МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Теория вероятностей

Брест 2023

УДК 519.2
ББК 22.17

В настоящем учебно-методическом издании предложены задачи и упражнения по основным темам раздела «Теория вероятностей», которые изучают студенты технических специальностей учреждений высшего образования в курсе «Теория вероятностей и математическая статистика». Содержатся краткие теоретические сведения, наборы заданий для аудиторной и индивидуальной работы.

Авторы: Каримова Т.И., кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и информатики
Гладкий И.И., старший преподаватель кафедры математики и информатики
Крагель Е.А., старший преподаватель кафедры математики и информатики
Махнист Л.П., кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры математики и информатики
Кузьмина Е.В., старший преподаватель кафедры математики и информатики

Рецензент: Мирская Е.И., кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной математики БрГУ им. А.С. Пушкина

Содержание

Случайные события

1. Элементы комбинаторики

Раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных элементов (объектов), называют *комбинаторикой.*

Большинство задач комбинаторики решают с помощью двух общих правил: правила суммы и правила произведения.

Правило суммы. Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а объект B – k способами (не такими, как A), то объект «или A, или B» можно выбрать $m+k$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать (независимо от выбора объекта A) k способами, то объект «A и B» можно выбрать $m \cdot k$ способами.

Пусть имеем конечное множество различных элементов: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Перестановками из n элементов называют различные комбинации, составленные из n данных элементов, которые отличаются друг от друга порядком следования элементов.

Количество различных перестановок из n данных элементов можно найти по формуле:

$$P_n = n!$$

Пример 1.1. Сколькими различными способами можно расположить 5 книг на полке?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 5 элементов (книг), т.е. $P_5 = 5! = 120$.

Ответ. 120.

Размещениями из n элементов по k ($0 \le k \le n$) называют различные комбинации, составленные из n данных элементов по k в каждой, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их следования.

Количество различных размещений из n данных элементов по k можно найти по формуле:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример 1.2. В турнире принимают участие 8 команд. Сколько различных предсказаний относительно распределения трех первых мест можно сделать?

Решение. Т.к. при распределении трех первых мест важно не только, какие именно команды попадут в тройку лидеров, но и в каком порядке они будут расположены, то искомое число предсказаний равно числу размещений из 8 элементов (команд) по 3, т.е.

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336.$$

Ответ. 336.

Сочетаниями из n элементов по k ($0 \le k \le n$) называют различные комбинации, составленные из n данных элементов по k в каждой, которые отличаются друг от друга только самими элементами.

Количество различных сочетаний из n данных элементов по k можно найти по формуле:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)...(n-1+k)}{k\,!} \text{ или } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

C_n^k можно обозначить также с помощью символа $\binom{n}{k}$:

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример 1.3. Из группы студентов, состоящей из 10 человек, для участия в конкурсе выбирают 4 человека. Определить число всех возможных результатов выбора.

Решение. Число всех возможных результатов выбора равно числу сочетаний из 10 элементов (студентов) по 4, т.е.

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4} = 210.$$

Ответ. 210.

Свойства сочетаний:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$, если m мало отличается от n, то удобно использовать это свойство.

2. $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$.

3. $C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^n C_n^n = 0$;

4. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$.

Пусть некоторые элементы множества $a_1, a_2, ..., a_n$ повторяются. Предположим, что среди n элементов k $(k < n)$ различных. Причем, элементов первого типа n_1, элементов второго типа $n_2, ...$, элементов k-го типа n_k и $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Подсчитаем *число перестановок с повторениями*. При перестановке n элементов всего $n!$ размещений, но перестановки элементов одного и того же типа ничего не меняют. Перестановки элементов 1, 2, …, k типов можно делать одновременно независимо друг от друга. Поэтому после $n_1!\, n_2! ... n_k!$ перестановок элементы исходной перестановки не изменятся.

Итак, число перестановок с повторяющимися элементами равно

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \,...\, n_k!}.$$

Пример 1.4. Сколько различных перестановок можно сделать из букв слова «Миссисипи»?

$$P_9(M_1, И_4, C_3, П_1) = \frac{9!}{1! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = 40 \cdot 63 = 2520.$$

Ответ. 2520.

Пусть данное множество содержит n элементов, из которых надо образовать *размещения по* m *элементов с повторениями*. Очевидно, что любой элемент (первый, второй, …, m-й) может быть выбран n способами. По правилу произведения получаем, что число таких размещений будет равно

$$\tilde{A}_n^m = n^m.$$

Число сочетаний $\tilde{C}_n^m$ с повторениями из n элементов по m находят по формуле

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Пример 1.5. В продажу поступили открытки 10 разных видов. Сколькими способами можно образовать набор из 8 открыток? Из 12 открыток?

Решение. В данном случае имеем дело с сочетаниями с повторениями.

$$\tilde{C}_{10}^8 = C_{10+8-1}^8 = C_{17}^8 = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} =$$

$$= 17 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 10 = 24310.$$

$$\tilde{C}_{10}^{12} = C_{21}^{12} = C_{21}^9 = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} =$$

$$= 19 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 14 \cdot 13 = 293930.$$

Ответ. 24310; 293930.

Задания для аудиторной работы

1.1. В 1«А» классе учится 10 девочек и 20 мальчиков, в 1«Б» классе – 18 девочек и 8 мальчиков. Из каждого класса выбирают по одному ученику для участия в конкурсе. Сколькими способами можно выбрать:

а) такую пару учеников;

б) двух учениц;

в) ученика и ученицу.

1.2. Используя цифры, принадлежащие множеству $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, записывают четырехзначные числа (цифры в числе *могут* повторяться). Сколько можно записать

а) четырехзначных чисел;

б) чисел, больших 4999;

в) таких чисел, чтобы цифры тысяч и десятков были нечетными, а остальные две четные;

г) чисел кратных 5.

1.3. Используя цифры, принадлежащие множеству $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, записывают четырехзначные числа (цифры в числе *не могут* повторяться). Сколько можно записать

а) четырехзначных чисел;

б) чисел, больших 4999;

в) таких чисел, чтобы цифры тысяч и десятков были нечетными, а остальные две четные;

г) чисел кратных 5.

1.4. Найдите все сочетания и размещения из четырехэлементного множества $\{a, b, c, d\}$ по два элемента.

1.5. Дано множество $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Найдите количество всех

а) всех четырехэлементных последовательностей из элементов множества *A*;

б) трехэлементных последовательностей различных элементов, принадлежащих множеству *A*;

в) двухэлементных подмножеств множества *A*.

1.6. Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник произведений Дж. Лондона, располагая их

а) в произвольном порядке;

б) так, чтобы I, V и IX тома стояли рядом (в любом порядке);

в) так, чтобы I, II и III тома не стояли рядом (в любом порядке)?

1.7. Из группы студентов, состоящей из 16 человек, формируют две строительные бригады по 10 и 6 человек в каждой. Сколькими способами можно создать эти бригады?

1.8. Из чисел 1, 2, 3, …, 100 составлены всевозможные парные произведения. Сколько полученных чисел будут кратны трем?

1.9. Из 20 сотрудников лаборатории 5 человек должны уехать в командировку. Сколько может быть составов отъезжающей группы, если заведующий лабораторией и два ведущих инженера одновременно не должны уезжать?

Задания для индивидуальной работы

1.10. Решите уравнение

а) $\binom{n+2}{4} = 5\binom{n}{3}$; б) $2\binom{n}{n-4} = \binom{n+1}{n-3}$;

в) $\binom{n}{2} = 10$; г) $\binom{n+6}{2} = 28$.

1.11. Решите неравенства

а) $\binom{n}{2} < 21$; б) $\dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{n}{2}} > 23$; в) $\binom{n}{3} + \binom{n}{4} = \binom{n+1}{3}$.

1.12. Проверьте, будет ли число $\binom{1}{0}+\binom{3}{2}+\binom{5}{4}+\ldots+\binom{39}{38}+\binom{41}{40}$ меньше, чем 500.

1.13. Студенты некоторого курса изучают 12 дисциплин. В расписание занятий каждый день включается 3 предмета. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий на каждый день, если а) предметы в течении дня *могут* повторяться; б) предметы в течении дня *не могут* повторяться?

1.14. Сколькими способами можно рассадить 8 человек по 8 вагонам поезда, если в каждый вагон сядет по одному человеку?

1.15. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «ракета», чтобы все они начинались с буквы «р»?

1.16. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, 1 ферзя, 1 короля) на первой линии шахматной доски?

1.17. Сколькими способами можно из 15 человек составить делегацию в составе 8 человек?

1.18. Сколькими способами можно из 9 человек образовать 3 комиссии по 4, по 3 и по 2 человека в каждой?

1.19. В беге на 100 м выступает 8 спортсменов: 4 спортсмена с Ямайки, 3 англичанина и 1 грек. Забег будет проводиться на восьми беговых дорожках. Перед забегом проводится жеребьевка, которая установит по какой дорожке будет бежать каждый спортсмен.

а) Сколько существует результатов жеребьевки?

б) Сколько существует результатов жеребьевки, при которых грек бежит по первой дорожке?

в) Сколько существует результатов жеребьевки, при которых грек бежит по пятой дорожке?

г) Сколько существует результатов жеребьевки, при по дорожкам 1–4 побегут ямайцы?

д) Сколько существует результатов жеребьевки, при которых никакие два спортсмена из Европы не побегут по соседним дорожкам и никакие два спортсмена с Ямайки не побегут по соседним дорожкам?

е) Сколько существует результатов жеребьевки, при которых никакие два спортсмена из Европы не побегут по соседним дорожкам?

1.20. В группе студентов 12 девушек и 9 юношей. Из группы выбирают троих студентов для подготовки докладов.

а) Сколькими способами можно сделать такой выбор?

б) Сколькими способами можно выбрать тройку, состоящую только из девушек?

в) Сколькими способами можно выбрать тройку, состоящую из юноши и двух девушек?

г) Сколькими способами можно выбрать тройку, в состав которой входит хотя бы две девушки?

д) Сколькими способами можно выбрать тройку, в состав которой входит хотя бы один юноша?

1.21. В шахматном турнире участвовало 14 шахматистов, каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего сыграно партий?

1.22. Сколькими способами можно смоделировать флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти различных цветов?

1.23. Пять пассажиров садятся в электропоезд, состоящий из 10 вагонов. Каждый пассажир может сесть в любой вагон. Определите число всех возможных вариантов размещения пассажиров в поезде.

1.24. В пассажирском поезде 12 вагонов. Сколькими способами можно размещать вагоны, составляя этот поезд?

1.25. Сколькими способами можно распределить 6 различных книг между 3 учениками так, чтобы каждый получил 2 книги?

1.26. Сколькими различными способами собрание из 40 человек может выбрать председателя собрания, его заместителя и секретаря?

1.27. Бригадир должен отправить на работу звено из 5 человек. Сколько таких звеньев можно составить из 12 человек бригады?

1.28. При встрече 12 человек обменялись рукопожатиями. Сколько рукопожатий было сделано при этом?

1.29. Сколько прямых линий можно провести через 8 точек, если известно, что любые три из них не лежат на одной прямой?

1.30. Сколькими способами можно выставить на игру футбольную команду, состоящую из трех нападающих, трех полузащитников, четырех защитников и вратаря, если всего в команде 6 нападающих, 3 полузащитника, 6 защитников и 1 вратарь?

1.31. Автоколонна, состоящая из 30 автомобилей, должна выделить на уборочные работы в колхозы 12 грузовиков. Сколькими способами это можно сделать?

1.32. Сколько различных пятизначных чисел можно записать при помощи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (без повторений)?

1.33. На шахматном турнире было сыграно 45 партий, причем каждый из шахматистов сыграл с остальными по одной партии. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

1.34. Сколько различных «слов» можно получить, переставляя буквы в слове а) СОЛНЦЕ; б) ТЕАТР; в) ЛИЛИ; г) SOS; д) МОРОЖЕННОЕ?

1.35. Пять человек вошли в лифт на первом этаже девятиэтажного дома. Сколькими способами пассажиры могут выйти из лифта на нужных этажах?

1.36. Группа туристов из 12 юношей и 7 девушек выбирает по жребию 5 человек для приготовления ужина. Сколько существует способов, при которых в эту «пятерку» попадут:

а) только девушки; б) 3 юноши и 2 девушки;
в) 1 юноша и 4 девушки; г) хотя бы один юноша?

1.37. Найдите количество двенадцатизначных натуральных чисел, таких, что сумма их цифр равна 8 и в записи числа нет цифр 1 и 4.

1.38. Найдите количество десятизначных натуральных чисел, таких, что сумма их цифр равна 13 и в записи числа нет цифры 0.

2. Алгебра событий

Случайным событием (событием) будем называть любой исход опыта (выполнения определенного комплекса условий), который может появиться или не появиться.

События обозначают большими латинскими буквами: *A, B, C, …*

Событие называют *достоверным* (Ω), если в условиях данного опыта оно обязательно произойдет.

Событие называют *невозможным* ($\varnothing$), если в условиях данного опыта оно никогда не произойдет.

Событие «не *A*» означает ненаступление события *A*. Оно обозначается $\bar{A}$ и называется *противоположным* к *A*.

Событие «*A* и *B*» означает совместное наступление событий *A* и *B*. Оно обозначается $A \cdot B = A \cap B$ и называется их *произведением*.

Событие «*A* или *B*» означает наступление или *A*, или *B*, или обоих вместе. Обозначается $A + B = A \cup B$ и называется их *суммой*.

Если $A \cdot B = \varnothing$, то *A* и *B* – *несовместные* события.

Свойства суммы: $A + A = A$, $A + \Omega = \Omega$, $A + \bar{A} = \Omega$, $A + B = B + A$, $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Свойства произведения: $A \cdot A = A$, $A \cdot \Omega = A$, $A \cdot \bar{A} = \varnothing$, $A \cdot B = B \cdot A$, $A(BC) = (AB)C$, $A(B + C) = AB + AC$.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют *полную группу событий*, если:

1. $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$ (событие достоверное),
2. $A_i A_j = \varnothing,\ i \neq j$ (события попарно несовместные).

Каждое событие, которое может наступить в результате опыта (испытания), называется *элементарным событием (исходом)* данного опыта, если это событие нельзя разложить на более простые события.

Множество всех элементарных событий данного опыта образует *пространство элементарных событий (исходов)* $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ ...,\ \omega_n\}$. Отметим, что Ω образует полную группу событий. Исходы ω_i, при которых событие *A* наступает, называются *благоприятствующими* событию *A*.

Задания для аудиторной работы

2.1. На плоскость бросается точка. Событие *A* (*B*) состоит в попадании в круг *A* (в круг *B*). Выясните смысл событий $\bar{A}, \bar{B}, A \cup B, \overline{A \cup B}, A \cap B, \overline{A \cap B}$.

2.2. Укажите события, противоположные данным:

1) событие *A* состоит в том, что в шахматной партии выиграл первый игрок;

2) событие *B* состоит в том, что из трех облигаций ни одна не выиграет;

3) событие *C* состоит в том, что среди четырех карт все карты разной масти;

4) событие *D* состоит в том, что три дня подряд шел дождь;

5) событие *E* состоит в том, что произошло не более двух попаданий при пяти выстрелах.

2.3. Пусть *A, B, C* – произвольные события. Найдите выражения для событий, состоящих в том, что из событий *A*, *B* и *C*:

1) произошло только *A*;
2) произошли *A* и *B*, а *C* не произошло;
3) произошли все 3 события;
4) произошло хотя бы одно из этих событий;
5) произошло одно и только одно из этих событий;
6) произошло не более двух событий.

2.4. Опыт состоит в случайном выборе двух разных букв из множества $\{A, B, C, D, E, F\}$. Опишите пространство элементарных событий данного опыта Ω и укажите количество всех элементарных исходов.

2.5. Из множества чисел $\{1; 2; 3; ...; 10\}$ случайным образом выбирается одно. Событие *A* состоит в том, что выбранное число меньше 7, событие *B* состоит в том, что выбрано четное число. Принимая в качестве множества элементарных событий этого опыта множество $\Omega = \{1; 2; 3; ...; 10\}$, укажите все элементарные события, благоприятствующие событию

а) A; б) B; в) $\overline{A}$; г) $A \cap B$; д) $A \cup B$.

Задания для индивидуальной работы

2.6. Пусть *A*, *B* и *C* – произвольные события. Найдите выражения для событий, состоящих в том, что из событий *A*, *B* и *C*:

1) произошли по крайней мере два события из трех;
2) произошли только два события;
3) не произошло ни одного из данных событий.

2.7. Электрическая цепь между *M* и *N* построена по схеме (рис. 2.1). События *A*, *B* и *C* соответственно означают исправную работу элементов *a*, *b* и *c*. Составьте событие *F*, состоящее в том цепь работает, и событие $\overline{F}$, состоящее в том, что произошел разрыв цепи.

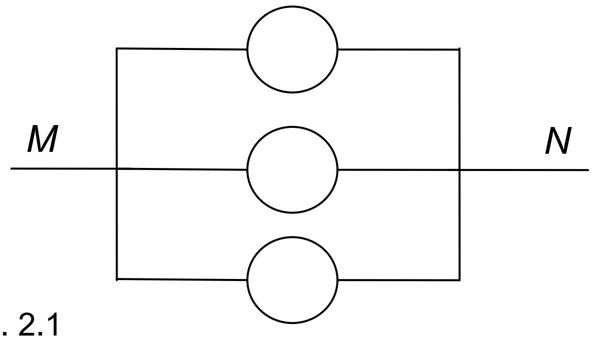


рис. 2.1

2.8. Электрическая цепь между *M* и *N* построена по схеме (рис. 2.2). События *A*, *B* и *C* соответственно означают исправную работу элементов *a*, *b* и *c*. Опишите пространство элементарных событий. Составьте событие *D*, состоящее в том, что цепь работает, и событие $\overline{D}$, состоящее в том, что произошел разрыв цепи.

