поверхности вращения.

1. Образование и задание поверхностей

В математике под поверхностью подразумевают непрерывное множество точек, связанных функциональной зависимостью F(x, y, z) = 0, где x, y, z – координаты, а функция F(x, y, z) – многочлен n-го порядка. Такой способ задания поверхности называется аналитическим. В начертательной геометрии поверхность рассматривается как совокупность всех последовательных положений движущейся линии. Такой способ называется кинематическим. Линия, которая образует поверхность, называется образующей. Линия (неподвижная), по которой перемещается (скользит) образующая, называется направляющей (рис. 7.1).

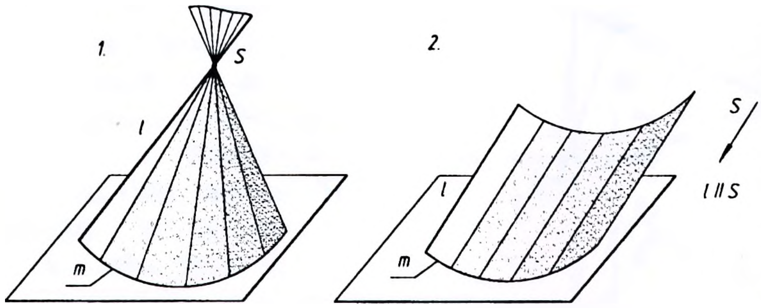
Образующая может быть прямой линией, кривой, постоянного и переменного вида. Образующая и направляющая могут меняться ролями (например, образование цилиндрической поверхности) (рис. 7.2). Частный случай поверхности – плоскость (рис. 7.1).



m, n – направляющие, *l* – образующая

Рисунок 7.1

1. Коническая поверхность
m – направляющая
l – образующая
Одна направляющая превратилась в т. S



2. Цилиндрическая поверхность
m – направляющая
l – образующая
т. S – находится в ∞

Рисунок 7.2

Совокупность геометрических элементов, определяющих поверхность, называется определителем поверхности (Ф) и состоит из двух частей: геометрической (Г) и алгебраической [А], т.е. Ф (Г) [А].

(Г) – часть определителя, в которой перечисляются все геометрические элементы, образующие поверхность.

[А]- часть определителя, в которой устанавливается связь между геометрическими элементами – взаимоположение, условия перемещения и т. д.

Например, для конической поверхности определитель имеет вид: Ф (l, m, S) [$l \cap m \wedge l \in S$].

2. Классификация поверхностей

В зависимости от вида образующей все поверхности можно подразделить на две группы:

- Линейчатые – образующей которых является прямая линия.
- Нелинейчатые – поверхности с криволинейной образующей.

Линейчатые поверхности подразделяются на:

- Развертываемые – это такие поверхности, которые можно совместить с плоскостью без разрыва и складок.
- Неразвертываемые (невозможно совместить).

Линейчатые поверхности можно разделить на 3 класса, в зависимости от количества направляющих.

1. Поверхности с одной направляющей:

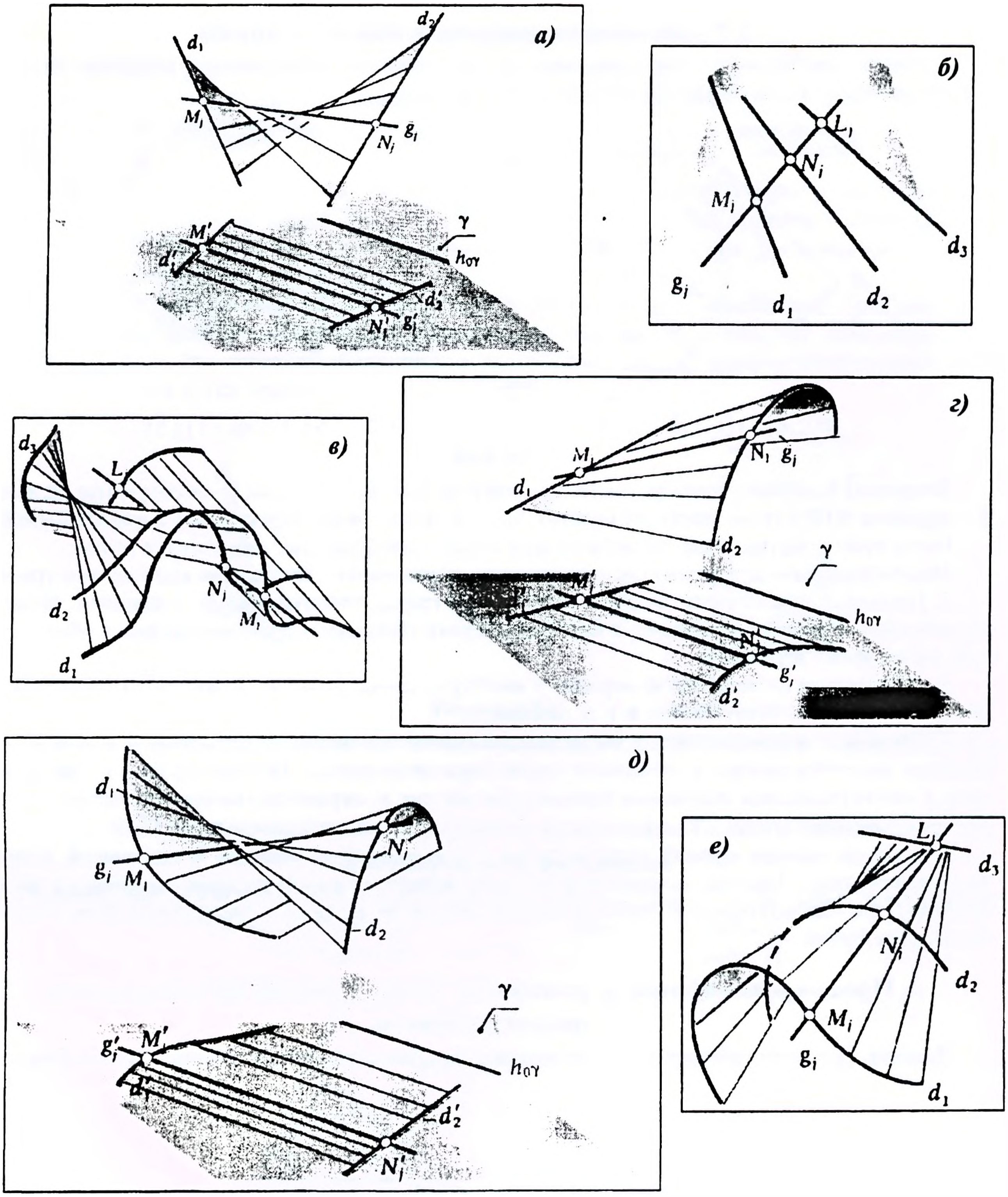
а) коническая;
б) цилиндрическая;
в) поверхность с ребром возврата;
г) пирамидальная;
д) призматическая.

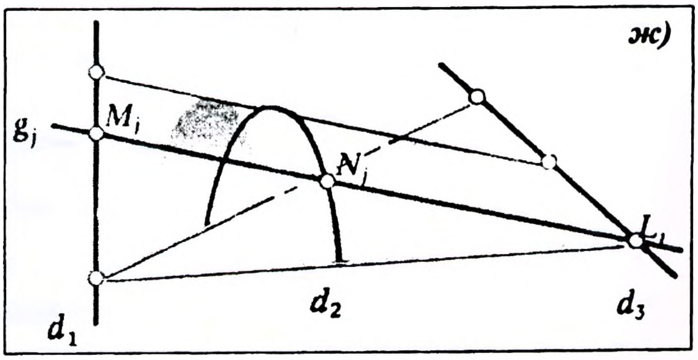
2. Поверхности с двумя направляющими:

а) прямой коноид (рис. 7.3, г);
б) прямой цилиндроид (рис. 7.3, д);
в) гиперболический параболоид (косая плоскость) (рис. 7.3, а).

3. Поверхности с тремя направляющими:

а) косой цилиндроид (поверхность общего вида) (рис. 7.3, в);
б) дважды косой цилиндроид (рис. 7.3, е);
в) дважды косой коноид (рис. 7.3, ж);
г) однополостный гиперболоид (рис. 7.3, б).



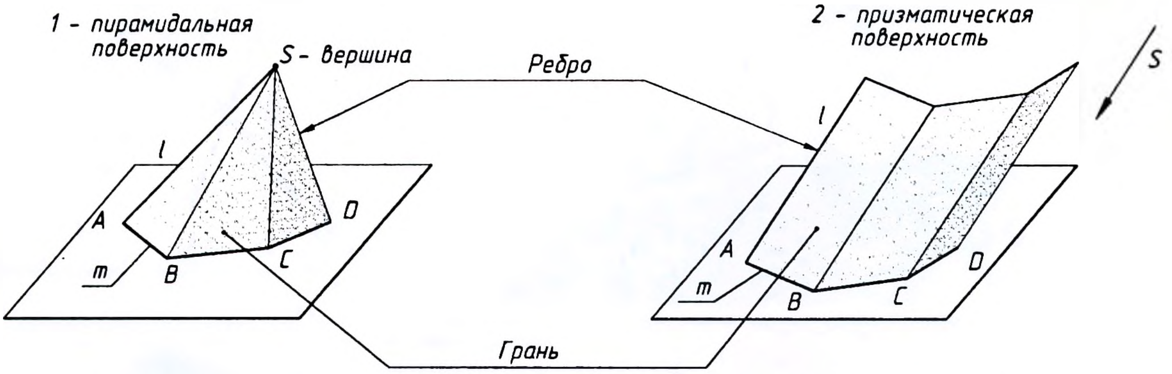


а) - Гиперболический параболоид (Косая плоскость).
б) - Однополосный гиперболоид.
в) - Косой цилиндр (Поверхность общего вида).
г) - Прямой коноид.
д) - Прямой цилиндроид.
е) - Дважды косой цилиндроид.
ж) - Дважды косой коноид.

Рисунок 7.3

3. Гранные поверхности и многогранники

Гранные поверхности – это поверхности, образованные перемещением прямолинейной образующей по ломаной линии. Примером могут служить:



$\Phi(l, m, S)\ [l \cap m \wedge l \in S]$ $\Phi(l, m, S)\ [l \cap m \wedge l \,||\, S]$

Рисунок 7.4

Элементы конической поверхности: m – направляющая (ломаная); l – образующая (прямая); S – вершина; ABS – грань (часть плоскости); SA, SB- ребра (линии пересечения смежных граней).

Часть пространства, ограниченная со всех сторон поверхностью, называется телом.

Многогранники – это замкнутые поверхности, образованные некоторым количеством граней.

1. Пирамида – многогранник, у которого одна грань, принимаемая за основание, является произвольным многоугольником, а остальные грани (боковые)- треугольниками с общей точкой, называемой вершиной.

В зависимости от количества вершин у многоугольника основания различают треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. пирамиды.

2. Призма – многогранник, у которого две грани-основания одинаковые и взаимопараллельные многоугольники, а остальные грани параллелограммы. В зависимости от числа вершин у многоугольника основания призмы, так же как и пирамиды, называют трехгранными, четырехгранными и т. д.