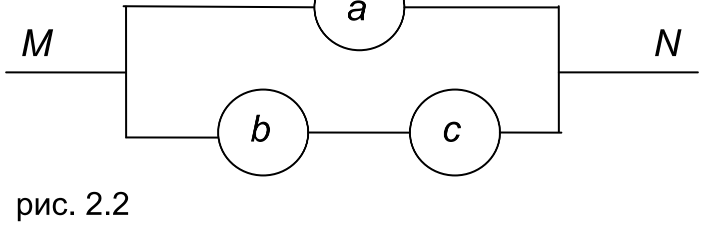


рис. 2.2

2.9. В электрической цепи пять элементов расположены по схеме (рис. 2.3)

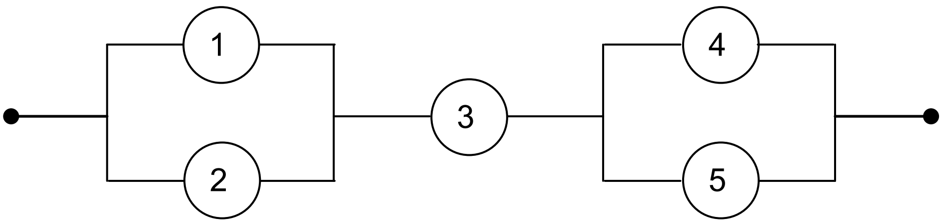


рис. 2.3

События A_i, $i=\overline{1,5}$ означают работу i элемента. Опишите событие B, состоящее в том, что цепь работает и событие $\bar{B}$, состоящее в том, что произойдет разрыв цепи.

2.10. Опыт состоит в трехкратном случайном выборе с возвращением одной из букв множества $\{A, B, C, D, E, F\}$. Опишите пространство элементарных событий этого опыта Ω и найдите количество всех элементарных исходов.

2.11. Игра состоит в одновременном подбрасывании игральной кости и двух монет. Опишите множество элементарных событий Ω данного опыта и найдите количество всех элементарных исходов.

3. Классическое и геометрическое определения вероятности

Пусть $\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,...,\ \omega_n\}$ – пространство элементарных исходов данного опыта и события ω_i, $i=\overline{1,n}$ являются равновозможными.

Вероятностью события А называется число, равное отношению числа m элементарных исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу n всех равновозможных исходов опыта.

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Часто число m обозначают $|A|$, а число n – $|\Omega|$, тогда вероятность события A будет записана: $P(A)=\dfrac{|A|}{|\Omega|}$.

Вероятность любого события удовлетворяет неравенству $0\le P(A)\le 1$. Для достоверного события $P(\Omega)=1$, для невозможного события $P(\varnothing)=0$.

Пример 3.1. В урне находится 5 черных и 3 белых шара. Какова вероятность того, что наудачу взятый из урны шар окажется белым?

Решение. Опишем пространство элементарных исходов. Будем обозначать «$Ч_i$» появление i-го черного шара, $i=\overline{1,5}$, и «$Б_j$» появление j-го белого шара, $j=\overline{1,3}$.

$$\Omega=\{Ч_1,\ Ч_2,\ Ч_3,\ Ч_4,\ Ч_5,\ Б_1,\ Б_2,\ Б_3\}$$

Всех исходов восемь, т.е. $n=8$.

Событие A состоит в том, что наудачу взятый из урны шар окажется белым. Ему благоприятствует три исхода, $m = 3$.

$$P(A) = \frac{3}{8} = 0{,}375.$$

Ответ. 0,375.

Пример 3.2. Монета брошена два раза. Найдите вероятность того, что

а) только один раз появится «герб»;

б) ни разу не появится «герб»;

в) хотя бы один раз появится «герб».

Решение. Опыт состоит в двукратном подбрасывании монеты. Опишем пространство элементарных исходов. Будем обозначать выпадение «герба» – Г, «решки» – Р.

$$\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$$

Всех исходов $n = 4$.

а) Событие A состоит в том, что только один раз появится «герб», ему благоприятствуют 2 исхода, $m = 2$. Тогда $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

б) Событию B, состоящему в том, что ни разу не появится «герб», благоприятствует один исход, $m = 1$, тогда $P(B) = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

с) Событию C, состоящему в том, что хотя бы один раз появится «герб», благоприятствуют три исхода, $m = 3$: $P(C) = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Ответ. а) 0,5; б) 0,25; в) 0,75.

Пример 3.3. Среди 20 деталей имеется 6 бракованных. Для проверки качества наудачу выбирают 4 детали. Найти вероятность того, что среди отобранных будут:

а) ровно 3 стандартные детали;

б) от 2-х до 4-х стандартных деталей;

в) хотя бы одна бракованная.

Решение. Общее число выбора 4 деталей из 20 имеющихся равно числу сочетаний из 20 по 4, т.е.

$$n = C_{20}^{4} = \frac{20!}{4! \cdot 16!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 16!} = 4845.$$

а) Пусть событие A состоит в том, что среди 4 взятых деталей 3 стандартных и 1 бракованная. Запишем в виде схемы:

$$20 \text{ } \textit{деталей} = 14 \text{ } \textit{стандартных} + 6 \text{ } \textit{бракованных}$$

$$4 \text{ } \textit{детали} = 3 \text{ } \textit{стандартных} + 1 \text{ } \textit{бракованная}$$

Применив правило произведения, найдем число таких исходов:

$$m_1 = C_{14}^{3} \cdot C_{6}^{1} = \frac{14!}{3! \cdot 11!} \cdot \frac{6!}{1! \cdot 5!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11!} \cdot \frac{6 \cdot 5!}{1 \cdot 5!} = 2184.$$

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{2184}{4845} \approx 0{,}45.$$

б) Пусть событие B состоит в том, что среди 4 взятых деталей: или 2 стандартные и 2 бракованные; или 3 стандартные и 1 бракованная; или 4 стандартные и ни одной бракованной. Применив правила суммы и произведения, найдем число таких исходов:

$$m_2 = C_{14}^2 \cdot C_6^2 + C_{14}^3 \cdot C_6^1 + C_{14}^4 \cdot C_6^0 = 1365 + 2184 + 1001 = 4550.$$

$$P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{4550}{4845} \approx 0,94.$$

в) *I способ.* Пусть событие C состоит в том, что среди четырех взятых деталей хотя бы одна бракованная, т.е. или 1, или 2, или 3, или 4 бракованных. Применив правила суммы и произведения, найдем число таких исходов:

$$m_3 = C_6^1 \cdot C_{14}^3 + C_6^2 \cdot C_{14}^2 + C_6^3 \cdot C_{14}^1 + C_6^4 \cdot C_{14}^0 = 2184 + 1365 + 280 + 15 = 3844.$$

$$P(C) = \frac{m_3}{n} = \frac{3844}{4845} \approx 0,79.$$

II способ. Рассмотрим событие, противоположное событию C. Событие $\overline{C}$ состоит в том, что среди четырех взятых деталей все детали стандартные. Тогда, $m_4 = C_{14}^4 \cdot C_6^0 = 1001$ и $P(\overline{C}) = \frac{m_4}{n} = \frac{1001}{4845} \approx 0,21.$

Вероятность события C найдем по формуле

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0,21 = 0,79.$$

Ответ. а) 0,45; б) 0,94; в) 0,79.

Геометрическая вероятность. Если число элементарных исходов опыта бесконечно и заполняет область R, а число исходов, благоприятствующих событию A, бесконечно и заполняет область Q, то вероятность случайного события A определяется по формуле

$$P(A) = \frac{мера\ (Q)}{мера\ (R)} = \frac{\mu(Q)}{\mu(R)},$$

где мера области – это или ее длина, или площадь, или объем.

Пример 3.4. Наугад взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что $x + y \le 1$, и $xy \ge 0,09$.

Решение. Каждое из чисел x и y может принять бесконечно много значений из условия $0 < x \le 1$ и $0 \le y \le 1$. Воспользуемся геометрической иллюстрацией, получим что Ω – квадрат со стороной, равной 1.

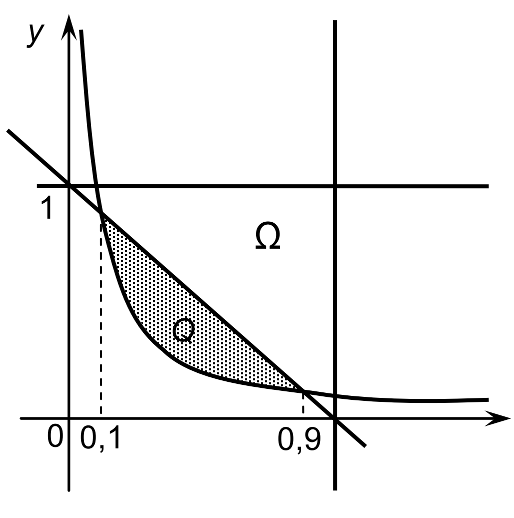


рис.4

Изобразим благоприятную область Q: $\begin{cases} x+y \le 1, \\ xy \ge 0{,}09. \end{cases}$

Найдем точки пересечения линий, ограничивающих область.

$$\begin{cases} x+y=1, \\ xy=0{,}09; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-x, \\ x(1-x)=0{,}09. \end{cases}$$

Решим второе уравнение:

$$x(1-x)=0{,}09 \;\Rightarrow\; x^2-x+0{,}09=0 \;\Rightarrow\; x_1=0{,}1,\;\; x_2=0{,}9.$$

Пусть событие A состоит в том, что взятые числа x и y удовлетворяют условиям $\begin{cases} x+y \le 1, \\ xy \ge 0{,}09. \end{cases}$

Тогда $P(A)=\dfrac{\mu(Q)}{\mu(\Omega)}$, $\mu(\Omega)=S(\Omega)=1.$

$$\mu(Q)=S_Q=\iint\limits_Q dx\,dy=\int\limits_{0,1}^{0,9}dx\int\limits_{\frac{0,09}{x}}^{1-x}dy=\int\limits_{0,1}^{0,9}\left(1-x-\frac{0{,}09}{x}\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{2}-0{,}09\ln x\right)\Bigg|_{0,1}^{0,9}=\left(0{,}9-\frac{0{,}81}{2}-0{,}09\ln 0{,}9\right)-\left(0{,}1-\frac{0{,}01}{2}-0{,}09\ln 0{,}1\right)=$$

$$=0{,}8-0{,}4-0{,}09\ln 9=0{,}4-0{,}09\ln 9=0{,}4-0{,}1976=0{,}2024.$$

Ответ. 0,2024.

Задания для аудиторной работы

3.1. В урне 5 шаров: 3 белых и 2 черных. Наудачу извлечен 1 шар. Найдите вероятность того, что он: а) белый; б) черный; в) синий; г) синий или белый; д) черный или белый.

3.2. Один раз подбрасывают игральную кость. Найдите вероятность того, что выпадет: а) четное число очков; б) число очков не большее двух; в) число очков меньшее шести; г) число очков не меньшее шести.

3.3. Правильную монету подбрасывают 2 раза. Найдите вероятность того, что:

а) герб выпадет 2 раза;

б) герб выпадет 1 раз;

в) герб выпадет хотя бы один раз?

3.4. Игральная кость подбрасывается 2 раза. Найдите вероятность того, что:

а) сумма брошенных очков равна 6, а произведение 8;

б) сумма выпавших очков не более трех;

в) на обеих костях выпадет одинаковое число очков;

г) хотя бы на одной кости выпадет шесть очков?

3.5. В урне 5 белых, 8 зеленых и n черных шаров. Вероятность того, что из урны наудачу будет извлечен зеленый или черный шар равна $\frac{3}{4}$. Найдите число n.

3.6. Из множества $\{1; 2; 3\}$ случайным образом выбирают цифры и составляют из них трехзначное число. Найдите вероятность того, что полученное число меньше, чем 200, если выбор цифр проводят а) без возвращения; б) с возвращением.

3.7. Двое друзей A и B стоят в очереди из 8 человек. Найдите вероятность того, что

а) A и B стоят рядом;

б) между A и B стоят два человека.

3.8. Из колоды 36 карт наудачу вынимают 3 карты. Найдите вероятность того, что среди них 2 туза.

3.9. В урне 12 белых и 8 черных шаров. Найдите вероятность того, что среди наугад вынутых пяти шаров будет

а) ровно 3 черных;

б) хотя бы один черный.

3.10. В кошельке находятся 5 двухрублевых монет и 7 монет по одному рублю. Найдите вероятность того, что за две монеты, наудачу извлеченные из кошелька, можно купить пирожное, которое стоит 2,50 рубля.

3.11. В коробке 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Найдите вероятность того, что:

а) все они одного цвета;

б) все они разных цветов;

в) среди них 2 синих и 1 зеленый.

3.12. Внутрь круга радиусом R наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг:

а) квадрата;

б) правильного треугольника;

в) правильного шестиугольника.

3.13. Дано уравнение $x^2 + ax + b = 0$. Известно, что $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 1$, причем вероятность попадания каждой из точек a и b в какой-либо интервал отрезка $[0; 1]$ пропорциональна длине интервала и не зависит от его положения относительно отрезка $[0; 1]$. Найдите вероятность того, что данное уравнение имеет действительные корни.

Задания для индивидуальной работы

3.14. В цеху работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найдите вероятность того, что среди отобранных лиц окажется

а) ровно 3 женщины;

б) хотя бы одна женщина.

3.15. 20 билетов содержат по три вопроса, которые не повторяются. Студент выучил 50 вопросов. Найдите вероятность того, что вытянутый билет содержит:

а) только подготовленные вопросы;

б) только один неподготовленный вопрос;

в) хотя бы один неподготовленный.

3.16. Среди 100 лотерейных билетов 6 выигрышных. Найдите вероятность того, что среди трех извлеченных билетов

а) все выигрышные;

б) хотя бы один выигрышный;

в) только один выигрышный.

3.17. Студент знает 30 вопросов из 35 вопросов программы. Найдите вероятность того, что студент ответит на три заданных вопроса.

3.18. В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наудачу взял четыре детали. Найдите вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

3.19. Куб, все грани которого окрашены, распилили на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешали. Определите вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три; г) четыре.

3.20. Из партии втулок, изготовленных токарем за смену, случайным образом для контроля взяты 10 штук. Найдите вероятность того, что среди них 2 втулки второго сорта, если во второй партии 25 втулок первого сорта и 5 – второго.

3.21. Наугад взятый телефонный номер состоит из 6 цифр. Найдите вероятность того, что в нем все цифры:

а) различные;

б) нечетные.

3.22. На полке случайно расставлены десять книг. Найдите вероятность того, что три определенные книги окажутся рядом.

3.23. В коробке находится 6 одинаковых по форме и близких по диаметру сверл. Случайным образом сверла извлекают из коробки. Найдите вероятность того, что сверла извлекут в порядке возрастания их диаметра.

3.24. Маша и Катя находятся в группе, состоящей из 6 девочек и 5 мальчиков. Дети выстроились случайным образом в ряд. Найдите вероятность события

а) A – первой в ряду стоит девочка;

б) B – первые шесть мест в ряду заняли девочки;

в) C – никакие две девочки не стоят рядом;

г) D – между любыми двумя девочками нет ни одного мальчика;

д) E – между Катей и Машей нет других детей;

е) F – между Катей и Машей стоит ровно пять детей.

3.25. Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры и помнил только, что они различны. Найдите вероятность того, что номер набран правильно, если абонент набрал эти три цифры наудачу.

3.26. Случайно выбранная кость домино оказалась не дублем. Найдите вероятность того, что вторую, так же взятую наудачу кость домино можно приставить к первой.

3.27. В группе спортсменов 7 лыжников и 5 конькобежцев. Из них случайным образом выбирают три спортсмена. Найдите вероятность того, что среди них: а) все лыжники; б) один лыжник и 2 конькобежца.

3.28. В лифт девятиэтажного дома вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найдите вероятность того, что все пассажиры выйдут на четвертом этаже.

3.29. На полке 8 светодиодных ламп, из которых 2 негодные. Случайным образом отбираются 4 лампы. Определите вероятность того, что среди отобранных:

а) три годные и одна негодная лампа;

б) все четыре лампы годные.

3.30. Определите вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001.

3.31. В группе из 9 спортсменов 6 мастеров спорта. Случайным образом отобраны 4 спортсмена. Определите вероятность того, что среди них: а) 2 мастера спорта; б) все 4 мастера спорта.

3.32. В лотерее разыгрывается 1000 билетов. Среди них 2 выигрыша по 50 руб., пять по 20 руб., десять по 10 руб. и 25 по 5 руб. Некто покупает один билет. Найдите вероятность того, что он выиграет: а) не менее 20 руб.; б) что-нибудь.

3.33. На десяти одинаковых карточках написаны цифры от 0 до 9. Определите вероятность того, что случайно составленное с помощью данных карточек двузначное число делится на 18.

3.34. Из пруда, в котором плавает 40 щук, выловили 5, их пометили и выпустили обратно в пруд. Во второй раз выловили 9 щук. Найдите вероятность того, что среди них окажутся только две помеченные щуки.

3.35. Из множества всех натуральных восьмизначных чисел, в десятичной записи которых есть только цифры из множества $\{0; 1; 3; 5; 7; 9\}$, случайным образом выбирают одно. Найдите вероятность того, что сумма цифр выбранного числа равна 3.

3.36. Найдите вероятность того, что точка, случайно выбранная в квадрате $|x| < 4,\ |y| < 4$, лежит вне круга $x^2 + y^2 < 1$.

3.37. На отрезке $[0; 1]$ случайно выбраны две точки, которые разделили его на три отрезка. Найдите вероятность того, что из полученных отрезков можно построить треугольник.

3.38. Найдите вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных правильных дробей не больше единицы, а их произведение не больше $\dfrac{3}{16}$.

3.39. Наудачу взяли два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найдите вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное $\frac{y}{x}$ не больше двух.

3.40. Расстояние от пункта A до пункта B пешеход проходит за 20 минут, а автобус проезжает его за 2 минуты. Интервал движения автобусов 30 минут. Пешеход в случайный момент времени отправляется из A в B. Какова вероятность того, что его в пути догонит автобус?

4. Теоремы сложения и умножения вероятностей случайных событий

Теорема. Вероятность произведения конечного числа совместных событий равна произведению вероятности одного из событий на условные вероятности других событий с учетом наступления предыдущих событий.

$$P(A \cdot B \cdot C \cdot D) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid AB) \cdot P(D \mid ABC).$$

Если любые условные вероятности событий A, B, C, D равны их безусловным вероятностям, то события A, B, C и D *независимы* друг от друга.

Для независимых в совокупности событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ справедливо равенство

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Теорема. Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n), \quad A_i A_j = \varnothing, \; i \neq j.$$

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Для нахождения вероятности суммы трех совместных событий A, B и C, можно использовать формулу:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC).$$

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из n совместных событий равна

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P\left(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n\right).$$

Пример 4.1. Известно, что 2% всей продукции, выпускаемой некоторым заводом, является нестандартной, а 85% стандартной продукции удовлетворяет требованиям высшего сорта. Определите вероятность того, что наудачу выбранное изделие окажется высшего сорта.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что выбранное изделие высшего сорта, событие B – выбранное изделие стандартное.

$$P(\overline{B}) = 0{,}02; \; P(B) = 0{,}98; \; P(A \mid B) = 0{,}85.$$

Тогда искомая вероятность равна

$$P(BA) = P(B) \cdot P(A \mid B) = 0{,}98 \cdot 0{,}85 = 0{,}833 \text{ или } P(BA)\% = 83{,}3\%.$$

Ответ. 0,833.

Пример 4.2. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. По мишени стреляют одиночными выстрелами до первого попадания, после чего стрельбу прекращают. Найдите вероятность того, что будет сделано не более трех выстрелов.

Решение. Обозначим через A_i события, состоящие в том, что при i-ом выстреле произошло попадание в мишень, событие B – будет сделано не более трех выстрелов.

Пользуясь алгеброй событий, представим событие B суммой трех несовместных событий:

$$B = A_1 + \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3; \quad P(A_i) = 0{,}6, \quad P(\overline{A}_i) = 0{,}4, \quad i = 1,2,3.$$

$$P(B) = P(A_1) + P(\overline{A}_1 A_2) + P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3) =$$

$$= P(A_1) + P(\overline{A}_1) P(A_2) + P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) P(A_3),$$

т.к. события A_1, A_2, A_3 независимы.

$$P(B) = 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}6(1 + 0{,}4 + 0{,}16) = 0{,}6 \cdot 1{,}56 = 0{,}936,$$

Ответ. 0,936.

Пример 4.3. Вероятность отказа детали равна 0,4. Для повышения надежности устройства детали дублируются, т.е. вместо одной детали берется n деталей. Каким должно быть n, чтобы вероятность безотказной работы устройства равнялась 99%?

Решение. Пусть событие B состоит в безотказной работе устройства, события A_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ – безотказная работа i детали. $P(\overline{A}_i) = 0{,}4; \quad P(A_i) = 0{,}6$.

Устройство будет безотказно работать, если хотя бы одна из n деталей будет работать, т.е. $B = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Воспользуемся формулой $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n)$.

Тогда

$$P(B) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n) =$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n) = 1 - \left(P(\overline{A}_1)\right)^n = 1 - 0{,}4^n.$$

По условию задачи $P(B) = 0{,}99$, т.е.

$$1 - 0{,}4^n = 0{,}99 \;\Rightarrow\; 0{,}4^n = 0{,}01 \;\Rightarrow n \lg 0{,}4 = \lg 0{,}01 \;\Rightarrow\; n\,(\lg 4 - 1) = -2,$$

$$n = \frac{2}{1 - \lg 4} = \frac{2}{1 - 0{,}602} = 5{,}025, \quad \text{т.е. } n = 6.$$

Ответ. 6.

Пример 4.4. Электрическая цепь *MN* составлена по схеме (рис. 4.1)

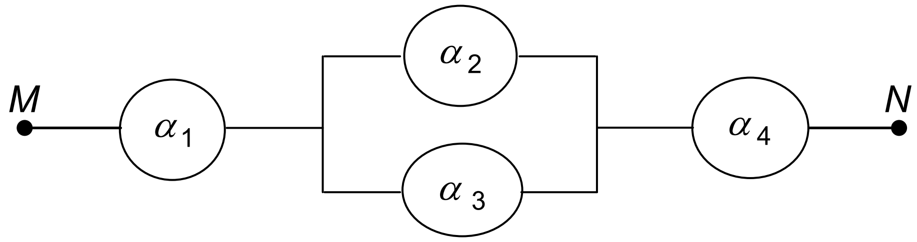


рис.4.1

Все четыре элемента цепи работают независимо друг от друга и вероятности выхода их из строя за данный промежуток времени соответственно равны: $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}5$; $p_3 = 0{,}4$; $p_4 = 0{,}2$. Найдите вероятность безотказной работы цепи в данный промежуток времени.

Решение. Пусть событие A_i $\left(i = \overline{1,4}\right)$ состоит в безотказной работе *i*-го элемента, событие *B* – в безотказной работе всей цепи в данный промежуток времени.

Событие $B = A_1 \cdot (A_2 + A_3) \cdot A_4$. Пользуясь теоремами сложения и умножения вероятностей, получим

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2 + A_3) \cdot P(A_4) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_4) \cdot \left(P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 A_3)\right).$$

Известно, что $P\left(\overline{A}_1\right) = 0{,}3$; $P\left(\overline{A}_2\right) = 0{,}5$; $P\left(\overline{A}_3\right) = 0{,}4$; $P\left(\overline{A}_4\right) = 0{,}2$. Тогда $P(A_1) = 0{,}7$, $P(A_2) = 0{,}5$, $P(A_3) = 0{,}6$, $P(A_4) = 0{,}8$, и

$$P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot \left(0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}5 \cdot 0{,}6\right) = 0{,}56 \cdot 0{,}8 = 0{,}448.$$

Ответ. 0,448.

Задания для аудиторной работы

4.1. В денежно-вещевой лотерее на серию из 10000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Найдите вероятность какого-либо выигрыша для владельца:

а) одного лотерейного билета; б) двух билетов.

4.2. Из множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ случайным образом выбирают два различных числа. Определим следующие события:

A – сумма выбранных чисел больше 9,

B – выбраны два четных числа.

Найдите вероятность $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$.

4.3. Двадцать экзаменационных билетов содержат по два неповторяющихся вопроса. Студент знает ответы на 35 вопросов. Для сдачи экзамена достаточно ответить на оба вопроса билета или на один вопрос билета и один дополнительный вопрос. Найдите вероятность того, что экзамен будет сдан.

4.4. Три стрелка производят по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,8, вторым – 0,7, третьим – 0,6. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена

а) всеми стрелками; б) только двумя стрелками;

в) хотя бы одним стрелком; г) хотя бы двумя стрелками.

4.5. *n* радиолокационных станций следят за одним объектом. Каждая станция обнаруживает объект независимо от других станций с вероятностью *p*. Найдите вероятность того, что объект будет обнаружен.

4.6. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету 0,25. Сколько лотерейных билетов надо купить, чтобы с вероятностью не менее 96% выиграть хотя бы по одному из них.

Задания для индивидуальной работы

4.7. Три стрелка производят по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания в мишень первым стрелком – 0,9; вторым – 0,8 и третьим – 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена:

а) всеми стрелками; б) хотя бы двумя стрелками;

в) только одним стрелком.

4.8. В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности их включения в данный момент соответственно равны 0,9; 0,8 и 0,6. Найдите вероятность того, что в данный момент включены:

а) только две камеры; б) не более одной камеры;

в) хотя бы одна камера.

4.9. Электронный модуль состоит из трех элементов. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны 0,3; 0,2 и 0,4. Найдите вероятность того, что в течение гарантийного срока:

а) все элементы будут работать;

б) хотя бы один элемент выйдет из строя;

в) не менее двух элементов выйдет из строя.

4.10. Для каждого из трех друзей вероятности провала экзамена равны соответственно 0,01; 0,03; 0,1. Найдите вероятность того, что только двое из них сдадут экзамен.

4.11. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9. Найдите вероятность того, что деталь содержится:

а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух ящиках;

в) хотя бы в одном ящике.

4.12. Первый рабочий изготавливает 40 % деталей второго сорта, второй – 30 %. У каждого рабочего взяли наугад по 2 детали. Найдите вероятность того, что

а) все 4 детали второго сорта; б) хотя бы 3 детали второго сорта;

в) только одна деталь первого сорта.

4.13. Даны множества $X = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$ и $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Из множества X выбираем число x, из множества Y выбираем число y.

Определим следующие события:

A – сумма $x + y$ выбранных чисел равна 0,

B – произведение $x \cdot y$ выбранных чисел больше (-5).

Найдите вероятность $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$.

4.14. Три стрелка поочередно ведут стрельбу по одной и той же мишени. Каждый стрелок имеет два патрона и при первом же попадании стрельба прекращается. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,2, для второго – 0,3, для третьего – 0,4. Найдите вероятность того, что все три стрелка израсходуют весь свой боезапас.

4.15. Радист посылает вызов корреспонденту до тех пор, пока тот его не услышит, но при этом может послать не более трех вызовов. Вероятность того, что корреспондент примет первый вызов, равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4. По условиям приема события, состоящие в том, что i-й по счету вызов $(i = 1, 2, 3)$ услышан, независимы. Найдите вероятность того, что корреспондент вообще услышит радиста.

4.16. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найдите вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

4.17. Участок электрической цепи MN состоит из 5 элементов (рис.4.2), работающих независимо друг от друга. Вероятности выхода из строя элементов соответственно равны $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}6$, $p_3 = 0{,}5$, $p_4 = 0{,}4$, $p_5 = 0{,}2$. Найдите вероятность разрыва цепи.

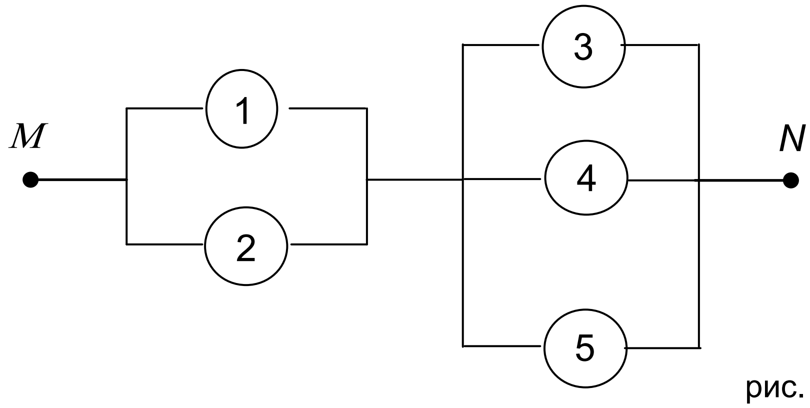


рис. 4.2

4.18. На 10 карточках написаны буквы А, А, А, М, М, Т, Т, Е, И, К. Карточки тщательно перемешивают и вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают в том порядке, каком они вынуты. Найдите вероятность того, что

а) на десяти карточках можно прочитать слово МАТЕМАТИКА;

б) на трех карточках можно прочитать слово КИТ;

в) на пяти карточках можно прочитать слово МЕТКА.

4.19. Сколько раз надо подбросить монету, чтобы вероятность хотя бы однократного появления «герба» была больше 0,875?

4.20. Вероятность попадания в самолет при одном выстреле из винтовки 0,04. Сколько стрелков должны стрелять одновременно, чтобы вероятность попадания в самолет была больше 70%?

4.21. Сколько раз надо подбросить игральный кубик, чтобы появление хотя бы один раз пяти очков имело вероятность больше 0,85?

4.22. Сколько раз надо повторить испытание, чтобы с вероятностью не меньшей 0,75, утверждать, что хотя бы один раз произойдет событие A, вероятность наступления которого в одном испытании 0,05?

4.23. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0,875. Найдите вероятность попадания в мишень при одном выстреле.

4.24. Из множества чисел $\{1, 2, ..., 6n+1\}$, $n \geq 1$ наудачу последовательно выбирают три числа без возвращения. Пусть событие A_n состоит в том, что произведение выбранных чисел кратно 6. Найдите $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$.

5. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Вероятность события A, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (*гипотез*) $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу событий, вычисляют ***по формуле полной вероятности:***

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i), \text{ где } \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$$

Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез H_i могут быть переоценены ***по формуле Байеса***

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(A)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Пример 5.1. Вероятности того, что во время работы цифровой электронной машины произойдет сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти, в остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятность обнаружения сбоя в арифметическом устройстве равна 0,8, в оперативной памяти – 0,9 и в других устройствах – 0,85.

а) Найдите вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен;

б) в ЭВМ произошел сбой. По какой причине вероятнее всего он произошел?

Решение. Пусть событие A состоит в обнаружении сбоя в работе ЭВМ.

Возможны гипотезы: H_1 – сбой в арифметическом устройстве; H_2 – сбой в оперативной памяти; H_3 – сбой в остальных устройствах.

Известны вероятности:

$$P(H_1) = \frac{3}{10}, \; P(H_2) = \frac{2}{10}, \; P(H_3) = \frac{5}{10},$$

$$P(A \mid H_1) = 0{,}8, \; P(A \mid H_2) = 0{,}9, \; P(A \mid H_3) = 0{,}85.$$

а) Тогда полная вероятность равна

$$P(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}85 = 0{,}24 + 0{,}18 + 0{,}425 = 0{,}845.$$

б) Пересчитаем вероятности гипотез с учетом того, что событие A произошло, т.е. сбой в работе ЭВМ обнаружен.

$$P(H_1 \mid A) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}8}{0{,}845} = \frac{0{,}24}{0{,}845} = \frac{240}{845} = 0{,}284 < P(H_1) = 0{,}3\ ;$$

$$P(H_2 \mid A) = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}9}{0{,}845} = \frac{0{,}18}{0{,}845} = \frac{180}{845} = 0{,}213 > P(H_2) = 0{,}2\ ;$$

$$P(H_3 \mid A) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}85}{0{,}845} = \frac{425}{845} = 0{,}503 > P(H_3) = 0{,}5\ .$$

Ответ. а) 0,845, б) сбой в остальных устройствах.

Задания для аудиторной работы

5.1. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне – 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взяли один шар. Найдите вероятность того, что взят белый шар.

5.2. Из 10 студентов, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей и взявших билеты, Иванов и Петров знают по 20 билетов из 30, Сидоров успел повторить только 15 билетов, остальные студенты знают все 30 билетов. Экзаменатор наудачу вызывает отвечать одного из студентов. Найдите вероятность того, что вызванный сдал экзамен, если знание билета гарантирует сдачу экзамена с вероятностью 0,85, а при незнании билета можно сдать экзамен с вероятностью 0,1.

5.3. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найдите вероятность того, что это грузовая машина.

5.4. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире», они встречаются в передаваемых сообщениях в отношении 5:3. Статистические свойства помех таковы, что искажается в среднем $\frac{2}{5}$ сообщений «точка» и $\frac{1}{3}$ сообщений «тире». Найдите вероятность того, что:

а) передаваемый сигнал принят; б) принятый сигнал – «тире».

5.5. С первого автомата на сборку поступает 40%, со второго – 35% и с третьего – 25% деталей. Среди деталей первого автомата 0,2% бракованных, второго – 0,3% и третьего – 0,5%. Найдите вероятность того, что: а) поступившая на сборку деталь бракованная; б) деталь, оказавшаяся бракованной, изготовлена вторым автоматом.

5.6. Вероятность того, что клиент банка не вернет заем в период экономического роста, равна 0,08, в период экономического кризиса – 0, 23. Предполагая вероятность того, что начнется период экономического роста, равной 0,7, найдите вероятность того, что случайная выбранный клиент банка не вернет полученный кредит?

5.7. В группе из 20 стрелков пять отличных, девять хороших и шесть посредственных. При одном выстреле отличный стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,9; хороший – с вероятностью 0,8 и посредственный – с вероятностью 0,6. Наугад выбранный стрелок выстрелил дважды; отмечено одно попадание и один промах. Каким вероятнее всего был этот стрелок: отличным, хорошим или посредственным?

Задания для индивидуальной работы

5.8. В каждой из двух урн находится по 7 шаров. В первой урне 1 белый и 6 черных, во второй урне 4 белых и 3 черных. Один раз подбрасывают правильную монету. Если выпадает «герб», то наудачу выбирают один шар из первой урны, если «решка» – один шар из второй урны. Найдите вероятность того, что взят белый шар.

5.9. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате – 0,075; на втором – 0,08. Производительность второго автомата втрое больше, чем первого. Найдите вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь нестандартная.

5.10. Литье в болванках поступает из трех заготовительных цехов: 50% – из первого, 30% – из второго и 20% – из третьего цеха. При этом материал первого цеха имеет 8% брака, второго – 6% и третьего – 4%. Найдите вероятность того, что наудачу взятая болванка не имеет дефектов.

5.11. В каждой из четырех урн находится $k+1$ белый шар и $9-k$ черных шаров, где k – номер урны $(k=1,2,3,4)$. Один раз подбрасывают правильную игральную кость. Если на кости выпадает m очков $\left(m=\overline{1,6}\right)$, то из урны с номером, равным остатку от деления m на 4, достают один шар. Найдите вероятность того, что выбран белый шар.