Призма называется прямой, если ее ребра ⊥ к плоскости основания, и наклонной, если не перпендикулярны. Призма, основанием которой является параллелограмм, называется параллелепипедом. Прямоугольный параллелепипед, все ребра которого конгруэнтны между собой, называется кубом.

4. Проецирование многогранников. Точка и линия на поверхности многогранников

Пример. Достроить недостающие проекции точек, расположенных на заданной поверхности.

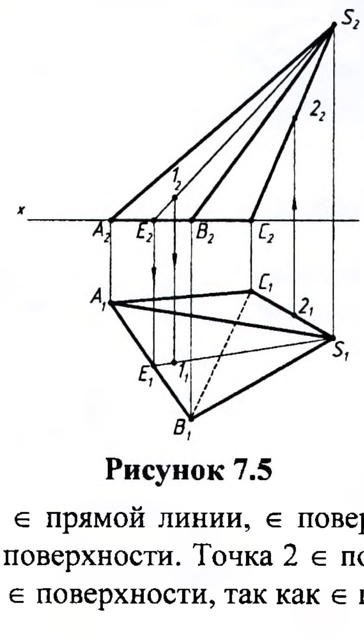


Рисунок 7.5

Точка ∈ поверхности, если она ∈ прямой линии, ∈ поверхности. Прямая ∈ поверхности, если она проходит через 2 точки,∈ поверхности. Точка 2 ∈ поверхности, так как принадлежит прямой SC, ∈ поверхности. Точка 1 ∈ поверхности, так как ∈ прямой SE, ∈ поверхности.

5. Кривые поверхности

Рассмотрим образование конической и цилиндрической поверхностей.

1. Конусом называется тело, ограниченное частью конической поверхности, расположенной по одну сторону от вершины, и плоскостью, пересекающей все образующие по ту же сторону от вершины.

2. Цилиндром называется тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, называемыми основаниями. Основание кругового цилиндра – это конгруэнтные круги. Цилиндр может быть прямым (если образующие ⊥ основанию) и наклонным, если не перпендикулярны.

Конус и цилиндр можно рассматривать как поверхности вращения. Конус – как тело, образованное вращением прямоугольного треугольника SOA вокруг катета SO, принятого за ось вращения. Цилиндр – как тело, образованное вращением прямоугольника OBAC вокруг стороны CO, принятой за ось вращения.

Рисунок 7.6

К поверхностям вращения относятся также поверхности сферы (шара) и поверхности тора (кольца).

6. Проецирование поверхностей вращения. Точка и линия на поверхности вращения

Пример. Достроить недостающие проекции точек, расположенных на заданных поверхностях.

Даны: A_1. Найти A_2. Даны: (C_2). Найти C_1.

B_1. Найти B_2. D_1. Найти D_2.

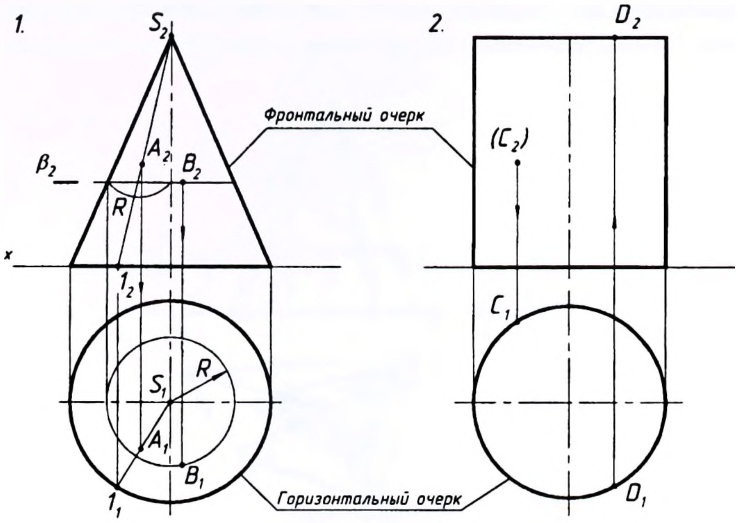


Рисунок 7.7

<u>Алгоритм решения</u>

Через горизонтальную проекцию точки A проводят горизонтальную проекцию образующей $S_1 1_1$. Определяем фронтальную проекцию образующей $S_2 1_2$. Точка A ∈ поверхности конуса, так как ∈ образующей S1 конуса.

Через точку B проводят секущую плоскость β – горизонтального уровня, которая пересекает конус по окружности радиуса R. $B_1 \in$ горизонтальной проекции этой окружности, и так как видимая находится ближе к наблюдателю.

Цилиндр занимает проецирующее положение, значит, C_1 лежит на очерке цилиндра. Так как заданная точка – невидимая, то C_1 находится дальше от наблюдателя. Аналогично строят проекции точки D.

Контурная линия – это линия, по которой касаются проецирующие лучи при проецировании поверхности. Очерк – это проекция контурной линии на плоскости проекций.

Лекция № 8. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ. РАЗВЕРТЫВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ. СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ РАЗВЕРТОК

План лекции

1. Пересечение поверхности плоскостью.
   1.1. Способ ребер.
   1.2. Способ граней.
2. Способ вспомогательных секущих плоскостей.
3. Развертывание поверхностей. Способы построения разверток.
   3.1. Способ треугольников.
   3.2. Способ нормального сечения.
   3.3. Способ раскатки.

1. Пересечение поверхности плоскостью

В общем случае, при пересечении поверхности плоскостью, определяют ряд общих точек, $\in$ поверхности и плоскости. Полученные точки соединяют ломаной линией, если поверхность гранная, и под лекало, если поверхность криволинейная. В результате получается фигура, которая называется сечением. Для построения точек, $\in$ линии сечения, используют следующие способы:

1. Способ ребер.
2. Способ граней.
3. Способ вспомогательных секущих плоскостей.

Рассмотрим случаи, когда секущая плоскость занимает частное положение.

Пример. Построить проекции линии пересечения поверхности пирамиды плоскостью.

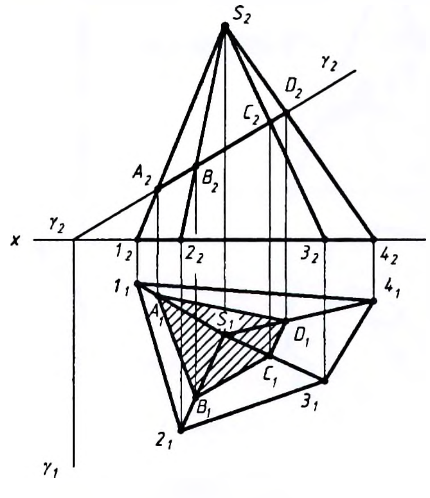


Рисунок 8.1

Плоскость $\alpha \perp \Pi_2$ и обладает собирательным свойством, следовательно фронтальная проекция сечения совпадает со следом плоскости – это проекция $A_2\ B_2\ C_2\ D_2$. Вторая проекция сечения $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$ строится при помощи линий проекционной связи.

Конические сечения:

1. Окружность – секущая плоскость параллельна плоскости основания.
2. Эллипс – секущая плоскость наклонена к плоскости основания.
3. Две прямые – секущая плоскость проходит через вершину и основание конуса.
4. Двойная прямая – секущая плоскость касается образующей.
5. Точка – секущая плоскость проходит через вершину конуса.
6. Парабола – секущая плоскость параллельна образующей конуса.
7. Гипербола – секущая плоскость параллельна оси вращения.

Пример. Построить проекции линии пересечения конуса плоскостью.

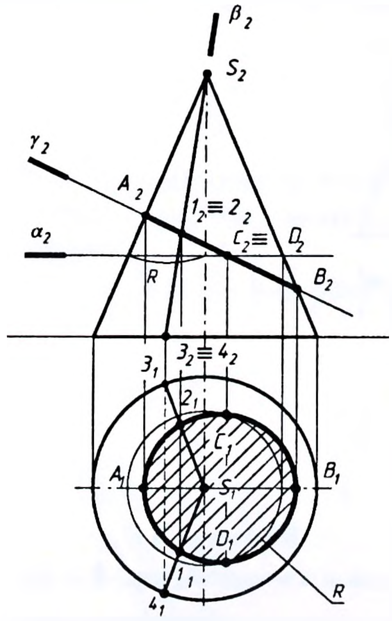


Рисунок 8.2

Построение начинаем с опорных точек: очерковые, высшая, низшая и т. д. Фронтальная проекция эллипса совпадает с фронтальным следом плоскости. Горизонтальную проекцию можно построить по большой и малой оси или при помощи промежуточных точек.

AB – большая ось эллипса, точки A и B∈ очерковым образующим. C и D ∈ малой оси эллипса, точки 1, 2 ∈ промежуточным образующим.

Пример. Построить проекции линии пересечения цилиндра плоскостью.

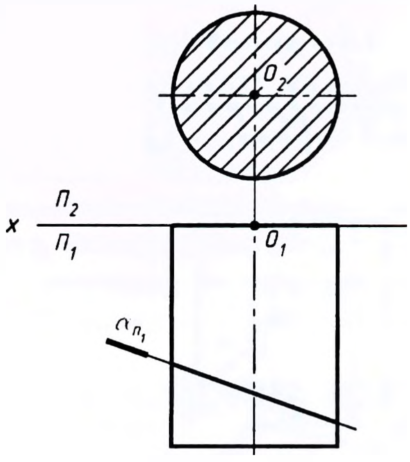


Рисунок 8.3

В данном случае плоскость $\alpha \perp \Pi_1$. Следовательно, горизонтальная проекция линии сечения совпадает с горизонтальным следом плоскости. Кроме того, так как цилиндр занимает проецирующее положение, то фронтальная проекция линии сечения совпадает с очерком цилиндра на фронтальной плоскости проекций.

Рассмотрим случай, когда плоскость занимает общее положение.

1.1. Способ ребер

Способ ребер заключается в том, что определяются точки пересечения ребер (или образующих поверхности) с заданной секущей плоскостью, т. е. задача сводится к основной задаче начертательной геометрии. Полученные точки соединяют либо в ломаную линию, либо в лекальную.

Пример. Построить проекции линии пересечения пирамиды плоскостью γ. В данном примере точки E и F $\in$ основанию пирамиды, так как след γ_1 пересекает горизонтальную проекцию основания пирамиды $1_1\ 2_1\ 3_1$. Поэтому линией пересечения пирамиды плоскостью является Δ.

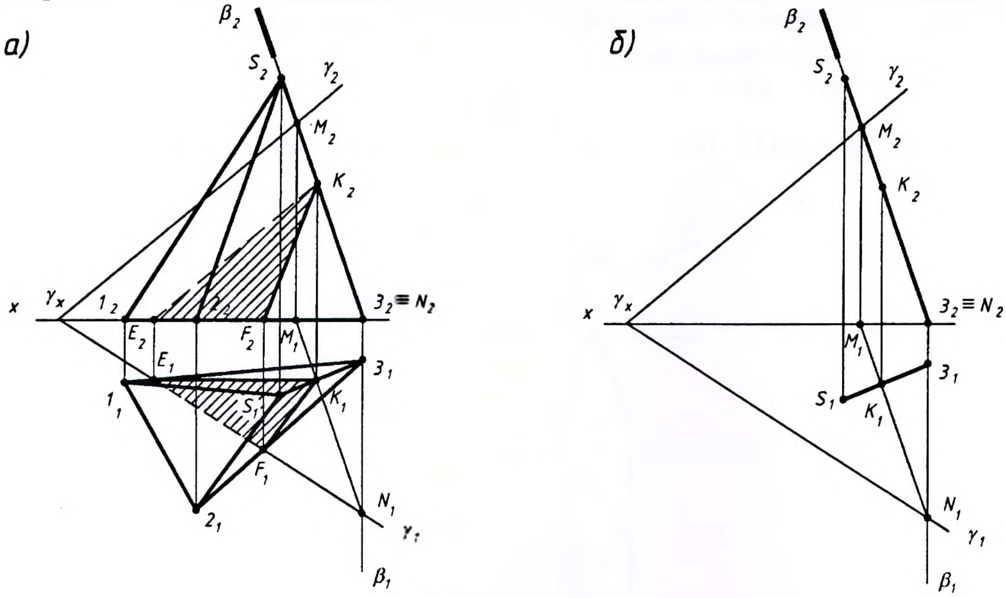


Рисунок 8.4

Для нахождения точки K применяем алгоритм (рис. 8.4, б).

<u>Алгоритм решения задачи:</u>

1. Заключаем ребро S3 во вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость β, $\beta \perp \Pi_2$ (рис. 8.4, б).
2. Находим проекции линии пересечения плоскости β и $\gamma = M_2 N_2 \longrightarrow M_1 N_1$.
3. Определяем проекции точки K (K_1, K_2) на пересечении $S_1 3_1$ и $M_1 N_1 - K_1$, и $K_2 \in S_2 3_2$.

Линией пересечения пирамиды плоскостью является Δ EKF.

Аналогично решаем задачу, если задана поверхность конуса. В качестве ребер используют образующие.

Задачу повторяем столько раз, сколько ребер у пирамиды или образующих у конуса.

1.2. Способ граней

Способ граней применяется в том случае, когда заданная поверхность гранная и проецирующая. В этом случае определяют линию пересечения каждой грани с данной плоскостью.

Пример. Построить проекции линии пересечения прямой призмы плоскостью.

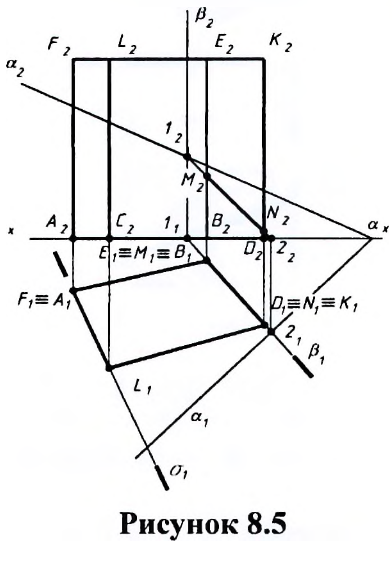


Рисунок 8.5

Алгоритм решения

1. Заключаем грань BDKE в горизонтально-проецирующую плоскость β. След плоскости β_1 совпадает при этом с горизонтальной проекцией грани $B_1D_1K_1E_1$.

2. Определяем линию пересечения плоскостями α и β = 1, 2.

3. Определяем линию пересечения грани BDEK плоскостью α – линия MN.

Аналогично определяем линию пересечения грани ACLF (используем горизонтально-проецирующую плоскость σ).

2. Развертывание поверхностей. Способы построения разверток

Развертка представляет собой фигуру на плоскости, в которую преобразуется поверхность. Развертывающимися называются поверхности, которые без складок и разрывов можно совместить с плоскостью. Все гранные поверхности являются развертываемыми. В зависимости от вида поверхностей для построения развертки применяют один из способов:

2.1. Способ треугольников

Этот способ, в основном, применяют для построения разверток пирамидальных и конических поверхностей.

Пример. Построить развертку усеченной части пирамиды.

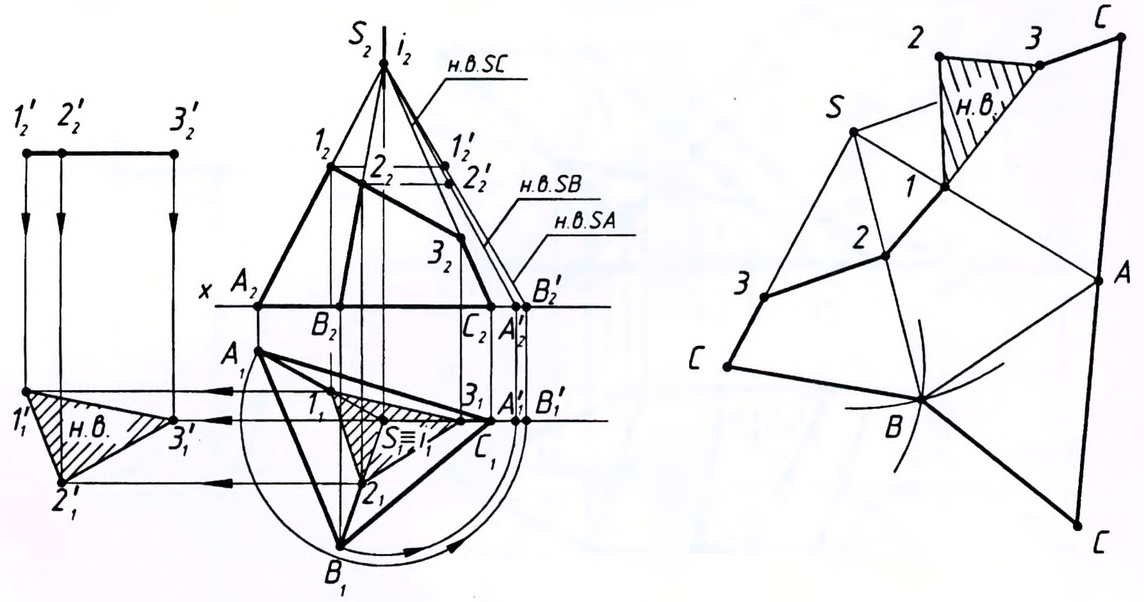


Рисунок 8.6

При построении развертки этим способом определяют н. в. всех ребер или образующих, а также н. в. основания. В данной задаче н. в. ребер определяют вращением вокруг проецирующей оси $i \perp \Pi_1$. Основание проецируется в данном случае в н. в. Натуральную величину сечения определяем способом плоскопараллельного перемещения.

На свободном поле чертежа, используя способ засечек, строят треугольники граней и основание. Наносят линию сечения пирамиды плоскостью и достраивают н. в. сечения.

Аналогично строят развертку конической поверхности.

2.2. Способ нормального сечения

Данный способ применяют, в основном, для построения разверток призм.

Пример. Построить развертку усеченной части наклонной призмы.

Алгоритм решения:

1. Строят секущую плоскость нормальную (или ⊥) к ребрам или образующим поверхности (β).
2. Определяют сечение поверхности плоскостью – нормальное сечение (1, 2, 3).
3. Определяют н. в. нормального сечения (любым способом). В данном случае – плоскопараллельным перемещением ($1'_1 2'_1 3'_1$).

4. На свободном поле чертежа, на прямой линии откладывают периметр нормального сечения с отметкой характерных точек (2_0 1_0 3_0 2_0).
5. В каждой характерной точке восстанавливают ⊥ и на нем откладывают соответственно длины ребер, лежащие по обе стороны от нормального сечения.
6. Полученные точки соединяют линией (прямой или кривой).
7. Достраиваются верхнее и нижнее основания.
8. Наносят линию сечения призмы плоскостью (A_0 B_0 C_0 A_0) и достраивают его н.в. ($A_0B_0C_0$).

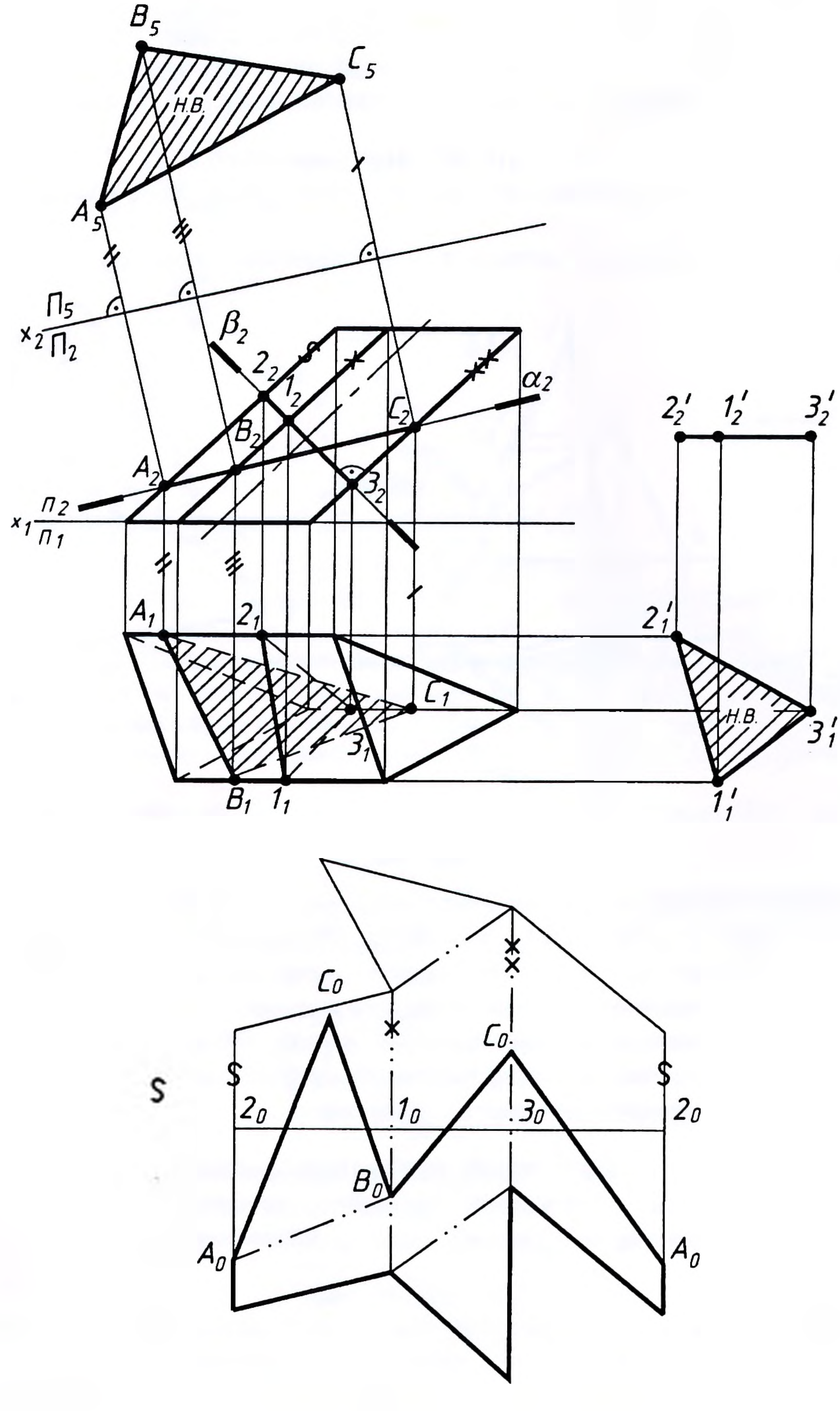


Рисунок 8.7

2.3. Способ раскатки

Способ раскатки применяют для цилиндров.