5.12. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс вокзала A или в одну из пяти касс вокзала B. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала A имеются в продаже билеты, равна 0,6; в кассах вокзала B – 0,5.

а) Найдите вероятность того, что в наугад выбранной кассе имеется в продаже билет.

б) Пассажир купил билет. Найдите вероятность того, что покупка была сделана в кассе вокзала B.

5.13. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов, 4 бегуна. Вероятность выполнить норму для лыжника – 0,9; для велосипедиста – 0,8 и бегуна – 0,75. Найдите вероятность того, что спортсмен, вызванный наудачу, выполнит норму.

5.14. Три автомата изготовляют однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Производительности первого, второго и третьего автоматов относятся как 2:3:5. Вероятность того, что деталь с первого автомата высшего качества равна 0,8, для второго – 0,6 и для третьего – 0,7.

а) Найдите вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь будет высшего качеств.

б) Взятая наугад деталь оказалась высшего качества. Найдите вероятность того, что она изготовлена первым автоматом.

5.15. В первой из двух урн 2 белых и 3 черных шара, во второй – 3 белых и 5 черных шаров. Из первой и второй урн, не глядя, берут по одному шару и кладут их в третью урну. Шары в третьей урне перемешивают и берут из нее наугад один шар. Найдите вероятность того, что этот шар белый.

5.16. Среди шести винтовок пристреленными оказываются только две. Вероятность попадания из пристреленной винтовки равна 0,9, а из не пристреленной – 0,2. Выстрелом из одной наугад взятой винтовки цель поражена. Определите вероятности того, что стреляли из пристреленной и стреляли из не пристреленной винтовки.

5.17. Сборщик получил три ящика деталей. В первом ящике 40 деталей, из них 20 окрашенных; во втором ящике – 50 деталей, из них 10 окрашенных; в третьем – 30 деталей, из них 15 окрашенных. Найдите вероятность того, что наугад извлеченная деталь из наугад взятого ящика окажется окрашенной.

5.18. Счетчик регистрирует частицы трех типов *A*, *B* и *C* с вероятностями соответственно 0,8; 0,2 и 0,4. Вероятности появления частиц $P(A)=0{,}2$, $P(B)=0{,}5$, $P(C)=0{,}3$. Счетчик отметил частицу. Какого типа вероятнее всего была частица?

5.19. Вероятности перегорания первой, второй, третьей и четвертой ламп равны соответственно 0,1; 0,2; 0,3 и 0,4. Вероятность выхода из строя прибора при перегорании одной лампы равна 0,2; двух ламп – 0,4; трех ламп – 0,6 и четырех ламп – 0,8. Найдите вероятность выхода прибора из строя.

5.20. В урне находится n, $n>2$ игральных костей, причем k $(k>0,\ k<n)$ из них на двух гранях имеют одно очко, а на остальных – шесть очков; $n-k$ костей в урне – правильные. Из урны наудачу достают одну кость и подбрасывают ее четыре раза. Найдите вероятность того, что выбранная кость имела на двух гранях по одному очку, если известно, что при каждом из четырех бросков была получена «шестерка».

5.21. В ящике лежит 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 игранных. Для игры наудачу выбираются два мяча, и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются еще два мяча. Найдите вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами?

5.22. Три охотника одновременно и независимо стреляют в кабана. Известно, что первый попадает с вероятностью 0,8, второй – 0,4, а третий – 0,2. Кабан убит, и в нем обнаружены две пули. Как делить кабана?

5.23. Студент выучил к экзамену 15 билетов из 20. Что для него предпочтительнее – идти сдавать экзамен первым или вторым?

6. Повторение независимых испытаний

Производится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с одной и той же вероятностью p и не появиться с вероятностью $q = 1 - p$.

Вероятность того, что событие A в серии из n испытаний появится ровно m раз, вычисляют *по формуле Бернулли*.

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p.$$

Пример 6.1. Рабочий обслуживает 12 однотипных станков. Вероятность того, что станок потребует внимания рабочего в течение смены равна $\frac{1}{3}$. Найдите вероятность того, что в течение смены от 3 до 6 станков потребуют внимания рабочего.

Решение. $n = 12$, $3 \le m \le 6$, $p = P(A) = \frac{1}{3}$, $q = P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$.

$$P_{12}(3 \le m \le 6) = P_{12}(3) + P_{12}(4) + P_{12}(5) + P_{12}(6) =$$

$$= C_{12}^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 + C_{12}^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 + C_{12}^5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^7 + C_{12}^6 \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^6 =$$

$$= C_{12}^3 \cdot \frac{2^9}{3^{12}} + C_{12}^4 \frac{2^8}{3^{12}} + C_{12}^5 \frac{2^7}{3^{12}} + C_{12}^6 \frac{2^6}{3^{12}} =$$

$$= \frac{2^6}{3^{12}} \left(\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} \cdot 8 + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{24} \cdot 4 + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{120} \cdot 2 + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{120 \cdot 6} \right) =$$

$$= \frac{64}{81^3} \left(22 \cdot 80 + 55 \cdot 36 + 99 \cdot 16 + 77 \cdot 12\right) =$$

$$= \frac{64}{81^3} \left(1760 + 1980 + 1584 + 924\right) = 0{,}7524.$$

Ответ. 0,7524.

Число наступлений события A называется *наивероятнейшим (вероятнейшим)*, если оно имеет наибольшую вероятность по сравнению с вероятностями наступления события A любое другое количество раз. Наивероятнейшее число m_0 наступлений события A в n испытаниях можно найти по формуле

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

В случае, когда n велико, а p мало (обычно $p < 0{,}1$; $npq \le 9$) вместо формулы Бернулли применяют приближенную *формулу Пуассона*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$ – среднее число появлений события A в серии из n испытаний. Значения выражения $\dfrac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ можно найти с помощью таблицы (приложение 3)

Теорема (*Муавра-Лапласа локальная*) Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаниях равна $0 < p < 1$, а число испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие A наступит m раз, приближенно равна (чем больше n, тем точнее)

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\, \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad q = 1 - p,$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса. $\varphi(x)$ *четная* функция, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Значения этой функции приводятся в приложении 1.

Вероятность того, что событие A в серии из n испытаний появится не менее k_1 раз и не более k_2 раз

а) при небольших n вычисляется с помощью *формулы Бернулли*

$$P_n(k_1 \le m \le k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + P_n(k_1 + 2) + \ldots + P_n(k_2);$$

б) при больших n – с помощью *интегральной формулы Лапласа*

$$P_n(k_1 \le m \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad q = 1 - p,$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа, ее значения в приложении 2. Функция $\Phi(x)$ – *нечетная*, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Для значений $x > 5 \quad \Phi(x) = 0{,}5$.

Пример 6.2. Город ежедневно посещает 1000 туристов, которые днем идут обедать. Каждый из них выбирает для обеда один из двух городских ресторанов с равными вероятностями и независимо друг от друга. Владелец одного из ресторанов желает, чтобы с вероятностью приблизительно 0,99 все пришедшие в его ресторан туристы могли там одновременно пообедать. Сколько мест должно быть для этого в его ресторане?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что турист выберет ресторан заинтересованного владельца, $p = P(A) = 0{,}5$, $n = 1000$. Пусть в ресторане k мест. Тогда ресторан будет переполнен, если число пришедших будет больше, чем k. Вероятность этого должна быть $1 - 0{,}99 = 0{,}01$. Применим интегральную теорему Муавра-Лапласа.

$$P_{1000}(k;1000)=\Phi\left(\frac{1000-1000\cdot 0,5}{\sqrt{1000\cdot 0,5\cdot 0,5}}\right)-\Phi\left(\frac{k-1000\cdot 0,5}{\sqrt{1000\cdot 0,5\cdot 0,5}}\right)=$$

$$=\Phi\left(10\sqrt{10}\right)-\Phi\left(\frac{k-500}{5\sqrt{10}}\right)=0,5-\Phi\left(\frac{k-500}{5\sqrt{10}}\right)\approx 0,01.$$

Откуда следует, что $\Phi\left(\frac{k-500}{5\sqrt{10}}\right)\approx 0,49$

Используя таблицу значений функции Лапласа (приложение 2), находим $\frac{k-500}{5\sqrt{10}}\approx 2,33$, значит $k=2,33\cdot 5\sqrt{10}+500\approx 536,84$. Следовательно, в ресторане должно быть 537 мест.

Ответ. 537 мест.

Замечание. Если вероятность наступления события A в каждом испытании различна $P(A_i)=p_i$, $i=\overline{1,n}$, то вероятность того, что событие A при n испытаниях появится m раз, равна коэффициенту при x^m в разложении по степеням x производящей функции

$$\varphi_n(x)=(q_1+p_1x)(q_2+p_2x)\cdot\ldots\cdot(q_n+p_nx).$$

Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности.

Пусть $P(A)=p$ и частота события A при n испытания $\omega(A)=\frac{m}{n}$. Тогда вероятность того, что частота мало отличается от $P(A)$ (по абсолютной величине) определяется с помощью приближенной формулы

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Пример 6.3. Сколько опытов нужно произвести, чтобы с вероятностью 0,9 можно было бы утверждать, что частота события A будет отличаться от $P(A)=0,4$ по абсолютной величине, не более чем на 0,1?

Решение. Воспользуемся формулой

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

По условию $\varepsilon=0,1$; $p=0,4$; $q=0,6$. Тогда

$$2\Phi\left(0,1\cdot\sqrt{\frac{n}{0,4\cdot 0,6}}\right)=0,9\ \Rightarrow\ \Phi\left(0,1\cdot\sqrt{\frac{n}{0,24}}\right)=0,45.$$

Используя таблицу значений функции Лапласа (приложение 2), находим, что $0,1\cdot\sqrt{\frac{n}{0,24}}=1,64$.

Следовательно, $n=0,24\cdot(16,4)^2=64,6$. Отсюда $n=65$.

Ответ. 65.

Задания для аудиторной работы

6.1. Игральную кость бросают 5 раз. Найдите вероятность того, что «пятерка» выпадет а) 2 раза; б) менее двух раз; в) не менее трех раз; г) от двух до четырех раз.

6.2. В урне 100 белых и 80 синих шаров. Из урны извлекают n шаров (с возвращением каждого вынутого шара). Наивероятнейшее число появлений белого шара равно 11. Найдите n.

6.3. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее:

а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырех;

б) выиграть не менее двух партий из трех или не менее четырех партий из восьми?

6.4. Станок изготавливает за смену 10000 деталей. Вероятность изготовления бракованной детали $p = 0{,}0001$. Найдите вероятность того, что за смену будет изготовлено бракованных деталей: а) три; б) от четырех до шести; в) хотя бы одна.

6.5. Вероятность рождения девочки равна 0,485. Найдите вероятность того, что из 600 родившихся детей девочек: а) будет 300; б) будет больше, чем мальчиков.

6.6. При социологических опросах граждан каждый человек независимо от других может дать неискренний ответ с вероятностью 0,2. Найдите вероятность того, что из 22 500 опросов число неискренних ответов будет не более 4620.

6.7. Найдите вероятность того, что из 2450 ламп, освещающих улицу, к концу года будет гореть от 1500 до 1600 ламп, считая, что каждая лампа будет гореть в течение года с вероятностью 0,64.

6.8. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0{,}5$. Найдите вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

6.9. Вероятность того, что деталь нестандартная равна 0,1. Сколько деталей нужно отобрать, чтобы с вероятностью 0,9544 можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности $p = 0{,}1$ по абсолютной величине не более чем на 0,03?

6.10. За один час автомат изготавливает 20 деталей. За сколько часов вероятность изготовления хотя бы одной бракованной детали будет не менее 0,952, если вероятность того, что любая деталь бракованная, равна 0,01?

Задания для индивидуальной работы

6.11. Всхожесть семян некоторого растения составляет 80%. Найдите вероятность того, что из шести посеянных семян взойдут:

а) три; б) не менее трех; в) не более трех.

6.12. Вероятность сдачи экзамена для каждого из шести студентов равна 0,8. Найдите вероятность того, что экзамен сдадут: а) пять студентов; б) не менее четырех; в) не более трех студентов.

6.13. Всхожесть семян лимона составляет 80%. Посажено девять семян. Найдите вероятность всхожести: а) семи семян; б) не более пяти; в) не менее восьми семян.

6.14. Рабочий обслуживает десять однотипных станков. Вероятность того, что станок потребует внимания рабочего в течение часа, равна 0,05. Найдите вероятность того, что в течение часа этих требований будет от трех до пяти.

6.15. Врач ставит верный диагноз с вероятностью 85 %. Найдите вероятность того, что из 6 диагнозов верный будет поставлен большей части пациентов.

6.16. Вероятность изготовления изделия отличного качества равна 0,9. Изготовлено 50 изделий. Найдите вероятнейшее число изделий отличного качества и его вероятность.

6.17. Сколько раз надо подбросить игральную кость, чтобы вероятнейшее число выпадений пятерки было равно 55?

6.18. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин. равна 0,004. Найдите вероятность того, что в течение 1 мин. обрыв произойдет на шести веретенах.

6.19 Станок состоит из 2000 независимо работающих узлов. Вероятность отказа одного узла в течение года 0,0005. Найдите вероятность отказа в течение года от двух до четырех узлов.

6.20. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найдите вероятность того, что из 1000 взятых на проверку деталей будет 10 бракованных.

6.21. Найдите вероятность поражения мишени 75 раз при 90 выстрелах, если вероятность поражения мишени при одном выстреле 0,8.

6.22. Найдите вероятность того, что при 400 испытаниях событие появится от 90 до 180 раз, если вероятность наступления в одном испытании равна 0,4.

6.23. Вероятность нарушения стандарта при штамповке карболитовых колец равна 0,3. Найдите вероятность того, что для 800 заготовок число бракованных колец будет заключено между 225 и 250.

6.24. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету 0,01. Сколько надо купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью не меньшей чем 0,95?

6.25. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найдите вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

6.26. Вероятность того, что деталь нестандартная равна 0,1. Сколько деталей нужно отобрать, чтобы с вероятностью 0,9544 можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности $p = 0{,}1$ по абсолютной величине не более чем на 0,03?

6.27. Французский учёный Бюффон Жорж Луи Леклерк бросил монету 4040 раз, причём «герб» появился 2048 раз. Найдите вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота появления «герба» отклонится от вероятности 0,5 появления «герба» по абсолютной величине не более, чем в опыте Бюффона.

6.28. В страховой компании 10000 клиентов. Страховой взнос каждого клиента составляет 50 руб. При наступлении страхового случая, вероятность которого равна 0,005, страховая компания обязана выплатить клиенту 5 000 руб. На какую прибыль может рассчитывать страховая компания с надёжностью 0,95?

6.29. В посёлке 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок по случайным мотивам независимо от остальных. Какой наименьшей вместительностью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд ходит раз в сутки).

6.30. Театр, вмещающий 1000 зрителей, имеет два отдельных входа. Около каждого входа имеется свой гардероб. Сколько вешалок должно быть в каждом гардеробе для того, чтобы с вероятностью $p = 0{,}99$ все зрители могли сдать верхнюю одежду в гардеробе того входа, через который они вошли? Предполагается, что зрители выбирают с одинаковой вероятностью любой из входов.

Случайные величины (СВ)

7. Законы распределения и числовые характеристики дискретных случайных величин (ДСВ)

Случайной величиной (СВ) называют величину, принимающую различные числовые значения, заранее неизвестные.

Дискретной СВ называют величину, множество значений которой образует конечную или бесконечную последовательность чисел.

Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и их вероятностями, называют *законом распределения СВ*.

Для ДСВ закон распределения задают таблично.

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

где $\sum p_i = 1$, или с помощью функции распределения $F(x)$.

Функцией распределения $F(x)$ СВ X называют вероятность того, что СВ X примет значения, меньшие, чем x.

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x).$$

Свойства $F(x)$*:*

1. $0 \le F(x) \le 1$ для $\forall\, x \in R$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
3. $F(x_1) \le F(x_2)$, если $x_1 < x_2$.
4. $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Математическим ожиданием СВ X называется число $M(X)$, которое вычисляют по формуле

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Свойства математического ожидания:

1. $M(C)=C,\ C=const$.
2. $M(CX)=C\,M(X)$.
3. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$.
4. Если случайные величины X и Y независимы, то $M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$.

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения *СВ* X:

$$D(X)=M\left(\left(X-M(X)\right)^2\right).$$

Свойства дисперсии:

1. $D(C)=0,\ C=const$.
2. $D(CX)=C^2D(X)$.
3. Если случайные величины X и Y независимы, то $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

На практике для вычисления дисперсии часто пользуются формулой:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X).$$

Замечание. Для любой *СВ* X $D(X)\ge 0$ и $x_{\min}<M(X)<x_{\max}$.

$\sqrt{D(X)}=\sigma(X)$ – *среднее квадратическое отклонение*.

Пример 7.1. Из урны, содержащей 3 белых и 5 черных шаров, извлекают 3 шара. Пусть *СВ* X – число вынутых черных шаров. Составьте закон распределения *СВ* X; найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. Постройте график функции распределения.