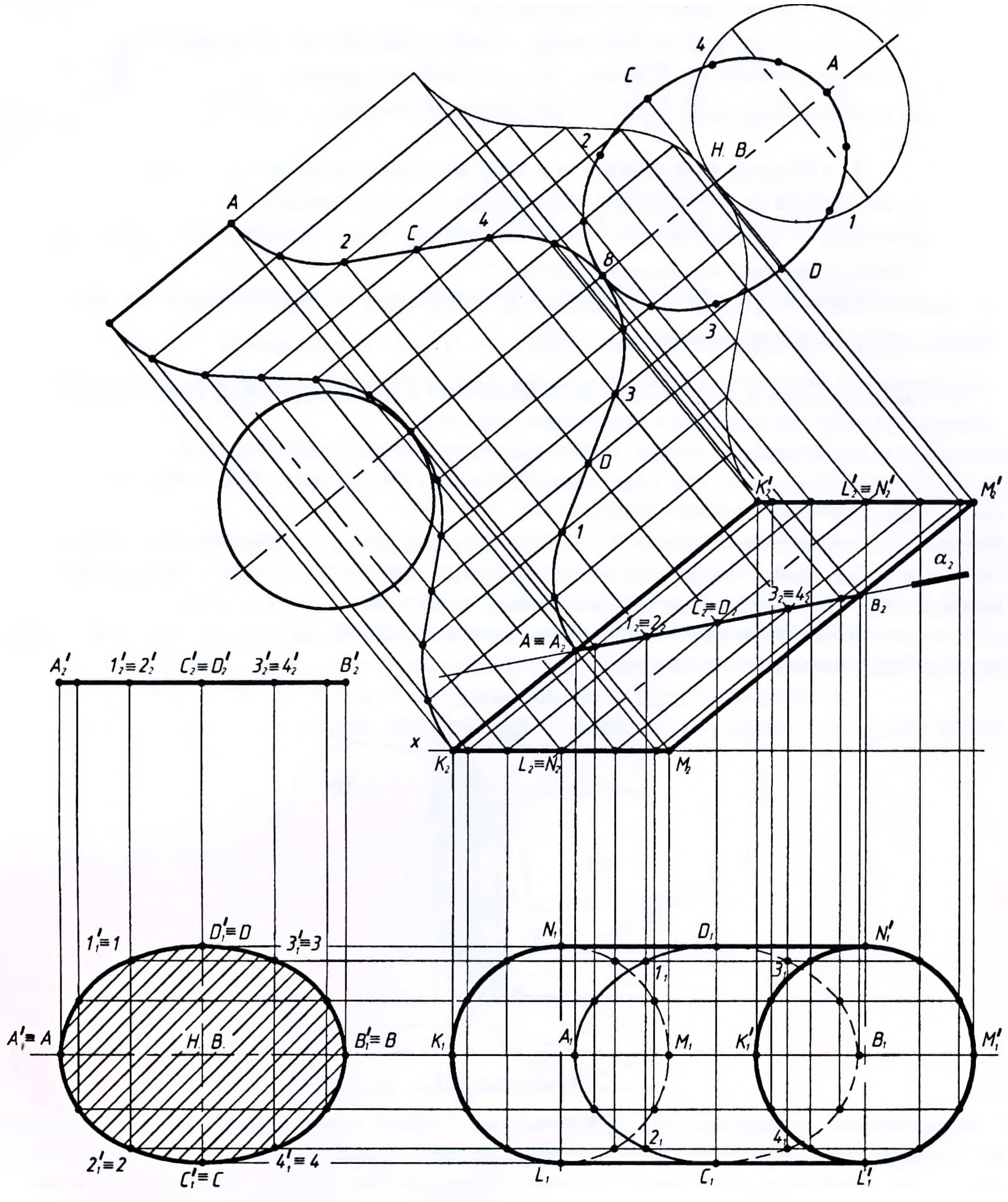


Рисунок 8.8

<u>Алгоритм решения:</u>

Поверхность должна занимать положение уровня.

1. Цилиндр превращается в 12-ти гранную призму, для этого основание цилиндра делится на 12 частей и проводятся 12 образующих.
2. Из каждой точки деления основания восстанавливают $\perp$ к н. в. образующих.
3. На этих перпендикулярах откладываются при помощи засечек длины сторон двенадцатиугольника.
4. Определяют н. в. сечения способом плоскопараллельного перемещения.
5. Достраивают верхнее и нижнее основания.
6. Наносят линию сечения поверхности цилиндра плоскостью и достраивают его н.в.

Лекция № 9. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

План лекции

1. Общие сведения о пересечении поверхностей.
2. Методы, используемые при нахождении линии пересечения поверхностей.
   2.1. Метод вспомогательных секущих плоскостей-«посредников».
   2.2. Метод вспомогательных концентрических сфер-«посредников».

1. Общие сведения о пересечении поверхностей

Результат пересечения поверхностей – пространственные линии.

Линия пресечения – совокупность точек, лежащих на поверхности пересекающихся поверхностей и принадлежащих им одновременно.

Линии пересечения могут быть кривыми и ломаными, в зависимости от геометрических особенностей пересекающихся поверхностей.

ОБЩИЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Определяем зону пересечения поверхностей (рис. 9.1).
2. Определяем характерные точки, принадлежащие линии пересечения:
   опорные точки (наивысшая и наинизшая точки на очерковых образующих).
3. Определяем промежуточные точки:

3.1. Заданные поверхности Ф (фи) и Ψ (пси) пересекаем поверхностью-«посредником» Σ (сигма).

3.2. Находим линии пересечения каждой из заданных поверхностей (Ф, Ψ) посредником – m и n.

3.3. Определяем точки взаимного пересечения линий m и n – точки 1 и 2.

Для нахождения необходимого количества точек линии пересечения повторяем пункты 2-3 алгоритма необходимое количество раз.

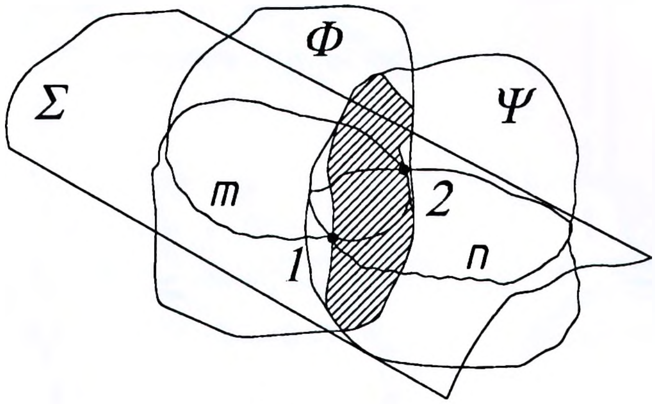


Рисунок 9.1

Зона пересечения поверхностей представляет собой замкнутую область, образованную очерками образующих пересекающихся поверхностей. Характерные точки ищем в зоне пересечения поверхностей на пересечении очерков образующих и осях, при условии, если они лежат в одной плоскости.

В качестве поверхностей-«посредников», в зависимости от геометрических особенностей тел и характера их пересечения, можно выбрать:

а) вспомогательные плоскости частного положения;

б) плоскости общего положения;

в) вспомогательные секущие сферы (концентрические и эксцентрические);

г) вспомогательный секущий цилиндр;

д) вспомогательный секущий конус.

При выборе поверхности-«посредника» – руководствуемся простотой получаемых линий при пересечении заданных поверхностей плоскостью-«посредником».

Различают три основные комбинации пересечения двух поверхностей:

а) пересечение двух многогранников – в сечении позволяет получить одну или две ломаные линии;

б) пересечение двух поверхностей вращения – позволяет получить одну или две плавные кривые линии;

в) пересечение «гранной» и «кривой» поверхностей – позволяет получить одну или две плавные пространственные кривые линии с изломом на рёбрах.

2. Методы, используемые при нахождении линии пересечения поверхностей

Нами будут рассмотрены два метода, используемые при нахождении линии пресечения поверхностей:

- метод вспомогательных секущих плоскостей-«посредников»;
- метод вспомогательных концентрических сфер-«посредников».

Алгоритм решения каждым из методов будет рассмотрен на конкретном примере.

Возможны 3 случая расположения пересекающихся поверхностей относительно плоскостей проекций:

- пересекающиеся поверхности занимают проецирующее положение;
- одна из пересекающихся поверхностей занимает общее положение, вторая – частное.
- обе поверхности общего положения.

Выбор посредников зависит от заданных поверхностей и их взаимного положения.

2.1. Метод вспомогательных секущих плоскостей-«посредников».

Пример. Построить линию пересечения поверхностей сферы и конуса (обе поверхности занимают общее положение).

Применяем общий алгоритм решения:

1. Определяем зону пересечения поверхностей.

2. Определяем характерные точки, принадлежащие линии пересечения:
опорные точки (наивысшая – точка 1 и наинизшая – точка 2 на очерковых образующих).

3. Определяем промежуточные точки. В качестве «посредников» выбираем плоскости частного положения (плоскости горизонтального уровня), которые пересекает сферу и конус по окружностям. Секущие плоскости проводим в зоне пересечения поверхностей.

4. Полученные точки соединяем плавной кривой. Точность аппроксимации линии пересечения зависит от принятого количества секущих плоскостей-«посредников».

5. Видимость полученной линии пересечения поверхностей решаем методом конкурирующих точек.

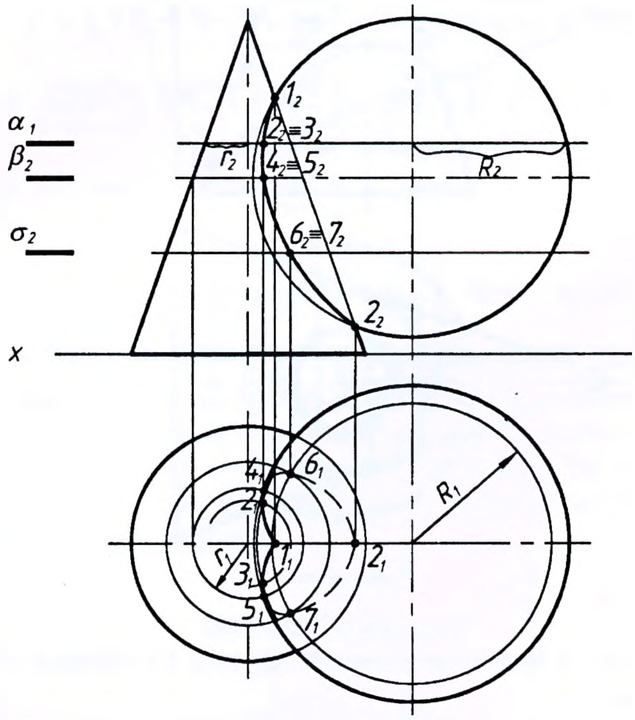


Рисунок 9.2

Примечание: если одна из поверхностей занимает проецирующее (частное) положение, то одна из проекций линии пересечения уже известна.

2.2. Метод вспомогательных концентрических сфер-«посредников»

Сфера, если центр ее расположен на оси поверхности вращения, пересекает эту поверхность по окружностям а и b (рис. 9.3). Поэтому вспомогательные секущие сферы используют для построения линии пересечения поверхностей вращения.

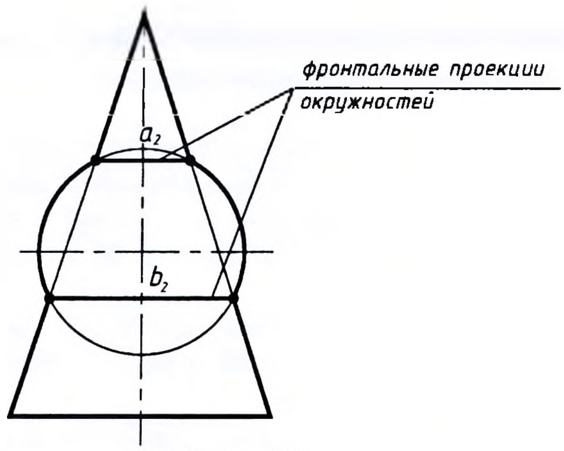


Рисунок 9.3

Способ концентрических секущих сфер-«посредников» применяется в случае, если:

- пересекающиеся поверхности являются поверхностями вращения;
- оси вращения поверхностей пересекаются;
- оси вращения пересекающихся поверхностей параллельны одной из плоскостей проекций.

Пример. Построить линию пересечения поверхностей двух конусов (обе поверхности занимают общее положение).

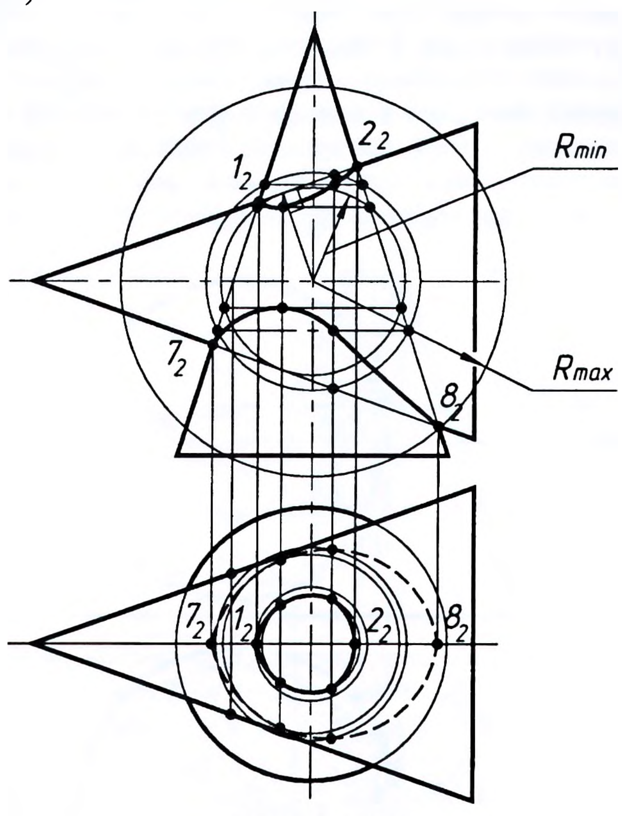


Рисунок 9.4

Алгоритм решения

При решении поставленной задачи выполняем пункты 1-3 общего алгоритма (область пересечения, характерные точки).

При поиске промежуточных точек используем в качестве поверхностей-«посредников» концентрические сферы. Центр, через который проводятся концентрические секущие сферы, является центром пересечения осей симметрии поверхностей. Предварительно находим максимальный и минимальный радиусы секущих сфер.

Rmin – радиус сферы от центра пересечения осей до наименее удаленной точки области пересечения поверхностей. Сфера минимального радиуса должна касаться одной поверхности и пересекать другую.

Rmax – радиус сферы от центра пересечения осей до наиболее удаленной точки области пересечения поверхностей.

Полученные точки соединяем плавной кривой. Точность аппроксимации линии пересечения поверхностей зависит от принятого количества вспомогательных концентрических сфер-«посредников». Определяем видимость полученной кривой.

МЕТОД «МОНЖА» (частный случай)

Теорема Монжа. Две поверхности вращения второго порядка, вписанные в третью поверхность вращения второго порядка или описанные вокруг неё, пересекаются между собой по двум плоским кривым второго порядка.

Теорему иллюстрирует рис. 9.5. В соответствии с этой теоремой линии пересечения конуса и цилиндра, описанных около сферы, будут плоскими кривыми – эллипсами, фронтальные проекции которых изображаются прямыми $A_2 B_2$ и $C_2 D_2$, проходящие через точки пересечения очерков поверхностей вращения и точки пересечения окружностей m и n.

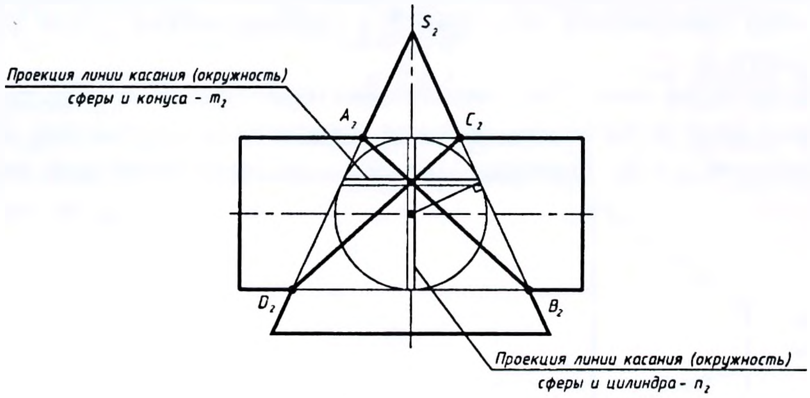


Рисунок 9.5

РАЗДЕЛ V. Тема: «Перспектива»

Лекция № 10. ПЕРСПЕКТИВА. МЕТОД АРХИТЕКТОРОВ

План лекции

1. Основные понятия. Аппарат линейной перспективы.
2. Перспектива точки.
3. Перспектива прямой линии.
4. Построение перспективы геометрического объема. Метод архитекторов.

1. Основные понятия. Аппарат линейной перспективы

Перспектива представляет собой способ изображения тел и плоских фигур, основанный на применении центрального проецирования. Для построения перспективы предмета из точки зрения S проводят лучи ко всем точкам изображаемого предмета. На пути проецирующих лучей располагают картинную плоскость, на которой строят искомое изображение, определяя точки пересечения лучей с поверхностью картины.

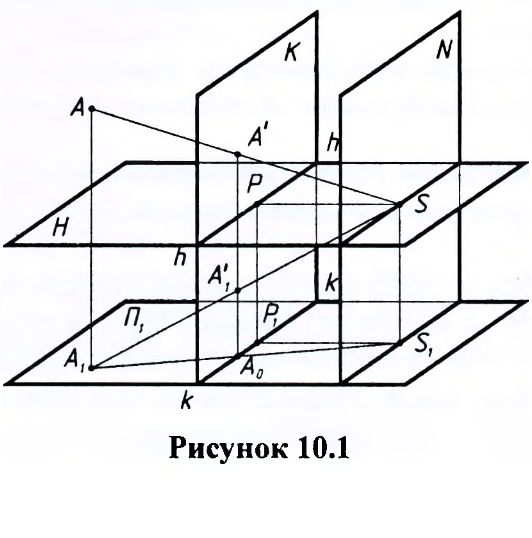


Рисунок 10.1

S – точка зрения; S_1 – основание точки зрения (точка стояния); P – главная точка картины; P_1 – основание главной точки картины; A – объект проецирования; A_1 – основание точки A; $П_1$ – предметная плоскость; $HIIП_1$ – плоскость горизонта; K – картинная плоскость, $K \perp H$ и $П_1$; N – нейтральная плоскость; SP – главный луч, $SP \perp K$; S_1P_1 – основание главного луча (проекция главного луча на предметную плоскость); kk – основание картины; hh – линия горизонта; SS_1 – линия стояния

2. Перспектива точки

Перспективой точки называется точка пересечения проецирующего луча, проходящего через точку зрения с картинной плоскостью. Для построения перспективы точки необходимо заключить проецирующий луч SA в горизонтально-проецирующую плоскость ά, горизонтальным следом этой плоскости будет прямая S_1 A_1. Плоскость ά пересекает картинную плоскость по прямой A^I A_0 . Точка пересечения этой прямой с проецирующим лучом SA является искомой перспективой A^I точки A.

A^I_1 – вторичная проекция точки A или перспектива горизонтальной проекции точки A (рис. 10.2).

Задание только одной перспективы точки не определяет ее положение в пространстве. Перспективное изображение точки обратимо, если оно дополнено вторичной проекцией.

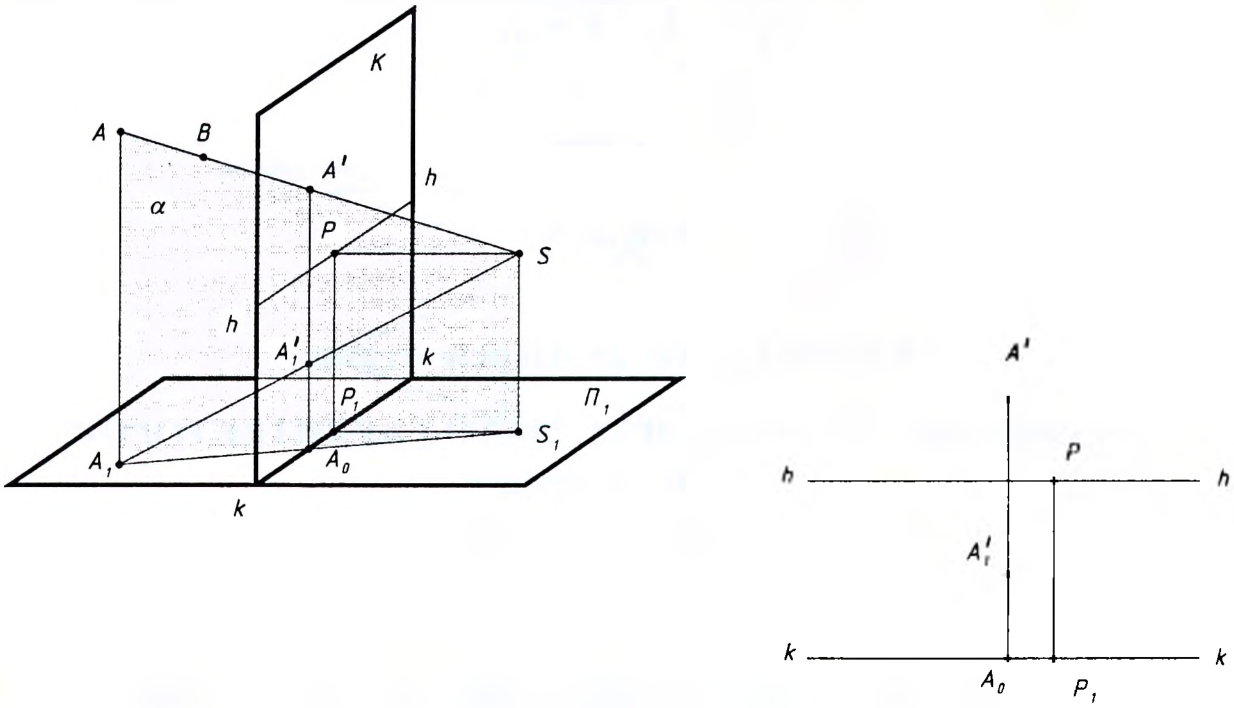


Рисунок 10.2

3. Перспектива прямой линии

Проецирующие лучи, которые проходят через точку S и некоторую прямую AB, образуют плоскость. Эта лучевая плоскость пересекает картину по прямой $A^/B^/$, представляющей собой перспективу заданной прямой.