Решение. *СВ* X может принимать значения: 0, 1, 2, 3. Вычислим соответствующие им вероятности.

$$p_1=P(X=0)=P\{\text{три белых шара}\}=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{8\cdot 7\cdot 6}=\frac{1}{56}.$$

$$p_2=P(X=1)=P\{1\,\text{черный и 2 белых шара}\}=\frac{C_5^1\cdot C_3^2}{C_8^3}=\frac{5\cdot 3}{56}=\frac{15}{56}.$$

$$p_3 = P(X=2) = P\{2 \text{ черных и } 1 \text{ белый шар}\} = \frac{C_5^2 \cdot C_3^1}{C_8^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 56} = \frac{30}{56}.$$

$$p_4 = P(X=3) = P\{3 \text{ черных шара}\} = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{56} = \frac{10}{56}.$$

Закон распределения для данной *СВ X* имеет вид

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = \frac{1+15+30+10}{56} = 1.$$

Найдем числовые характеристики данного распределения.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{56} + 1 \cdot \frac{15}{56} + 2 \cdot \frac{30}{56} + 3 \cdot \frac{10}{56} = \frac{15+60+30}{56} = \frac{105}{56} = 1{,}875.$$

$$D(X) = M\left(X^2\right) - M^2(X).$$

$$M\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i = 1 \cdot \frac{15}{56} + 4 \cdot \frac{30}{56} + 9 \cdot \frac{10}{56} = \frac{15+120+90}{56} = \frac{225}{56} = 4{,}018;$$

$$D(X) = 4{,}018 - 1{,}875^2 = 0{,}5024.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0{,}5024} = 0{,}71.$$

Составим функцию распределения $F(X)$. Значения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ разбивают числовую ось на 5 интервалов.

Если $x \in (-\infty;\, 0]$, то $F(X) = P(X < x) = 0$, т.к. на этом интервале *СВ X* не имеет значений.

Если $x \in (0;1]$, то $F(x) = P(X=0) = \frac{1}{56}$.

Если $x \in (1;2]$, то $F(x) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{56} + \frac{15}{56} = \frac{16}{56}$.

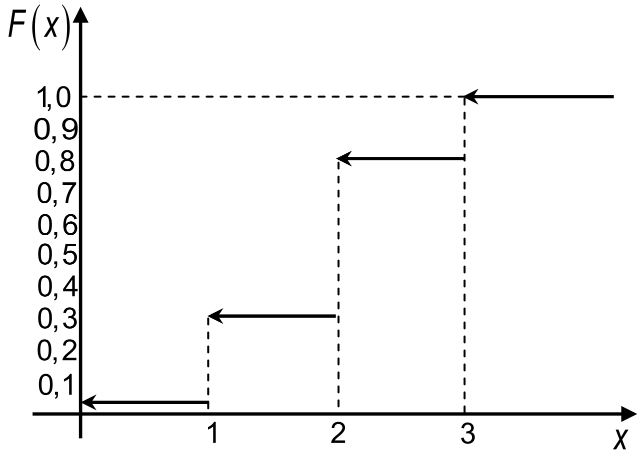
Если $x \in (2;3]$, то $F(x) = \frac{16}{56} + P(X=2) = \frac{16}{56} + \frac{30}{56} = \frac{46}{56}$.

Если $x \in (3;+\infty)$, то $F(x) = \frac{46}{56} + P(X=3) = \frac{46}{56} + \frac{10}{56} = 1.$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ \dfrac{1}{56}=0{,}018, & \text{если} \quad 0 < x \le 1, \\ \dfrac{16}{56}=0{,}286, & \text{если} \quad 1 < x \le 2, \\ \dfrac{46}{56}=0{,}821, & \text{если} \quad 2 < x \le 3, \\ 1, & \text{если} \quad 3 < x < +\infty. \end{cases}$$

Построим график функции $F(X)$.



Задания для аудиторной работы

7.1. В партии из 6 деталей 4 стандартные. Наудачу отбирают 3 детали. Составьте закон распределения ДСВ X – числа стандартных деталей среди отобранных. Постройте многоугольник распределения СВ X. Найдите математическое ожидание и дисперсию СВ X, вероятность события $A=\{\textit{отобрано не менее двух стандартных деталей}\}$.

7.2. Охотник, имеющий шесть патронов, стреляет в цель до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. СВ X – число израсходованных патронов. Найдите MX, DX.

7.3. Вероятности попадания в мишень первого, второго и третьего стрелков соответственно равны 0,4; 0,3 и 0,6. СВ X – число попаданий в мишень. Составьте ряд и функцию распределения СВ X. Постройте график $F(x)$.

7.4. Имеется пять ключей, из которых только один подходит к замку. СВ X – число попыток при открывании замка (проверенный ключ второй раз не используется). Найдите MX, DX, σX.

7.5. Баскетболист делает три штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,7. Постройте ряд и функцию распределения СВ X – числа попадания в корзину. Найдите математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение СВ X.

7.6. Дан закон распределения *СВ X*

X	–5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдите $M(X)$, $D(X)$, $M(X-1)$, $D(X-1)$, $M(3X+6)$, $D(3X+6)$.

7.7. ДСВ задана законом распределения:

X	–2	1	2	3
p	0,08	0,40	0,32	0,20

Найдите:

а) функцию распределения $F(x)$ и постройте ее график;

б) вероятности событий $A=\{X<2\}$, $B=\{1\le X<3\}$, $C=\{1<X\le 3\}$.

Задания для индивидуальной работы

7.8. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее последовательно вынимают шары до первого появления белого шара.

1) Постройте ряд и многоугольник распределения ДСВ X – числа извлеченных шаров.

2) Найдите вероятность события $A=\{\textit{извлечено не менее двух шаров}\}$.

7.9. Монета подбрасывается 5 раз. Постройте многоугольник распределения СВ X – числа выпадений герба. Найдите $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

7.10. Игральный кубик подбросили четыре раза. СВ X – число выпадений трех очков. Составьте закон распределения СВ X. Найдите $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

7.11. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,6. СВ X – число поражений цели при 5 выстрелах. Составьте закон распределения СВ X. Найдите $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

7.12. Вероятность того, что при составлении бухгалтерского баланса допущена ошибка, равна 0,3. Аудитору на заключение предоставлено 3 баланса предприятия. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа положительных заключений на проверяемые балансы.

7.13. Партия содержит 10 телевизоров, среди которых 6 с дефектом. Купили 4 телевизора. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа исправных телевизоров среди купленных. Постройте график функции распределения этой СВ.

7.14. Два покупателя независимо друг от друга делают по одной покупке. Вероятность того, что покупку сделает первый покупатель, равна 0,8, а вероятность того, что второй – 0,6. СВ X – число покупок, сделанных покупателями. Запишите ряд и функцию распределения СВ X. Найдите математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение СВ X.

7.15. В магазин поступили электролампы с трех заводов в отношении 2:3:5. Доля брака в продукции первого завода – 5%, второго – 2%, третьего – 3%. Покупатель приобрел 3 лампочки. Найдите математическое ожидание и дисперсию СВ X – числа качественных лампочек среди купленных.

7.16. В команде 16 спортсменов, из которых 6 перворазрядников. Наудачу выбирают двух спортсменов. Запишите ряд распределения и функцию распределения СВ X – числа перворазрядников среди выбранных.

7.18. Абитуриент должен сдать три экзамена. Вероятность успешной сдачи первого экзамена равна 0,8, второго – 0,7, третьего – 0,7. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа экзаменов, сданных абитуриентом.

7.19. В магазин привезли арбузы из Ташкента и Астрахани в равных количествах. Вероятность покупки неспелого арбуза равна соответственно 0,1 и 0,3. Куплено 4 арбуза. Запишите ряд и функцию распределения СВ X – числа спелых арбузов среди купленных. Найдите математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение СВ X.

7.20. ДСВ X задана законом распределения:

X	1,1	1,4	1,7	2,0	2,3
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найдите функцию распределения $F(x)$ и постройте ее график. Найдите вероятности $P\{X > 1{,}4\}$, $P\{1{,}4 \le X \le 2{,}3\}$.

7.21. ДСВ X задана законом распределения:

X	–1	2	3	5
p	0,1	0,3	0,4	0,2

Найдите $M(X)$, $D(X)$, $M(2X-4)$, $D(2X-4)$. Составьте функцию распределения $F(x)$.

7.22. ДСВ X задана законом распределения:

X	–3	–1	2	4
p	0,3	0,2	0,4	0,1

Найдите $M(X)$, $D(X)$, $M(3X+2)$, $D(3X+2)$. Составьте функцию распределения $F(x)$.

7.23. ДСВ X задана законом распределения:

X	–2	0	1	5
P	0,5	0,2	0,1	0,2

Найдите $M(X)$, $D(X)$, $M(-X+3)$, $D(-X+3)$. Составьте функцию распределения $F(x)$.

7.24. ДСВ X задана законом распределения:

X	–1	0	4	6
P	0,3	0,1	0,4	0,2

Найдите $M(X)$, $D(X)$, $M(-2X+4)$, $D(-2X+4)$. Составьте функцию распределения $F(x)$.

7.25. Найдите дисперсию случайной величины $Y = 2X + 3$, если известно, что $D(X) = 3$.

7.26. Найдите дисперсию случайной величины $Y = -3X - 4$, если известно, что $D(X) = 4$.

7.27. Даны две независимые случайные величины X и Y, дисперсии которых равны $D(X) = 7$, $D(Y) = 3$. Найдите дисперсию $D(X + 2Y)$.

7.28. Даны две независимые случайные величины X и Y, дисперсии которых равны $D(X) = 3$, $D(Y) = 4$. Найдите дисперсию $D(3X - 2Y)$.

7.29. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и Y.

X	1	2
P	0,6	0,4

Y	0	2	3
P	0,1	0,2	0,7

Найдите вероятность того, что случайная величина $X + Y$ примет значение равное 4.

8. Функция распределения, плотность вероятности, числовые характеристики непрерывных СВ

Непрерывной случайной величиной (НСВ) называют случайную величину, возможные значения которой сплошь заполняют некоторый конечный или бесконечный промежуток.

Закон распределения НСВ задают аналитически с помощью функции распределения $F(x)$ или плотности вероятности $f(x)$.

В пункте 7 дано определение и сформулированы свойства функции распределения: $F(x) = P(X < x)$, $0 \le F(x) \le 1$, эта функция неубывающая. Если возможные значения СВ X принадлежат $[a; b]$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$ и $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Если $F(x)$ и $F'(x)$ являются непрерывными функциями, то СВ X называется *непрерывной*.

Для любой СВ $P(X = x_0) = F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0)$, для непрерывной СВ $P(X = x_0) = 0$.

$$P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Пример 8.1. Случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & если\ \ x\le -1,\\ a(x+1)^2, & если\ \ -1<x<1,\\ 1, & если\ \ x\ge 1.\end{cases}$$

Найдите коэффициент a и вычислите вероятность того, что СВ $X\in(0;\,0{,}5)$.

Решение. Из непрерывности функции $F(x)$ следует, что $F(-1)=\lim\limits_{x\to -1+0}F(x)$ и $F(1)=\lim\limits_{x\to 1-0}F(x)$, т.е.

$$\begin{cases}0=a(-1+1)^2\\ 1=a(1+1)^2\end{cases}\Rightarrow\quad 4a=1,\quad a=\frac{1}{4}.$$

Тогда: $F(x)=\begin{cases}0, & если\ \ x\le -1,\\ \dfrac{1}{4}(x+1)^2, & если\ \ -1<x<1,\\ 1, & если\ \ x\ge 1.\end{cases}$

Найдем вероятность того, что СВ $X\in(0;\,0{,}5)$.

$$P(0<X<0{,}5)=F(0{,}5)-F(0)=\frac{1}{4}(0{,}5+1)^2-\frac{1}{4}(0+1)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{9-4}{16}=\frac{5}{16}=0{,}3125.$$

Ответ. $a=\frac{1}{4},\ P(0<X<0{,}5)=0{,}3125$.

Плотностью распределения вероятностей СВ X или *дифференциальной функцией распределения* называют первую производную функции распределения.

$$f(x)=F'(x)\ .$$

Свойства плотности распределения:

1. $f(x)\ge 0$ для $\forall\, x\in\mathbb{R}$;
2. $P(a<X<b)=\int\limits_a^b f(x)\,dx$;
3. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$;
4. (*условие нормировки*) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$.

Математическое ожидание непрерывной СВ X находят по формуле

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx .$$

Дисперсия непрерывной СВ X

$$D(X)=M(X-MX)^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-MX)^2 f(x)\,dx ,$$

$$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X), \text{ где } M\left(X^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx .$$

Модой непрерывной СВ X называется такое ее значение M_0, для которого $f(M_0)=\max f(x)$.

Медианой СВ X называется такое ее значение M_e, что $P(X<M_e)=P(X>M_e)$.

В случае симметричного распределения СВ $M(X)=M_0=M_e$.

Для симметричного распределения характеристикой рассеивания служит *серединное отклонение* E_X:

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<E_X\right)=0{,}5 .$$

Пример 8.2. Случайная величина X задана плотностью распределения (распределение Лапласа) $f(x)=a e^{-|x|}$. Найдите коэффициент a, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Решение. Воспользуемся условием нормировки плотности распределения $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} a e^{-|x|}\,dx=1 \;\Rightarrow\; a\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x}dx+a\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}dx=1,$$

$$a e^{x}\Big|_{-\infty}^{0}-a e^{-x}\Big|_{0}^{\infty}=a(1-0)-a(0-1)=2a=1 \;\Rightarrow\; a=\frac{1}{2}.$$

Найдем математическое ожидание СВ X по формуле $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$. Т.к. подынтегральная функция является нечетной, то

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx=0 .$$

Найдем дисперсию по формуле $D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)$. Т.к. $M(X)=0$, то $D(X)=M\left(X^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx$. Т.к. подынтегральная функция является четной, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx=2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} x^2e^{-x}\,dx=\begin{bmatrix} u=x^2, & du=2x\,dx \\ dv=e^{-x}\,dx, & v=-e^{-x}\end{bmatrix}=$$

$$=-x^2e^{-x}\Big|_0^{\infty}+\int\limits_0^{\infty}2x\,e^{-x}\,dx=0+2\int\limits_0^{\infty}x\,e^{-x}\,dx=\begin{bmatrix} u=x, & du=dx \\ dv=e^{-x}\,dx, & v=-e^{-x}\end{bmatrix}=$$

$$=2\left(-x\,e^{-x}\Big|_0^{\infty}+\int\limits_0^{\infty}e^{-x}dx\right)=2\left(-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}+0-e^{-x}\Big|_0^{\infty}\right)=2\left(-0-0+1\right)=2.$$

Ответ. $a=\frac{1}{2},\ M(X)=0,\ D(X)=2.$

Пример 8.3. Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x^5}, & \text{если } x\ge 1,\\ 0, & \text{если } x<1.\end{cases}$$

Найдите функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание $M(X)$, моду M_0 и медиану M_e.

Решение. СВ X принимает свои значения в интервале $[1;+\infty)$. Значит, при $x\le 1,\quad F(x)=0$.

Найдем $F(x)$ для $x>1$.

$$F(x)=\int\limits_1^x f(t)\,dt=\int\limits_1^x\frac{4}{t^5}\,dt=4\cdot\frac{t^{-4}}{-4}\Bigg|_1^x=\left(-\frac{1}{t^4}\right)\Bigg|_1^x=1-\frac{1}{x^4}.$$

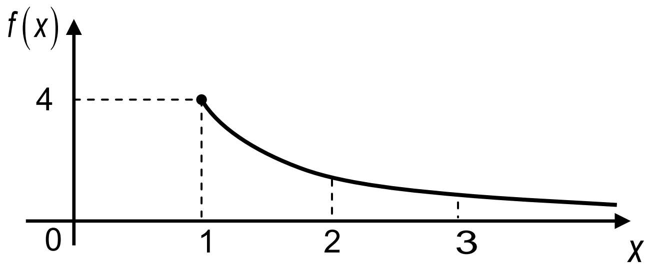
Таким образом:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 1,\\ 1-\dfrac{1}{x^4}, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

Найдем математическое ожидание.

$$M(X)=\int\limits_1^{\infty}xf(x)\,dx=\int\limits_1^{\infty}\frac{4}{x^4}\,dx=4\cdot\frac{x^{-3}}{-3}\Bigg|_1^{\infty}=-\frac{4}{3x^3}\Bigg|_1^{\infty}=\frac{4}{3}.$$

Построим график функции $f(x)$.



По графику видно, что $\max f(x) = f(1) = 4$, т.е. мода $M_0 = 1$.

Медиану распределения M_e найдем из условия $P(X < M_e) = P(X > M_e)$, т.е. $P(1 < X < M_e) = P(M_e < X < +\infty)$. Получим уравнение

$$\int_1^{M_e} 4x^{-5}dx = \int_{M_e}^{+\infty} \frac{4}{x^5}dx.$$

$$\int_1^{M_e} 4x^{-5}dx = \frac{4}{-4}x^{-4}\Bigg|_1^{M_e} = \frac{4}{-4}x^{-4}\Bigg|_{M_e}^{\infty}, \int_{M_e}^{+\infty} \frac{4}{x^5}dx = -\frac{1}{(M_e)^4} + 1 = -\frac{1}{x^4}\Bigg|_{M_e}^{\infty}.$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{(M_e)^4} + 1 = \frac{1}{(M_e)^4} \Rightarrow \frac{2}{(M_e)^4} = 1 \Rightarrow (M_e)^4 = 2 \Rightarrow M_e = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}1892.$$

Ответ. $M(X) = \dfrac{4}{3}$, $M_0 = 1$, $M_e = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}1892$.

Пример 8.4. Найти серединное отклонение E_x для распределения Коши

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Данное распределение симметрично относительно оси Oy, значит, $M(X) = 0$. Для нахождения серединного отклонения решаем уравнение $P(|X - M(X)| < E_x) = 0{,}5$, т.е.

$$P(|X| < E_x) = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad P(-E_x < X < E_x) = 0{,}5, \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-E_x}^{E_x} \frac{dx}{1+x^2} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\pi}(arctg\, x)\Bigg|_{-E_x}^{E_x} = 0{,}5;$$

$$\frac{1}{\pi}(arctg\, E_x + arctg\, E_x) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\pi}arctg\, E_x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$arctg\, E_x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow E_x = 1.$$

Следовательно, $P(-1 < X < 1) = 0{,}5$.

Ответ. $E_x = 1$.