Задание только одной перспективы прямой не определяет ее положение в пространстве. Перспективное изображение прямой обратимо, если оно дополнено вторичной проекцией.

4. Построение перспективы геометрического объема. Метод архитекторов

Существует несколько способов построения перспективы (радиальный метод, метод сеток, метод архитекторов и др.).

Метод архитекторов широко применяется для построения перспективных изображений с использованием точек схода параллельных прямых. Перспективы параллельных прямых пересекаются. Точка пересечения связки параллельных прямых называется точкой схода. Когда параллельные прямые горизонтальны, их точка схода должна быть на линии горизонта.

Пример. Построить перспективу геометрического объема способом архитекторов.

Выбор точки зрения – подготовительная работа.

1. Проводим основание картины К-К (или горизонтальный след картинной плоскости) таким образом, чтобы оно прошло через одно из ребер объема и составляло угол с одной из сторон плана 25-30 градусов. Это делают с целью выделения главного фасада (рис. 10.3).
2. Из крайних точек плана A_1 и D_1 опускаем перпендикуляры к основанию картины К-К, получаем точки M и N.
3. Делим отрезок M N на три равные части и выбираем в средней части одной трети отрезка главную точку картины P.
4. Опускаем перпендикуляр в точке P к основанию картины – К-К.
5. На перпендикуляре определяем точку S_1 – точку зрения – таким образом, чтобы угол зрения был в пределах от 18 до 53 градусов. Оптимальным является угол 28 градусов. Для этого накладываем шаблон на план так, чтобы вершина угла расположилась на перпендикуляре, проведенном из точки P, а шаблон прошел через крайние точки плана.
6. Определяем доминирующие направления прямых.
7. Определяем точки схода – фокусы F_1 и F_2, в которых будут сходится прямые доминирующих направлений.
8. Продолжаем линии плана до пересечения с основанием картины К-К, получаем точки 1, 2, 3 и т. д. Эти точки будут началом прямых, конец прямых будет находится в соответствующих точках схода.

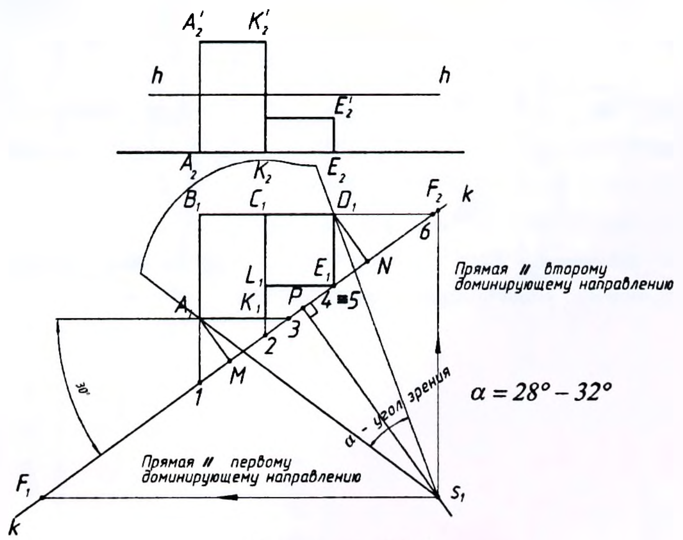


Рисунок 10.3

Построение (создание) перспективы

1. Проводим основание картины К-К на свободном поле чертежа (рис. 10.4).
2. На линии К-К отмечаем положение всех точек 1, 2, 3, P… и т. д.
3. На линии горизонта H - H отмечаем точки схода F_1 и F_2 .
4. Проводим перспективу прямых, составляющих план, и получаем перспективу всех точек плана ABCDELK – так называемую вторичную проекцию.
5. Через все вершины вторичной проекции проводим вертикальные прямые.
6. От точки 4≡5 откладываем высоту отрезка EE', равную натуральной величине ребра, так как оно находится в картинной плоскости.
7. Через точку E' проводим прямую в точку схода F_1. На этой прямой с помощью вертикальных линий связи находим точку D'. Затем через точку E' в точку схода F_2, находим точку L'… и т. д.
8. Чтобы получить перспективу вертикальных ребер, которые не совмещены с плоскостью картины, например, равных по величине AA', нужно провести вертикальную плоскость γ и построить линию пересечения плоскости γ с картиной. Плоскостьγ совпадает с задней левой плоскостью геометрического объема. Затем отложить на этой прямой от основания картины отрезок, равный величине н. в. отрезка AA'. Далее провести в плоскости горизонталь заданного уровня в точку схода F_1, до пересечения с перспективой взятого ребра AA'.
9. Аналогично вычерчиваем перспективу остальных вертикальных ребер.

На рис. 10.5 показана законченная перспектива геометрического объема.

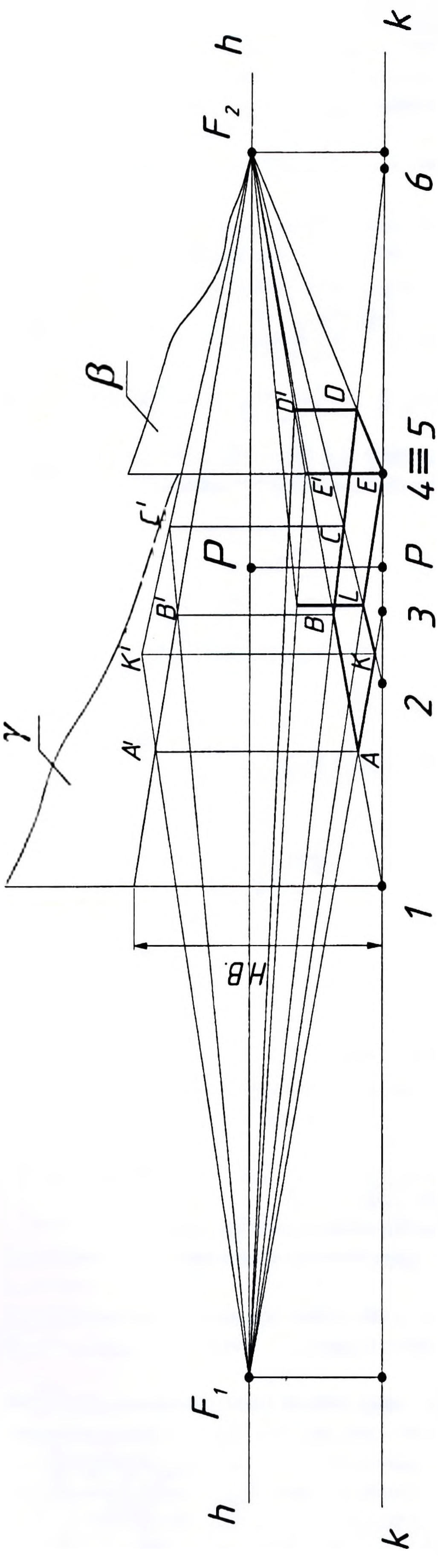


Рисунок 10.4

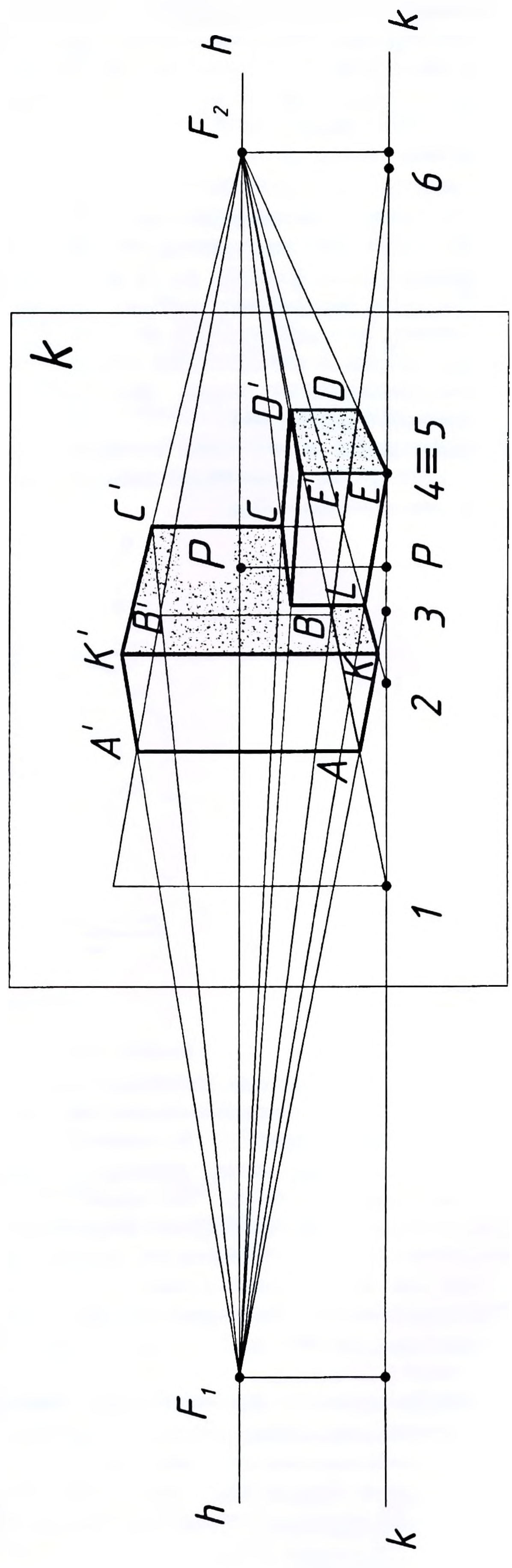


Рисунок 10.5

РАЗДЕЛ VI. Тема «Проекции с числовыми отметками»

Лекция № 11. ПРОЕКЦИИ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ

План лекции

1. Проекции точки.
2. Проекции прямой.
3. Взаимное положение прямых.
4. Проецирование плоскости.
5. Взаимное положение прямой и плоскости.
6. Взаимное положение плоскостей.
7. Проекции тел и поверхностей.