Задания для аудиторной работы

8.1. СВ X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases}0, \; x\le 2;\\ a\left(x-2\right)^2, \; 2<x\le 3;\\ 1, \; x>3.\end{cases}$$

Найдите

1) значение параметра a;

2) плотность распределения вероятностей $f\left(x\right)$;

3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение СВ X;

4) вероятность попадания СВ X в интервалы $\left(1;\ 2{,}5\right)$, $\left(2{,}5;\ 3{,}5\right)$;

5) постройте графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

8.2. СВ X имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le -2;\\ a\left(x+2\right), & \text{если } -2<x\le 0;\\ 0, & \text{если } x>0.\end{cases}$$

Найдите

1) значение параметра a;

2) функцию распределения $F(x)$;

3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение СВ X;

4) постройте графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

8.3. График плотности вероятности СВ X изображен на рисунке 8.1 (закон Симпсона). Запишите выражение плотности вероятности и функцию распределения этой СВ.

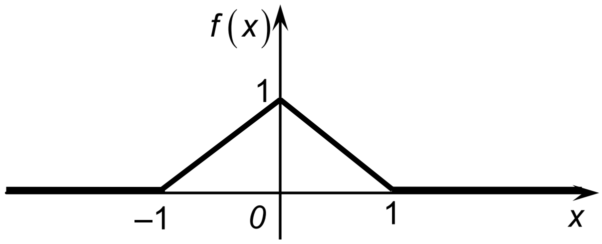


рис. 8.1

8.4. СВ X имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le \dfrac{\pi}{6};\\ a\sin 3x, & \text{если } \dfrac{\pi}{6}<x\le \dfrac{\pi}{3};\\ 0, & \text{если } x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

Найдите

1) значение параметра a;

2) функцию распределения $F(x)$;

3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение СВ *X*;

4) постройте графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Задания для индивидуальной работы

8.5. СВ X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & \textit{если} \;\; x\le 0;\\ ax, & \textit{если} \;\; 0<x\le 4;\\ 1, & \textit{если} \;\; x>4.\end{cases}$$

Найдите коэффициент *a*, функцию $f(x)$, вероятность попадания СВ *X* на отрезок $[1;3]$. Постройте графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

8.6. Известно, что $F(x)=\begin{cases}0, & \textit{если} \;\; x\in(-\infty;\,0),\\ ax^2, & \textit{если} \;\; x\in[0;\,2],\\ 1, & \textit{если} \;\; x\in(2;\,+\infty).\end{cases}$

Найдите коэффициент *a*, функцию $f(x)$, вероятность попадания СВ *X* на отрезок $[1;\;2]$. Постройте графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

8.7. СВ *X* задана функцией распределения вероятностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & \textit{если} \; x<0,\\ ax^3, & \textit{если} \;\; 0\le x\le 2,\\ 1, & \textit{если} \;\; x>2\end{cases}$$

Найдите

1) значение параметра *a*;

2) плотность распределения вероятностей $f(x)$;

3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение СВ *X*;

4) вероятность попадания СВ *X* в интервал $(0;1)$; 5) постройте графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

8.8. Функция распределения СВ *X* имеет вид

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0, & \textit{если} \;\; x<-1,\\ a+b\arcsin x, & \textit{если} \;\; -1\le x\le 1,\\ 1, & \textit{если} \;\; x>1.\end{cases}$$

Найдите значения параметров *a* и *b*, плотность вероятности, математическое ожидание СВ *X*. Постройте графики $F\left(x\right)$ и $f\left(x\right)$.

8.9. Плотность вероятности СВ *X* имеет вид

$$f\,(x)=\begin{cases}ax^2, & \textit{если} \;\; 0\le x\le 2,\\ 0, & \textit{если} \;\; x\notin\left(0;\,2\right).\end{cases}$$

Найдите коэффициент a, математическое ожидание, дисперсию, моду, медиану СВ X. Определить вероятность того, что в результате опыта СВ X отклонится от своего математического ожидания не более чем на 0,5.

8.10. Плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{1+x^2}, \text{ если } x\geq 0;\\ 0, \quad \text{ если } x<0.\end{cases}$$

Найдите коэффициент c, функцию $F(x)$, значение $P(0<X<1)$ и постройте графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

8.11. Плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}c, \text{ если } x\in[1;\,5];\\ 0, \text{ если } x\notin[1;\,5].\end{cases}$$

Найдите коэффициент c, функцию $F(x)$, значение $P\left(2\leq X\leq 4\right)$ и постройте графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

8.12. Плотность вероятности СВ X задана формулой

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{26}(x-3)^2, \; x\in[0;\,2];\\ 0, \; x\notin[0;\,2].\end{cases}$$

Найдите ее числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение.

8.13. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<-1,\\ \dfrac{1}{9}\left(x^3+1\right), & \text{если } -1\leq x\leq 2,\\ 1, & \text{если } x>2.\end{cases}$$

Найдите плотность вероятности $f\left(x\right)$, математическое ожидание $M\left(X\right)$ и $P\left(\left|X-M(X)\right|<0{,}25\right)$.

8.14. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ \dfrac{1}{14}\left(x^3+3x\right), & \text{если } 0\leq x\leq 2,\\ 1, & \text{если } x>2.\end{cases}$$

Найдите плотность вероятности $f\left(x\right)$, математическое ожидание $M\left(X\right)$ и $P\left(\left|X-M(X)\right|<0{,}25\right)$.

8.15. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ \dfrac{1}{15}\left(x^2+2x\right), & \text{если } 0\le x\le 3,\\ 1, & \text{если } x>3.\end{cases}$$

Найдите плотность вероятности $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и $P(|X-M(X)|<0{,}25)$.

8.16. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ \dfrac{1}{10}\left(x^2+3x\right), & \text{если } 0\le x\le 2,\\ 1, & \text{если } x>2.\end{cases}$$

Найдите плотность вероятности $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и $P(|X-M(X)|<0{,}25)$.

8.17. Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}x^2+6x-\dfrac{45}{4}, & \text{если } x\in[3;\,5],\\ 0, & \text{если } x\notin[3;\,5].\end{cases}$$

Найдите $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и моду СВ X.

8.18. Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{5}{4}x-\dfrac{11}{12}, & \text{если } x\in[2;\,4],\\ 0, & \text{если } x\notin[2;\,4].\end{cases}$$

Найдите $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и моду СВ X.

8.19. Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{12}, & \text{если } x\in[1;\,3],\\ 0, & \text{если } x\notin[1;\,3].\end{cases}$$

Найдите $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и моду СВ X.

9. Классические распределения случайных величин

Биномиальное распределение. Пусть в каждом из n независимых испытаний событие A появляется с вероятностью p. СВ X – число появлений события A в n испытаниях. Возможные значения СВ X: $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots, n$. Соответствующие им вероятности найдем по формуле Бернулли

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},\quad q=1-p\,.$$

Составим таблицу

X	0	1	2	…	n
p	q^n	npq^{n-1}	$\frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2}$	…	p^n

Такое распределение СВ X называют *биномиальным*. Его числовые характеристики $M(X)=np, \quad D(X)=npq, \quad \sigma(X)=\sqrt{npq}$.

Распределение Пуассона. Если число n велико, а вероятность p мала, то $P_n(m)$ вычисляют по формуле Пуассона

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\ \lambda=np\,.$$

X	0	1	2	…	n
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

Для распределения Пуассона $M(X)=D(X)=\lambda$.

Закону Пуассона подчинена СВ, задающая простейший поток событий (число вызовов скорой помощи, число заказов на предприятиях бытовых услуг и т.д.).

Если интенсивность потока λ выражает число появлений события в единицу времени, то вероятность наступления m событий за время t определяют по формуле

$$P_t(m)\approx\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}.$$

Геометрическое распределение. Пусть СВ X – номер первого «успеха» в серии испытаний Бернулли, принимающая значения $1, 2, ..., m, ...$. Составим таблицу

X	1	2	…	m	…
P	p	pq	…	pq^{m-1}	…

Такое распределение СВ X называют *геометрическим*. Его числовые характеристики $M(X)=\frac{1}{p}, \quad D(X)=\frac{q}{p^2}, \quad \sigma(X)=\frac{\sqrt{q}}{p}$, где $q=1-p$.

Геометрическое распределение имеет так же СВ X – число «неудач» до первого «успеха» и принимающая значения $0, 1, 2, ..., m, ...$.

X	0	1	…	m	…
P	p	pq	…	pq^{m-1}	…

В этом случае $M(X)=\frac{q}{p}, \quad D(X)=\frac{q}{p^2}, \quad \sigma(X)=\frac{\sqrt{q}}{p}$, где $q=1-p$.

СВ X имеет ***равномерное распределение***, если плотность ее вероятности определяется функцией

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & если \quad x\in[a;\, b],\\ 0, & если \quad x\notin[a;\, b].\end{cases}$$

Для этого распределения $M(X)=\dfrac{a+b}{2},\quad D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Показательное распределение СВ X задает плотность вероятности вида

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & если \quad x\geq 0,\\ 0, & если \quad x<0.\end{cases}$$

$$\lambda>0,\quad M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Функция надежности. Если СВ T – время безотказной работы механизма, то $F(t)=P(T<t)$ выражает вероятность выхода из строя механизма за время t. $R(t)=1-F(t)=R(T>t)$ – вероятность безотказной работы механизма за время t. Функция $R(t)$ называют *функцией надежности*.

Если СВ T подчиняется показательному закону распределения, то $R(t)=e^{-\lambda t}$, где λ – число отказов в единицу времени (интенсивность отказов).

СВ X распределена по ***нормальному закону,*** если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\quad a=M(X),\quad \sigma^2=D(X).$$

Для нормального распределения справедливы формулы:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа. Ее значения находят по таблице 2.

$$P(|X-M(X)|<\delta)=P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Если $\delta=3\sigma$, то получаем *«правило трех сигм»*:

$$P\left(\left|X-a\right|<3\sigma\right)=2\Phi(3)=0,9973.$$

С вероятностью, практически равной единице, можно определить интервал наиболее вероятных значений нормально распределенной СВ X: $(a-3\sigma;\ a+3\sigma)$.

Пример 9.1. Время T безотказной работы радиотехнической системы распределено по показательному закону. Интенсивность отказов системы $\lambda=0,02$. Найдите среднее время безотказной работы и вероятность безотказной работы за 80 часов.

Решение. Плотность вероятности данного распределения имеет вид

$$f(t)=\begin{cases}0,02e^{-0,02t}, & \textit{если}\quad t\ge 0,\\ 0, & \textit{если}\quad t<0.\end{cases}$$

Математическое ожидание $M(T)$ определяет среднее время безотказной работы системы.

$$M(T)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0,02}=\frac{100}{2}=50 \text{ (часов).}$$

Вероятность безотказной работы за 80 часов определим с помощью функции надежности $R(t)=e^{-\lambda t}$.

$$R(80)=e^{-0,02\cdot 80}=e^{-1,6}=0,2019.$$

Ответ. 0,2019.

Пример 9.2. Определите среднеквадратическую ошибку радиодальномера, если систематических ошибок он не имеет, а случайные ошибки X распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,95 не выходят по абсолютной величине за пределы 20 метров.

Решение. СВ X – ошибка радиодальномера подчиняется нормальному закону распределения. Отсутствие систематических ошибок означает, что $a=M(X)=0$, второй параметр $\sigma(X)=\sigma$ надо определить. Из условия задачи следует, что $P\left(\left|X-a\right|<20\right)=0,95$, т.е. $P\left(\left|X\right|<20\right)=0,95$.

По формуле $P\left(\left|X-a\right|<\delta\right)=2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$, получим

$$2\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)=0,95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)=0,475.$$

По таблице значений функции Лапласа находим, что $\dfrac{20}{\sigma}=1,96$; отсюда $\sigma\ \dfrac{20}{1,96}=10,2041$ (м).

Ответ. 10,2041 м.

Задания для аудиторной работы

9.1. Производится 5 независимых опытов, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью 0,6. Составьте закон распределения СВ X – числа появлений события A при пяти испытаниях. Найдите $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

9.2. Определите постоянную вероятность p попадания в цель при каждом выстреле и число произведенных выстрелов, если среднее число попаданий равно 240, а среднее квадратическое отклонение числа попаданий равно 12.

9.3. Дискретная случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 0{,}324$. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

9.4. В магазин отправлены 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется поврежденной, равна 0,002. Найдите:

1) среднее число поврежденных при перевозке бутылок;

2) вероятность того, что магазин получит более двух поврежденных бутылок.

9.5. Среднее число заказов такси, поступающих на сервер за 1 минуту, равно трем. Найдите вероятность того, что за 2 минуты поступит: а) пять вызовов; б) не менее трех; в) хотя бы один вызов.

9.6. Игрок покупает лотерейные билеты до первого выигрыша. Вероятность выигрыша по одному билету равна 0,1. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – числа купленных билетов, если игрок может купить:

1) только четыре билета;

2) неограниченное (теоретически) число билетов.

9.7. Монету бросают до тех пор, пока 2 раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – числа подбрасываний и вероятности следующих событий: события A – опыт окончится до шестого броска; события B – потребуется четное число бросков.

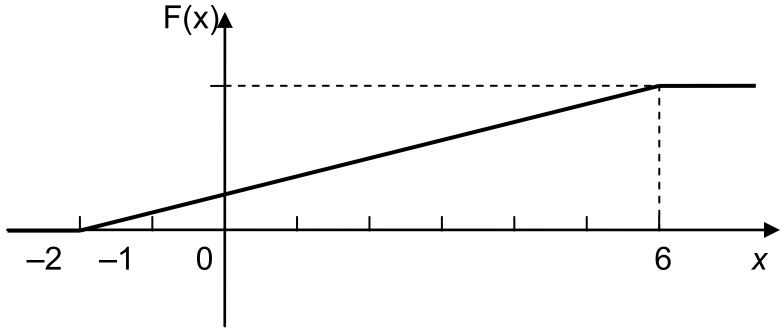
9.8. Плотность вероятности НСВ X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}25a, & \text{если } x \in [0;4]; \\ 0, & \text{если } x \notin [0;4]. \end{cases}$$

Найдите: а) значение параметра a; б) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; в) $P\big(X \in [0;\ 1{,}1]\big)$.

9.10. Некто ожидает телефонный звонок между 19.00 и 20.00. Время ожидания звонка есть НСВ X, имеющая равномерное распределение на отрезке $[19;\ 20]$. Найдите вероятность того, что звонок поступит в промежутке от 19 часов 22 минут до 19 часов 46 минут.

9.11. График функции распределения непрерывной СВ X представлен на рисунке. Найдите аналитическое выражение для функций $F(x)$, $f(x)$; вычислите MX; DX.



9.12. Время T выхода из строя прибора подчинена показательному закону распределения с плотностью $f(t) = \begin{cases} 0,2e^{-0,2t}, & если\ t \geq 0; \\ 0, & если\ t < 0. \end{cases}$

Найдите:

а) функцию распределения $F(t)$;

б) математическое ожидание и дисперсию СВ T;

в) вероятность того, что прибор сохранит работоспособность от 1 до 5 часов работы.

9.13. Срок службы жесткого диска компьютера – случайная величина, подчиненная показательному распределению. Зная, что средний срок службы жесткого диска 43 800 часов, найдите долю дисков, срок службы которых превысит 20 000 часов.

9.14. 90% лампочек перегорают после 800 часов работы. Найдите вероятность того, что лампочка перегорит в промежутке от 100 до 200 часов работы (СВ T – время безотказной работы лампочки).

9.15. Математическое ожидание нормально распределенной СВ X равно $a = 3$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma = 2$.

1) Запишите плотность вероятности СВ X и постройте ее график.

2) Найдите интервал наиболее вероятных значений СВ X.

3) Найдите вероятность того, что СВ X примет значение из интервала (–2; 4).

9.16. Случайные ошибки измерения детали подчинены нормальному закону с параметром $\sigma = 20$ мм. Найдите вероятность того, что измерение детали произведено с ошибкой, не превосходящей по модулю 25 мм.

9.17. Срок безотказной работы телевизора представляет собой СВ $X \sim N(12; 3)$. Найдите вероятность того, что телевизор будет работать

а) не менее 15 лет; б) от 6 до 9 лет; в) от 9 до 15 лет.

9.18. В нормально распределенной совокупности 15% значений СВ X меньше 12 и 40% значений X больше 16,2. Найдите среднее значение и среднеквадратическое отклонение для данного распределения.

Задания для индивидуальной работы

9.19. Производится 5 независимых опытов, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью 0,6. Составьте закон распределения СВ X – числа появлений события A в пяти испытаниях. Найдите $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

9.20. 20% изделий, выпускаемых данным предприятием, нуждаются в дополнительной регулировке. Наудачу отобрано 150 изделий. Найдите среднее значение и дисперсию СВ X – числа изделий в выборке, нуждающихся в регулировке.

9.21. Найдите среднее число лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, а вероятность выигрыша по одному билету равна 0,1. Найдите дисперсию числа успехов в данном опыте.

9.22. Найдите закон распределения указанной СВ X. Вычислите $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

а) Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. СВ X – число поражений цели при шести выстрелах.

б) Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна $\frac{1}{8}$. СВ X – число выигрышных билетов из трех.

в) Вероятность сдачи данного экзамена для каждого из шести студентов равна 0,8. СВ X – число студентов, сдавших экзамен.

г) Из 30 приборов, проверяемых на надежность, пять высшей категории. Наугад взяли 4 прибора. СВ X – число приборов высшей категории среди отобранных.

9.23. Сообщение содержит 1000 символов. Вероятность искажения одного символа равна 0,004. Найдите среднее число искаженных символов; найдите вероятность того, что будет искажено не более трех символов.