Этот метод является частным случаем ортогональных проекций. Он применяется при изображении пространственных форм, один из размеров которых значительно меньше двух других размеров. Например, при проектировании железных и шоссейных дорог, гидротехнических сооружений, каналов, строительных площадок и т.д., а также для изображения рельефа земной поверхности.

1. Проекции точки

Сущность метода заключается в том, что вместо двух проекций предмета на горизонтальную и фронтальную плоскость проекций изображают одну – горизонтальную проекцию и рядом с проекцией каждой точки пишут число, выражающее ее высоту относительно этой плоскости. Это число называют отметкой, а плоскость – плоскостью нулевого уровня и обозначают $П_0$.

За единицу длины обычно принимают один метр. Если точка находится выше плоскости нулевого уровня, ее отметка будет положительной, если ниже – отрицательной, если принадлежит плоскости – нулевой.

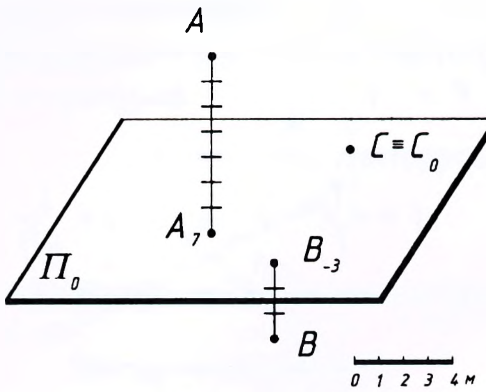


Рисунок 11.1

Чертеж, выполненный в проекциях с числовыми отметками, называется картой или планом. На планах обязательно указывается линейный или числовой масштаб (рис. 11.1 и рис. 11.2).

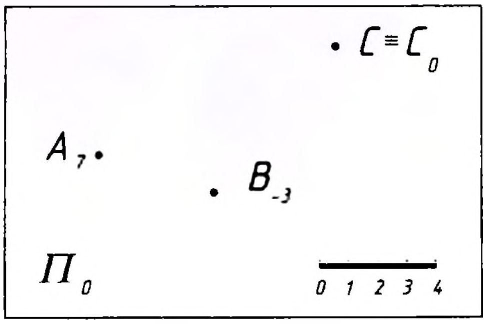


Рисунок 11.2

2. Проекции прямой

Для изображения прямой в проекциях с числовыми отметками задают проекции двух ее точек с указанием их отметок, либо одной точкой и уклоном (направлением).

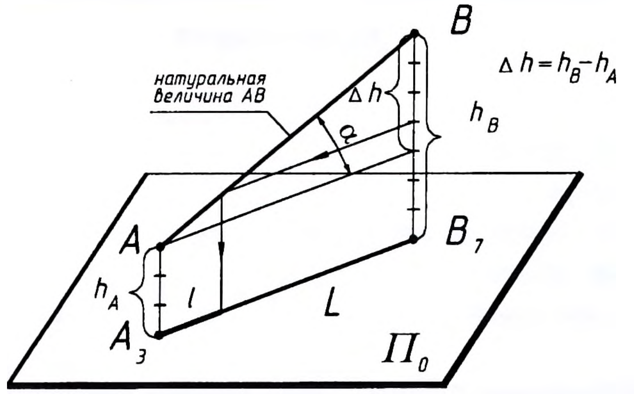


Рисунок 11.3

Длина горизонтальной проекции прямой A_3 B_7 – называется заложением прямой L. Разность отметок концов AB ($h_B - h_A$) называется превышением этого отрезка.

α – угол наклона прямой к плоскости $П_0$.

Обычно наклон прямой задают не углом α, а уклоном прямой – i. Уклоном прямой называется отношение превышения отрезка прямой к его заложению.

$$i = \frac{h_B - h_A}{L} = \frac{\Delta h}{L}$$

$$i = \frac{\Delta h}{L} \quad i = tg\,\alpha$$

Уклон выражается отношением 1:1; 2:3; или в процентах, например 5%, 10% и т. д.

Длина заложения, соответствующая единице превышения, называется интервалом прямой.

$$\text{Если } h_B - h_A = 1 \text{ то } L = l$$

Между уклоном и интервалом существует зависимость:

$$i = \frac{1}{l} \quad l = \frac{1}{i} \quad l = \frac{L}{\Delta h}$$

Интервал – это такая величина заложения отрезка прямой, разность отметок концов которого равна единице.

Градуирование прямой

Проградуировать прямую – это значит найти на ней точки, имеющие целочисленные отметки. Существует несколько способов градуирования прямой.

1. Графические (рис. 11.4)
2. Аналитический (рис. 11.5).

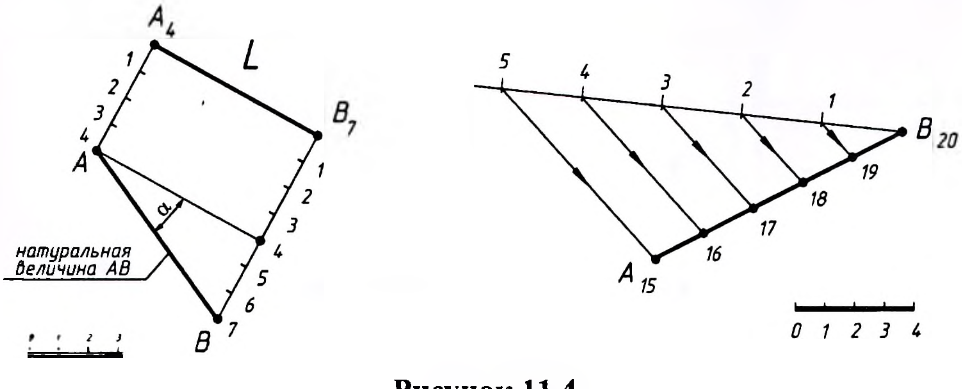


Рисунок 11.4

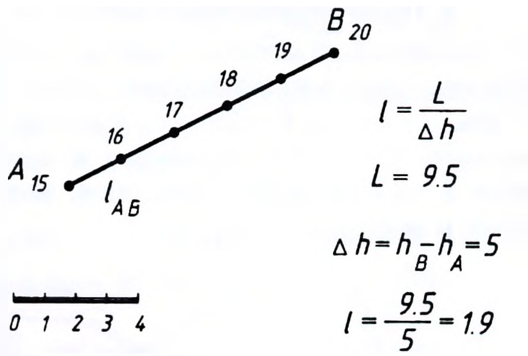


Рисунок 11.5

3. Взаимное положение прямых

Если в пространстве прямые параллельны, то их проекции с числовыми отметками параллельны, интервалы равны и отметки возрастают в одном направлении (рис. 11.6).

Рисунок 11.6

Если прямые в пространстве пересекаются, то их проекции пересекаются или сливаются, а точка пересечения имеет одну отметку (рис. 11.7).

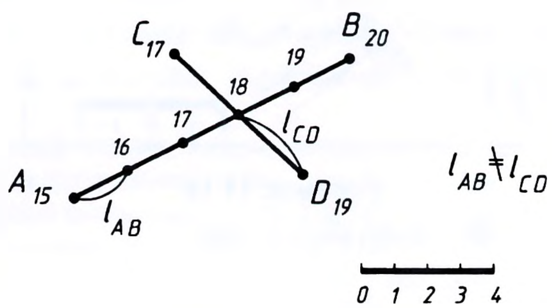


Рисунок 11.7

Пример. Определить, пересекаются ли заданные прямые.

Рисунок 11.8

4. Проецирование плоскости

Плоскость в проекциях с числовыми отметками задается теми же способами, что и в ортогональном проецировании. Однако более удобно задавать плоскость масштабом уклона.

Пусть в пространстве задана плоскость P общего положения с нанесенными на ней через единицу измерения горизонталями (рис. 11.9). Проведем в плоскости P линию наибольшего ската 4 - 0, перпендикулярную к горизонталям. Расстояние между проекциями горизонталей есть интервал линии наибольшего ската – *l*.

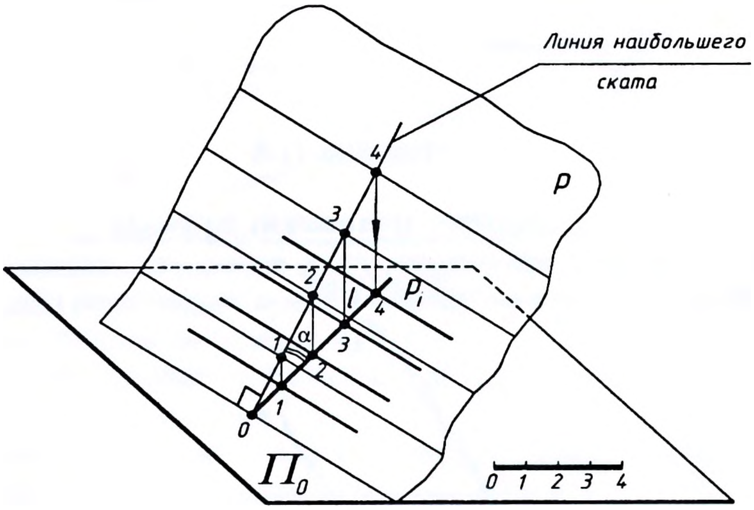


Рисунок 11.9

Проекция линии наибольшего ската с нанесенными на ней интервалами и будет масштабом уклона плоскости (рис. 11.10).

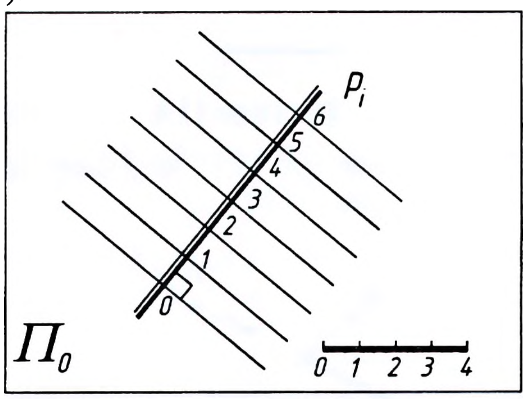


Рисунок 11.10

Пример. Задать плоскость ABC масштабом уклона.

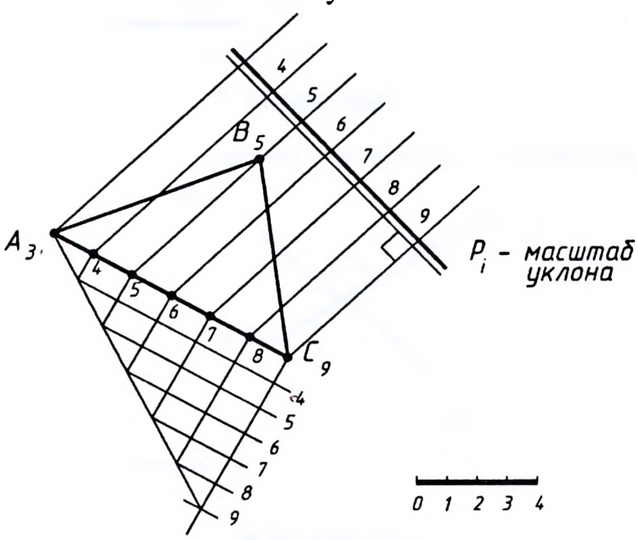


Рисунок 11.11

Решение:
1. Определяем сторону с максимальной разностью отметок A_3 C_9 .
2. Градуируем эту сторону.
3. Строим горизонтали плоскости, т.е. соединяем точки с одинаковыми отметками.
4. Строим линию наибольшего ската.
5. Проводим масштаб уклона плоскости.