9.24. Вероятность производства нестандартной детали равна 0,05. Контролер проверяет партию деталей, извлекая их по одной до первого появления нестандартной детали, но не более трех штук. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа проверенных деталей.

9.25. Производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,2. Найдите математическое ожидание и дисперсию СВ X – числа произведенных выстрелов, считая, что:

а) стрелять можно неограниченное число раз;

б) в наличии есть всего пять патронов.

9.26. Про СВ X известно, что $X \sim R[4;7]$. Найдите $f(x)$, $M(X)$, $\sigma(X)$, $P(X \in (6;\, 6{,}81))$.

9.27. СВ X распределена равномерно и имеет следующие числовые характеристики $MX = 2$, $DX = 3$. Найдите $F(x)$, $f(x)$, $P(0 < X < 4)$.

9.28. СВ *X*, которая равна длительности работы элемента, имеет плотность распределения $f(t)=\begin{cases}0{,}03e^{-0{,}03t}, & \text{если } t\ge 0;\\ 0, & \text{если } t<0.\end{cases}$ Найдите среднее время работы элемента; вероятность того, что элемент будет работать не менее 400 часов.

9.29. СВ *X* распределена по показательному закону с параметром $\lambda=0{,}4$. Найдите дифференциальную и интегральную функции распределения, σX, а также вероятность попадания значений СВ *X* в интервал $(0{,}25;\ 5)$.

9.30. Радиоаппаратура за 1000 часов работы выходит из строя в среднем один раз. Определите вероятность выхода из строя радиоаппаратуры за 200 часов работы, если срок безотказной работы – случайная величина, распределенная по показательному закону.

9.31. Определите время работы аккумуляторной батареи с вероятностью 0,8 (вероятность безотказной работы батареи), если среднее время ее работы равно 700 часов.

9.32. СВ *T* подчинена показательному закону с известным λ. Запишите $f(t)$, $F(t)$. Найдите $M(T), D(T), \sigma(T),\ P(\alpha<T<\beta)$.

а) $\lambda=1{,}2;\quad \alpha=0{,}98;\quad \beta=2{,}43$.

б) $\lambda=2{,}4;\quad \alpha=1{,}45;\quad \beta=3{,}62$.

в) $\lambda=1{,}8;\quad \alpha=0{,}42;\quad \beta=2{,}53$.

г) $\lambda=3{,}2;\quad \alpha=2{,}41;\quad \beta=3{,}45$.

9.33. Математическое ожидание нормально распределенной СВ *X* равно $MX=5$ и дисперсия $DX=9$.

а) Запишите функцию плотности вероятности СВ *X* и постройте ее график.

б) Найдите вероятность того, что СВ *X* примет значение из интервала (–4; 8).

9.34. Рост взрослых мужчин является СВ *X*, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием $a=175$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma=10$. Найти плотность вероятности этой СВ; вероятность того, что ни один из трех наудачу выбранных мужчин не будет иметь рост менее 180 см.

9.35. СВ *X* распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $a=25$. Вероятность попадания *X* в интервал $(10;15)$ равна 0,2. Чему равна вероятность попадания СВ *X* в интервал $(35;40)$?

9.36. СВ *X* распределена нормально с $MX=2,\ \ DX=9$. Запишите выражения для плотности вероятности, функции распределения. Найдите интервал наиболее вероятных значений СВ *X*. Что вероятнее: $X\in(-2;\,2)$ или $X\in(1;\,5)$?

9.37. СВ X нормально распределена с известными параметрами a и σ. Запишите плотность вероятности, функцию распределения. Постройте их графики. Что вероятнее: $X \in (\alpha, \beta)$ или $X \in (\gamma, \delta)$?

а) $a = 4$; $\sigma^2 = 25$; $\alpha = -1$; $\beta = 3$; $\gamma = 4$; $\delta = 6$.

б) $a = -3$; $\sigma^2 = 9$; $\alpha = -6$; $\beta = 0$; $\gamma = 0$; $\delta = 5$.

в) $a = 6$; $\sigma^2 = 16$; $\alpha = -4$; $\beta = 2$; $\gamma = 4$; $\delta = 9$.

г) $a = 0$; $\sigma^2 = 4$; $\alpha = -5$; $\beta = 1$; $\gamma = 2$; $\delta = 8$.

10. Системы случайных величин. Законы распределения, числовые характеристики двумерных дискретных и непрерывных случайных величин

Распределение системы двух дискретных СВ (X, $У$) может быть задано таблицей

$У \backslash X$	x_1	x_2	…	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}
y_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}
…	…	…	…	…
y_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}

где $P\left(X = x_i,\ Y = y_i\right) = p_{ij}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

Зная закон распределения двумерной СВ (X, $У$), можно найти закон распределения каждой составляющей

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij},\ i = \overline{1,n}\ ;\ P(Y = y_i) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij},\ j = \overline{1,m}\ .$$

Математическим ожиданием системы СВ (X, $У$) называют точку $\left(M(X);M(Y)\right) = \left(m_x, m_y\right)$, $m_x = M\left(X\right)$, $m_y = M\left(Y\right)$.

$$m_x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij},\ m_y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_i p_{ij}\ .$$

Дисперсия системы СВ (X, $У$) $\left(D(X), D(Y)\right)$, где

$$D(X) = M\left(\left(X - m_x\right)^2\right),\ D(Y) = M\left(\left(Y - m_y\right)^2\right).$$

Ковариацией или *корреляционным моментом* системы СВ (X, $У$) называют величину

$$\mu_{xy} = M\left(\left(X - m_x\right)\left(Y - m_y\right)\right) = M\left(XY\right) - m_x m_y\ .$$

Для дискретной системы

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p_{ij}.$$

Для непрерывной

$$M(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\,f\left(x,y\right)dx\,dy.$$

Свойства ковариации:

1. $\mu_{xy}=\mu_{yx}$.
2. $\mu_{xx}=\sigma_x^2$; $\mu_{yy}=\sigma_y^2$.
3. Если X и $У$ независимые СВ, то $\mu_{xy}=0$.

Число $r_{xy}=\dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$ называют *коэффициентом корреляции* СВ X и $У$. Свойства коэффициента корреляции:

1. $r_{xx}=r_{yy}=1$.
2. $\left|r_{xy}\right|\le 1$.
3. Если X и $У$ независимые СВ, то $r_{xy}=0$.

Если $r_{xy}=0$, то СВ X и $У$ называют *некоррелированными*.

Непрерывную систему СВ (X, $У$) обычно определяют плотностью распределения вероятности $f(x,y)$ или функцией распределения $F\left(x,y\right)$.

$$F\left(x,y\right)=P\left(X<x,\ Y<y\right),$$

$$f\left(x,y\right)=F''_{xy}\left(x,y\right).$$

Свойства плотности распределения $f\left(x,y\right)$:

1. $f\left(x,y\right)\ge 0$, для $\left(x;y\right)\in\mathbb{R}^2$.
2. $P\left((X,Y)\in D\right)=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$.
3. $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,du\,dv$.
4. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx\,dy=1$.

$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy$; $f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx$ – плотности вероятности составляющих системы.

Если $f\left(x,y\right)=f_1(x)\cdot f_2(y)$, то СВ X и $У$ независимые.

Замечание. Введем понятие условного распределения СВ X при $Y = y_j$.

X	x_1	x_2	…	x_n
$P\left(x_i \middle| y_j\right)$	$P\left(x_1 \middle| y_j\right)$	$P\left(x_2 \middle| y_j\right)$	…	$P\left(x_n \middle| y_j\right)$

где условные вероятности определяются по формулам

$$P\left(x_i \middle| y_j\right) = \frac{Pij}{P\left(y_j\right)}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = const.$$

Если $P\left(x_i \middle| y_j\right) \neq P\left(X = x_i\right)$, то X и $У$ – зависимые СВ.

Задания для аудиторной работы

10.1. Две независимые дискретные случайные величины X и Y заданы своими законами распределения вероятностей:

X	–2	1	4
p	0,2	0,3	0,5

Y	–1	0	1	2	3
p	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1

а) Найдите закон распределения вероятностей системы СВ $(X;Y)$ и вычислите $P(x<0, y \geq 0)$, $P(x \geq 1, -1 < y < 2)$, $P(x \leq 4, y > 2)$.

б) Найдите закон распределения вероятностей случайной величины $Z = X \cdot Y$ и вычислите $M(Z)$, $D(Z)$ и вероятность того, что полученная СВ примет отрицательное значение.

10.2. Закон распределения системы двух СВ (X, $У$) имеет вид

X \ $У$	0	1	2	3
–1	0,01	0,06	0,05	0,04
0	0,04	0,24	0,05	0,17
1	0,05	0,10	0,10	0,09

Найдите одномерные законы распределения СВ X и $У$, их математические ожидания и дисперсии, коэффициент корреляции между величинами X и $У$.

10.3. Плотность распределения вероятностей системы СВ (X, $У$)

$$f\left(x,y\right) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0,\ y<0, \\ 6\,e^{-(3x+2y)}, & \text{если} \quad x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$$

Найдите математические ожидания и средние квадратические отклонения составляющих X и $У$, их ковариацию.

10.4. Совместное распределение случайных величин X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y) = \begin{cases} c(y-xy), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где область $D = \left\{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\right\}$.

Найдите

а) коэффициент c;

б) плотность распределения отдельных компонент X и Y;

в) $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$;

г) корреляционный момент и коэффициент корреляции.

10.5. Независимые СВ распределены нормально с параметрами $m_x = 2$, $m_y = -3$, $\sigma_x = 1$, $\sigma_y = 2$. Вычислите вероятность того, что $|X| \le 1$ и $|Y| \le 2$.

10.6. Система двух СВ (X, $У$) равномерно распределена в треугольнике, ограниченном линиями $y = x$, $y = 0$, $x = 2$. Найдите m_x, m_y, σ_x, σ_y. Вычислите коэффициент корреляции системы.

Задания для индивидуальной работы

10.7. Закон распределения системы СВ (X, $У$) задан таблицей

$У$ \ X	2	4	6	8
–1	0,08	0,05	0,02	0,05
2	0,15	0,25	0,03	0,07
3	0,07	0,09	0,12	0,02

Найдите законы распределения СВ X и $У$, входящих в систему. Составьте условный закон распределения СВ X при условии $Y = 2$. Найдите m_x, m_y, σ_x, σ_y и коэффициент корреляции системы.

10.8. Плотность распределения вероятностей системы равна

$$f(x, y) = \begin{cases} 36xye^{-3\left(x^2+y^2\right)}, & \textit{если} \quad x \ge 0,\ y \ge 0, \\ 0, & \textit{если} \quad x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Найдите m_x, m_y, σ_x, σ_y.

10.9. Дана таблица

$У$ \ X	–1	0	1
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

Найдите законы распределения составляющих, вычислите корреляционный момент и выясните, будут ли СВ X и $У$ независимы.

11. Закон больших чисел. Теоремы Бернулли, Чебышева. Понятие о предельных теоремах

Неравенство Маркова. Если все значения СВ X положительны и A – некоторое положительное число, то

$$P(X \ge A) \le \frac{M(X)}{A}.$$

Неравенство Чебышева. Если СВ X имеет конечную дисперсию $D(X)$ и $M(X)$, то при любом действительном $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \text{ или } P\left(\left|X - M(X)\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышева. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – последовательность попарно независимых СВ, дисперсии которых ограничены одним и тем же числом, то при $n \to \infty$ среднее арифметическое СВ X_i, $i = \overline{1,n}$ сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{\sum X_i}{n} - \frac{\sum M(X_i)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Из теоремы следует оценка

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i - \frac{1}{n}\sum M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D(X)}{n\varepsilon^2},$$

где ε - любое сколь угодно малое положительное число.

Теорема Бернулли устанавливает связь между частотой события и его вероятностью.

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

При доказательстве теоремы получают неравенство

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = P\left(\left|m - np\right| < \varepsilon \cdot n\right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Теорема Ляпунова. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые СВ с одним и тем же законом распределения, то при $n \to \infty$ СВ $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ имеет распределение, близкое к нормальному.

$$f(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma y^2}}, \quad m_y = \sum_{i=1}^{n} M(X_i), \; \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} D(X_i).$$

Тогда

$$P(\alpha < Y < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_y}{\sigma_y}\right).$$

Частным случаем теоремы Ляпунова является *интегральная терема Лапласа*.

Частота события A $\omega(A)=\dfrac{m}{n}$ является СВ, ее математическое ожидание $M\big(\omega(A)\big)=p$, а дисперсия $D\big(\omega(A)\big)=\dfrac{pq}{n}$, тогда

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

Пример 11.1. Вероятность наступления некоторого события A в каждом из 1500 испытаний равна 0,2. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что отклонение числа наступлений события A от математического ожидания будет более 40.

Решение. СВ X – число наступлений события A в n испытаниях подчинена биномиальному закону. $n=1500$, поэтому

$$M(X)=np=1500\cdot 0{,}2=300,\quad D(X)=npq=300\cdot 0{,}8=240\ .$$

Подставим данные в неравенство Чебышева при $\varepsilon=40$, получим

$$P\big(\,|X-300|>40\big)\le\frac{240}{40^2}=\frac{240}{1600}=0{,}15.$$

Ответ. 0,15.

Пример 11.2. В рассматриваемом технологическом процессе в среднем 75% изделий имеют допуск $\pm 5\%$. С помощью неравенства Чебышева оцените вероятность того, что среди 2000 изделий имеют допуск $\pm 5\%$ от 1450 до 1550 изделий.

Решение. Число изделий, имеющих допуск $\pm 5\%$, среди 2000 изделий, является СВ с биномиальным распределением.

$$M(X)=n\cdot p=2000\cdot 0{,}75=1500,\ D(X)=npq=2000\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25=375.$$

$$1450\le X\le 1550,\quad -50\le X-M(X)\le 50.$$

По неравенству Чебышева получим

$$P\big(\,|X-1500|\le 50\big)\ge 1-\frac{375}{50^2}=0{,}85.$$

Вероятность такого события не меньше 0,85.

Вычислим вероятность такого события, используя интегральную теорему Лапласа:

$$P(1450\le X\le 1550)\approx\Phi\left(\frac{1550-1500}{\sqrt{375}}\right)-\Phi\left(\frac{1450-1500}{\sqrt{375}}\right)=$$

$$=2\Phi\left(\frac{50}{\sqrt{375}}\right)=2\Phi(2{,}58)=2\cdot 0{,}495060=0{,}99012.$$

Ответ. 0,99012.

Пример 11.3. Сколько деталей следует проверить, чтобы с вероятностью не менее 0,95, можно было утверждать, что абсолютная величина отклонения частоты годных деталей от вероятности детали быть годной, равной 0,9, не превысит 0,01?

Решение. Воспользуемся неравенством $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$.

Из условия $p=0{,}9$, $q=0{,}1$, $\varepsilon=0{,}01$ и $1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}\geq 0{,}95$. Тогда

$$\frac{pq}{n\varepsilon^2}\leq 0{,}05 \;\Rightarrow\; 0{,}9\cdot 0{,}1\leq 0{,}05\cdot n\cdot 0{,}01^2 \;\Rightarrow\; n\geq\frac{0{,}9\cdot 0{,}1}{0{,}05\cdot 0{,}01^2}=18000.$$

Наименьшее число деталей, которые следует проверить, 18000.

Ответ. 18 000.

Задания для аудиторной работы

11.1. Математическое ожидание количества выпадающих в течение года осадков в данной местности составляет 60 см. Определите вероятность того, что в этой местности осадков выпадает не менее 180 см.

11.2. Суточный расход воды в населенном пункте является СВ X, для которой $\sigma(X)=10000$ л. Оцените вероятность того, что расход воды в этом пункте в течение дня отклоняется от математического ожидания по абсолютной величине более чем на 25000 л.

11.3. Стрелок стреляет по мишени 300 раз, причем вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна $\frac{2}{3}$. Определите вероятность того, что стрелок попадет в мишень от 185 до 215 раз.

11.4. В результате медицинского осмотра 900 призывников установлено, что их средний вес на 1,2 кг больше среднего веса призывников за один из предшествующих периодов. Найдите вероятность этого отклонения, если среднее квадратическое отклонение веса призывников равно 8 кг.

11.5. Дисперсия каждой из 2500 независимых СВ не превышает пяти. Оцените вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих СВ от среднего арифметического их математических ожиданий не превысит 0,4.

11.6. Вероятность появления события A в отдельном испытании равна 0,6. Применив теорему Бернулли, определите число независимых испытаний, начиная с которого вероятность отклонения частоты события от его вероятности по абсолютной величине меньше 0,1, будет больше 0,97.

11.7. По данным ОТК, брак при выпуске деталей составляет 2,5 %. Пользуясь теоремой Бернулли, оцените вероятность того, что при просмотре партии из 800 деталей будет установлено отклонение от средней доли брака менее 0,005.

Задания для индивидуальной работы

11.8. Среднее значение скорости ветра у земли в данном пункте равно 16 км/час. Оцените вероятность того, что в этом пункте скорость ветра не будет превышать 80 км/час.

11.9. Число солнечных дней в году для данной местности является СВ X, $M(X)=75$ дням. Оценить вероятность того, что в течение года в данной местности будет более 200 солнечных дней.

11.10. Среднее значение расхода воды в населенном пункте составляет 50 000 л/дн. Оцените вероятность того, что в этом населенном пункте расход воды не будет превышать 150 000 л/дн.

11.11. Вероятность наличия зазубрин на металлических брусках, изготовленных для обточки, равна 0,2. Оценить вероятность того, что в партии из 1000 брусков отклонение числа пригодных брусков от 800 не превышает 5 %.

11.12. Среднее квадратическое отклонение каждой из 2134 независимых СВ не превосходит 4. Оцените вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих СВ от среднего арифметического их математических ожиданий не превзойдет 0,5.