5. Взаимное положение прямой и плоскости

Прямая может быть параллельна, может пересекать плоскость (частный случай – перпендикулярна плоскости).

Пример. Определить точку пересечения прямой AB с плоскостью α. (рис. 11.12).

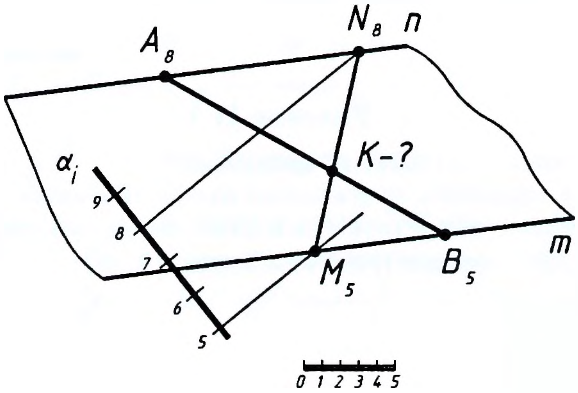


Рисунок 11.12

Алгоритм решения задачи

1. Заключаем прямую AB во вспомогательную плоскость γ (m | | n), m и n проходят через концы отрезка AB и являются горизонталями плоскости γ.
2. Строим горизонтали плоскости α.
3. Находим точки пересечения соответствующих горизонталей, точки M и N, соединяем их. Это линия пересечения заданной и вспомогательной плоскостей.
4. Находим точку K на пересечении MN и AB.

6. Взаимное положение плоскостей

Плоскости в пространстве могут быть параллельны и пересекаться (частный случай – под прямым углом).

У параллельных плоскостей уклоны параллельны, интервалы одинаковы и отметки возрастают в одном направлении. В противном случае плоскости пересекаются.

Пример. Построить линию пересечения плоскостей P_i и Q_i .

Для построения линии пересечения плоскостей определяют точки пересечения двух пар их горизонталей с одинаковыми отметками каждой пары (рис. 11.13).

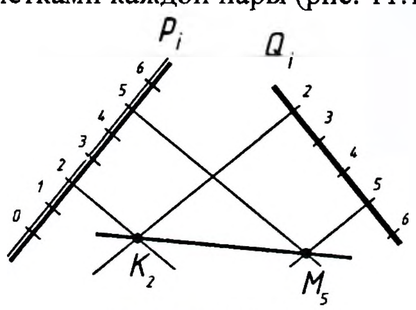


Рисунок 11.13

7. Проекции тел и поверхностей

Применяя метод проекций с числовыми отметками для изображения геометрических тел, необходимо на горизонтальной проекции данного тела указывать отметки характерных точек и линий (если вся линия имеет одинаковую отметку).

В многограннике характерными точками являются его вершины (рис. 11.14). Основание пирамиды ABC расположено в плоскости $П_0$, а вершина S отстоит от плоскости $П_0$ на 12 метров.

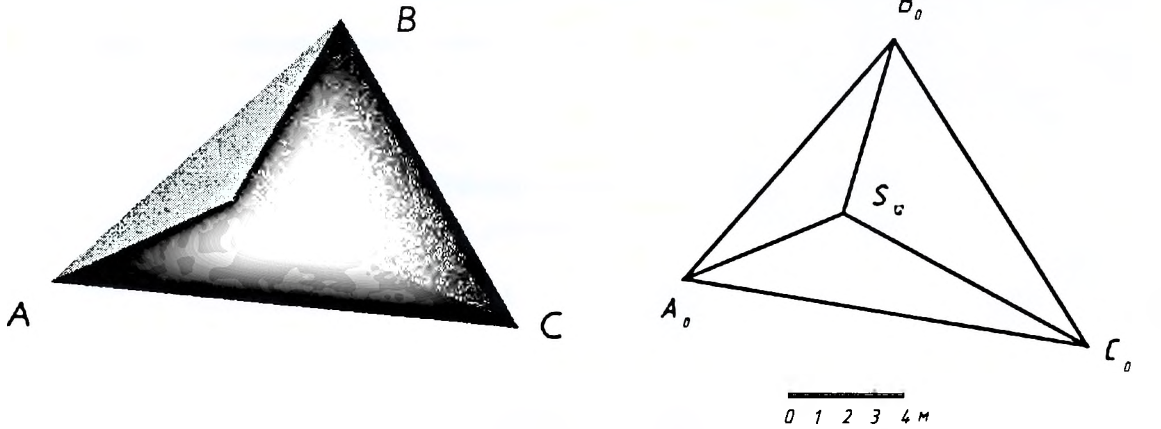


Рисунок 11.14

Кривые поверхности задаются рядом проекций горизонтальных сечений, проведенных через единицу измерения, т.е. задаются проекциями их горизонталей.

Проекции кругового конуса используются в качестве вспомогательных при построении горизонталей откосов насыпей и выемок (рис. 11.15, рис. 11.16).

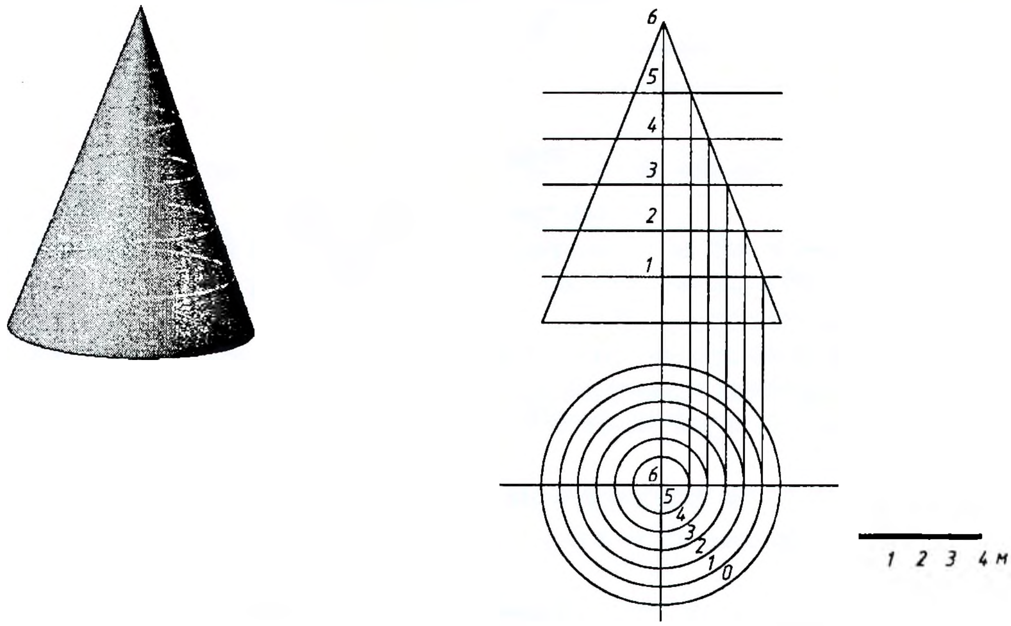


Рисунок 11.15

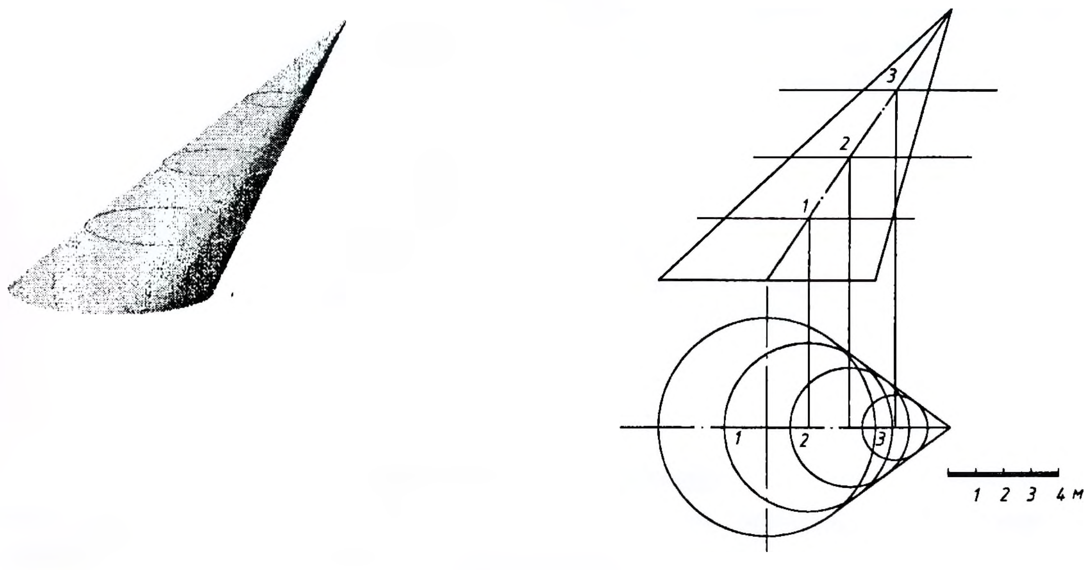


Рисунок 11.16

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Фролов С.А. Курс начертательной геометрии. – М.: Машиностроение, 1983.
2. Кузнецов Н.С. Начертательная геометрия. – М.: Высш. шк., 1981.
3. Крылов Н.Н. и др. Начертательная геометрия. – М.: Высш. шк., 1990.
4. Винницкий Н.Г. Начертательная геометрия. – М.: Высш. шк., 1975.
5. Виноградов В.Н. Начертательная геометрия. – М.: Высш.шк., 2002.

Дополнительная

1. Гордон В.О. и др. Курс начертательной геометрии. – М.: Наука, 1988, 1998.
2. Локтев О.В. Краткий курс начертательной геометрии. – М.: Высш. шк., 1999.

Сборники задач

1. Арустамов Х.А. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Машиностр., 1978.
2. Сербина Е.И. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Высш. шк., 1970.
3. Гордон В.О. и др. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Наука, 1977, 1998.

Учебное издание

Составители: Базенков Тимофей Николаевич
Житенева Наталья Сергеевна
Шевчук Татьяна Вячеславовна

Конспект лекций по начертательной геометрии

для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: Шевчук Т.В.
Редактор: Строкач Т.В.
Корректор: Никитчик Е.В.
Компьютерная вёрстка: Кармаш Е.Л.

Подписано к печати 30.12.2009 г. Формат 60x84 $^1/_8$. Бумага «Снегурочка». Усл. п. л. 6,74. Уч. изд. л. 7,25. Тираж 50 экз. Заказ № 1188. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет. 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.