11.13. Принимая вероятность вызревания кукурузного стебля с тремя початками равной 0,75, оцените с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что среди 3000 стеблей опытного участка таких стеблей будет от 2190 до 2310 включительно.

11.14. Вероятность появления события в одном опыте равна 0,5. Можно ли с вероятностью, большей 0,97 утверждать, что число появлений события в 1000 опытах находится в пределах от 400 до 600?

11.15. Среднесуточное потребление электроэнергии в населенном пункте равно 12 000 квт.ч. Оцените вероятность того, что потребление электроэнергии в этом населенном пункте в течение данных суток превзойдет 50 000 квт.ч.

Статистические таблицы

Приложение 1. Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

x	Сотые доли									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2331	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001	0001

При $x \geq 4$ функция принимает значения $\varphi(x)=0$.

Приложение 2. Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115	1,80	0,4641	2,50	0,4938
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131	1,81	0,4649	2,52	0,4941
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147	1,82	0,4656	2,54	0,4945
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162	1,83	0,4664	2,56	0,4948
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177	1,84	0,4671	2,58	0,4951
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192	1,85	0,4678	2,60	0,4953
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207	1,86	0,4686	2,62	0,4956
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222	1,87	0,4693	2,64	0,4959
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236	1,88	0,4699	2,66	0,4961
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251	1,89	0,4706	2,68	0,4963
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265	1,90	0,4713	2,70	0,4965
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279	1,91	0,4719	2,72	0,4967
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292	1,92	0,4726	2,74	0,4969
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306	1,93	0,4732	2,76	0,4971
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319	1,94	0,4738	2,78	0,4973
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332	1,95	0,4744	2,80	0,4974
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345	1,96	0,4750	2,82	0,4976
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357	1,97	0,4756	2,84	0,4977
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370	1,98	0,4761	2,86	0,4979
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382	1,99	0,4767	2,88	0,4980
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394	2,00	0,4772	2,90	0,4981
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406	2,02	0,4783	2,92	0,4982
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418	2,04	0,4793	2,94	0,4984
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429	2,06	0,4803	2,96	0,4985
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441	2,08	0,4812	2,98	0,4986
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452	2,10	0,4821	3,00	0,4987
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463	2,12	0,4830	3,20	0,4993
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474	2,14	0,4838		0,4997
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484	2,16	0,4846	3,40	0,4998
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495	2,18	0,4854	3,60	0,4999
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4515	2,20	0,4861	3,80	0,4999
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4505	2,22	0,4868	4,00	0,5000
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,67	0,4525	2,24	0,4875	4,50	0,5000
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535	2,26	0,4881	5,00	
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545	2,28	0,4887		↓
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554	2,30	0,4893	↓	0,5
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564	2,32	0,4898	$+\infty$	
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573	2,34	0,4904		
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582	2,36	0,4909		
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,4591	2,38	0,4913		
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599	2,40	0,4918		
0,41	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608	2,42	0,4922		
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616	2,44	0,4927		
0,43	0,1654	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4625	2,46	0,4931		
0,44	0,1700	0,89	0,3133	1,34	0,4099	1,79	0,4633	2,48	0,4934		

Приложение 3. Значения $P_k = \dfrac{a^k}{k!} e^{-a}$ (Распределение Пуассона).

k \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0019	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

k \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0037	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

Ответы и указания

1. Элементы комбинаторики

1.1. а) 780; б) 180; в) 440. **1.2.** а) 1080; б) 216; в) 81; г) 360.

1.3. а) 300; б) 60; в) 36; г) 108. **1.5.** а) 625; б) 60; в) 10.

1.6. а) 3 628 800; б) 241 920; в) 3 386 880. **1.7.** 8008. **1.8.** 2739.

1.9. 15368. **1.13.** б) 1320. **1.14.** 40320. **1.15.** 60. **1.16.** 5040. **1.17.** 6435. **1.18.** 1260. **1.19.** а) 40 320; б) 5 040; в) 5 040; г) 576; д) 1 152; е) 2 880. *Указания.* Обозначим дорожки на стадионе номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. **д)** Спортсмены с Ямайки должны бежать только по дорожкам с нечетными или только по дорожкам с четными номерами. 4! способами можно расставить спортсменов с Ямайки на дорожках с нечетными номерами, тогда спортсменов из Европы можно расставить на оставшихся дорожках 4! способами. Всего $4!\cdot 4!$ способов. Аналогично, если спортсмены с Ямайки будут бежать по дорожкам с четными номерами. Таких способов также $4!\cdot 4!$. Т.е. всего способов, удовлетворяющих условию задачи $2\cdot 4!\cdot 4! = 1152$. **е)** Спринтеры из Европы могут бежать по дорожкам с номерами 1, 3, 5, 7 или 2, 4, 6, 8 или 1, 3, 5, 8 или 1, 3, 6, 8 или 1, 4, 6, 8. В каждом из пяти случаев $4!\cdot 4!$ способов расставить спортсменов на дорожках. Следовательно, число всех результатов жеребьевки $5\cdot 4!\cdot 4! = 2880$. **1.20.** а) 1 330; б) 220; в) 594; г) 814;

д) 1 110. **1.21.** 91. **1.22.** 60. **1.23.** 100 000. **1.24.** 479 001 600. **1.25.** 90. **1.26.** 59 280. **1.27.** 792. **1.28.** 66. **1.29.** 28. **1.30.** 300. **1.31.** 86 493 225. **1.32.** 15 120. **1.33.** 10. **1.34.** а) 720; б) 60; в) 6; г) 3; д) 151 200. **1.35.** 32 768. **1.36.** а) 21; б) 4 620; в) 420; г) 11 607. **1.37.** 375. *Решение.* Заметим, что по условию в записи числа нет цифр 1 и 4, а сумма цифр равна 8. Значит, среди цифр числа нет также 9 и 7 (семерки нет, т.к. нет единицы). Тогда есть только одно число, содержащее цифру 8: 800000000000. Рассмотрим числа, состоящие из цифр 0, 2, 3, 5, 6 и удовлетворяющие условию задачи. Если число содержит цифру 6, то так же содержит еще 2. Очевидно, одна из этих цифр должна быть на первом месте, а вторую можно разместить в числе 11 способами. Тогда, таких чисел $2\cdot 11 = 22$. Заметим, что аналогичная ситуация будет, если число содержит цифру 5. Тогда еще одна, отличная от нуля цифра 3 и таких чисел $2\cdot 11 = 22$. Если одна из цифр, входящих в число 3 и число не содержит 5, то тройки должно быть две и должна быть цифра 2. Если двойка первая, то тройки можно разместить $\binom{11}{2} = \frac{11\cdot 10}{2} = 55$ способами. Если же на первом месте тройка, то оставшиеся две ненулевые цифры можно разместить $11\cdot 10 = 110$ способами. Осталась ситуация, когда число содержит четыре двойки и остальные нули. Очевидно, что одна двойка должна занимать первую позицию, а оставшиеся три можем разместить в числе $\binom{11}{3} = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{3!} = 165$ способами. Таким образом, получаем, что чисел, удовлетворяющих условию задачи

$1+22+22+55+110+165=375$. **1.38.** 220. *Решение.* Если наибольшая цифра такого числа 4, то все оставшиеся цифры – единицы. Таких чисел 10. Если наибольшая цифра числа 3, то в числе также должна быть цифра 2, а остальные восемь цифр – единицы. Таких чисел $10\cdot 9=90$. Если наибольшая цифра в числе 2, то должно быть три двойки и остальные – единицы. Три двойки можно расположить в числе $\binom{10}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}=120$ способами. Таким образом, чисел, удовлетворяющих условию задачи, будет $10+90+120=220$.

2. Алгебра событий

2.4. 1. Ω – множество двухэлементных последовательностей, состоящие из различных элементов множества $\{A, B, C, D, E, F\}$ или Ω – множество двухэлементных размещений без повторений множества $\{A, B, C, D, E, F\}$. $|\Omega|=6\cdot 5=30$.

2. Ω – множество двухэлементных подмножеств множества $\{A, B, C, D, E, F\}$ или Ω – множество двухэлементных сочетаний без повторений множества $\{A, B, C, D, E, F\}$. $|\Omega|=C_6^2=\frac{6!}{2!\cdot 4!}=15$.

2.5. а) 1; 2; 3; 4; 5; 6; б) 2; 4; 6; 8; 10; в) 7; 8; 9; 10; г) 2; 4; 6;
д) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10. **2.10.** Ω – множество трехэлементных размещений с повторениями множества $\{A, B, C, D, E, F\}$. $|\Omega|=6^3=216$ или Ω – множество трехэлементных сочетаний с повторениями, состоящими из элементов множества $\{A, B, C, D, E, F\}$, $|\Omega|=C_{6+3-1}^3=C_8^3=56$.
2.11. $|\Omega|=24$.

3. Классическое и геометрическое определения вероятности

3.3. а) 0,25; б) 0,5; в) 0,75. **3.4.** а) $\frac{1}{18}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{11}{36}$. **3.5.** $n=7$.
3.6. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{3}$. **3.7.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{5}{28}$. **3.8.** 0,027. **3.9.** а) 0,24; б) 0,95.

3.10. $\frac{15}{22}$. **3.11.** а) $\frac{3}{44}$; б) $\frac{3}{11}$; в) $\frac{3}{22}$. **3.12.** а) $\frac{2}{\pi}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

3.13. $\frac{1}{12}$. **3.14.** а) 0,5. **3.15.** а) 0,57; б) 0,36; в) 0,43. **3.16.** а) 0,00012;
б) 0,171; в) 0,162. **3.17.** 0,62. **3.18.** 0,9286. **3.19.** а) 0,384; б) 0,096.
3.20. 0,3601. **3.21.** а) 0,1512; б) 0,0115625. **3.22.** 0,067. **3.23.** $\frac{1}{720}$.
3.24. а) $\frac{6}{11}$; б) $\frac{1}{462}$; в) $\frac{1}{462}$; г) $\frac{1}{77}$; д) $\frac{2}{11}$; е) $\frac{1}{11}$. **3.27.** а) 0,1591; б) 0,3182.
3.28. 0,00195. **3.29.** а) 0,57; б) 0,21. **3.30.** 0,302.

3.31. а) 0,357; б) 0,119. **3.32.** а) 0,007; б) 0,042. **3.33.** 0,056.

3.34. 0,246. **3.35.** $\frac{11}{699840}$. *Решение.* Всех восьмизначных чисел, состоящих из цифр множества $\{0;1;3;5;7;9\}$, существует $5\cdot 6^7$ (первую цифру можно выбрать пятью способами, а каждую из оставшихся цифр – шестью способами). Т.к. сумма цифр должна быть равна трем, то возможны два варианта: число 30000000 и числа, содержащие в своей записи три единицы. Чисел с тремя единицами $\binom{7}{2}=\frac{7\cdot 6}{2}=21$. Тогда, интересующая нас вероятность равна $\frac{1+21}{5\cdot 6^7}=\frac{11}{699840}\approx 0{,}00001572$.

3.36. $1-\frac{\pi}{64}\approx 0{,}951$. **3.37.** 0,25. **3.38.** 0,456. **3.39.** 0,38. **3.40.** 0,6.

4. Теоремы сложения и умножения вероятностей случайных событий

4.1. а) 0,02; б) 0,0396. **4.2.** $\frac{2}{15}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{4}{15}$. **4.3.** 0,964. **4.4.** а) 0,336; б) 0,452; в) 0,976; г) 0,788. **4.5.** $1-(1-p)^n$. **4.6.** не менее 12.

4.7. а) 0,504; б) 0,902; в) 0,092. **4.8.** а) 0,444; б) 0,124; в) 0,992.

4.9. а) 0,336; б) 0,664; в) 0,212. **4.10.** 0,131. **4.11.** а) 0,6976; б) 0,9572; в) 0,9976. **4.12.** а) 0,0144; б) 0,1248; в) 0,1104. **4.13.** $\frac{1}{5}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{2}{25}$, $\frac{11}{25}$. **4.14.** 0,188. **4.15.** 0,664. **4.16.** 0,7. **4.17.** 0,2128. **4.18.** а) 0,000006613; б) 0,0028; в) 0,000397. **4.19.** $n>3$. **4.20.** $n>30$. **4.21.** $n>10$.

4.22. не менее 28. **4.23.** 0,5. **4.24.** $\frac{133}{216}$. *Решение.* $|\Omega|=\binom{6n+1}{3}=\frac{(6n+1)\cdot 6n\cdot(6n-1)}{3!}=\frac{6n(36n^2-1)}{6}$. Заметим, что среди заданных чисел есть n чисел, кратных 6 (это 6, 12. … $6n$), $3n$ четных чисел и $2n$ чисел, кратных 3 ($3=3\cdot 1$, $6=3\cdot 2,\ldots,6n=3\cdot 2n$). Следовательно, среди данных чисел $3n-n=2n$ четных чисел, которые не делятся на 3 и $2n-n=n$ нечетных чисел, кратных трем. Остается $6n+1-n-2n-n=2n+1$ нечетных чисел, которые не делятся на 3 (из множества всех чисел убираем числа, которые кратны 6, четные числа, которые не делятся на 3 и нечетные числа, кратные трем). Составим событие, противоположное событию A_n. Событие $\overline{A}_n$ состоит в том, что произведение полученных чисел не делится на 6. Наборов, где нет числа, кратного трем:

$$\binom{(6n+1)-2n}{3} = \binom{4n+1}{3} = \frac{(4n+1)\cdot 4n\cdot(4n-1)}{3!} = \frac{4n(16n^2-1)}{6}.$$

Наборов, где нет четного числа:

$$\binom{(6n+1)-3n}{3} = \binom{3n+1}{3} = \frac{(3n+1)\cdot 3n\cdot(3n-1)}{3!} = \frac{3n(9n^2-1)}{6}.$$

Очевидно, что нечетные числа, которые не делятся на 3, входят и в одно, и в другое из найденных множеств. Таких наборов

$$\binom{2n+1}{3} = \frac{(2n+1)\cdot 2n\cdot(2n-1)}{6} = \frac{2n(4n^2-1)}{6}.$$

Поэтому, наборов чисел, благоприятствующих событию $\bar{A}_n$

$$\frac{4n(16n^2-1)}{6} + \frac{3n(9n^2-1)}{6} - \frac{2n(4n^2-1)}{6} = \frac{83n^2-5n}{6}.$$

Тогда, вероятность события A_n:

$$P(A_n) = 1 - \frac{\frac{83n^2-5n}{6}}{\frac{6n(36n^2-1)}{6}} = 1 - \frac{83n^2-5n}{216n^2-6n} = \frac{133n^2-n}{216n^2-6n}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{133n^2-n}{216n^2-6n} = \frac{133}{216}.$$

5. Формула полной вероятности. Формула Байеса

5.1. 0,5. **5.2.** 0,7625. **5.3.** 0,4286. **5.4.** а) 0,625; б) 0,5. **5.5.** а) 0,0031; б) 0,34. **5.6.** 0,125. **5.7.** 0,143 – отличный; 0,457 – хороший; 0,4 – посредственный. **5.8.** $\frac{5}{14}$.**5.9.** 0,07875. **5.10.** 0,934. **5.11.** 0,25.

5.12. а) 0,5375; б) 0,5814. **5.13.** 0,86. **5.14.** а) 0,69; б) 0,2319.

5.15. 0,3875. **5.16.** 0,6924; 0,3076. **5.17.** 0,2. **5.18.** A – 0,421; B – 0,263; C – 0,316. **5.19.** 0,2. **5.20.** $\frac{256k}{255k+n}$.**5.21.** 0,445. **5.22.** первый охотник должен получить $\frac{22}{46}$; второй – $\frac{17}{46}$; третий – $\frac{7}{46}$ кабана. **5.23.** Оба события равновероятны $p = 0,75$.**5.24.** 0,2048.

6. Повторение независимых испытаний

6.1. а) 0,1608; б) 0,8038; в) 0,0354; г) 0,1961. **6.2.** 19; 20. **6.3.** а) одну из двух; б) не менее четырех из восьми. **6.4.** а) 0,0613; б) 0,0189; в) 0,6321. **6.5.** а) 0,025; б) 0,206. **6.6.** 0,9773. **6.7.** 0,91. **6.8.** 0,7698. **6.9.** 400. **6.10.** 15,1. **6.11.** а) 0,0819; б) 0,9832; в) 0,0989.

6.12. а) 0,3932; б) 0,9011; в) 0,0989. **6.13.** а) 0,302; б) 0,0853; в) 0,3758. **6.14.** 0,0115. **6.15.** 0,9526. **6.16.** $m_0 = 45$; 0,1849.

6.17. $329 \le n \le 335$. **6.18.** 0,1041. **6.19.** 0,2606. **6.20.** 0,0993.

6.21. 0,0769. **6.22.** 0,9793. **6.23.** 0,6543. **6.24.** не меньше 300.

6.25. 0,7698. **6.26.** 400. **6.27.** 0,6196. **6.28.** 192 190 руб. *Решение.*

Размер прибыли компании составляет разность между суммарным взносом клиентов компании и суммой, которая будет выплачена m клиентам при наступлении страхового случая, то есть:

$$\Pi = 50 \cdot 10\,000 - 5\,000 \cdot m = 500\,000 - 5\,000 \cdot m = 5\,000(100 - m).$$

Для определения m применим интегральную теорему Муавра-Лапласа:

$$P_{10000}(0; m) = \Phi\left(\frac{m - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}995 \cdot 0{,}005}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{m-50}{7{,}05}\right) + \Phi\left(\frac{50}{7{,}05}\right) = \Phi\left(\frac{m-50}{7{,}05}\right) + \Phi(7{,}09) = \Phi\left(\frac{m-50}{7{,}05}\right) + 0{,}5.$$

Откуда следует, что $\Phi\left(\frac{m-50}{7{,}05}\right) = 0{,}95 - 05 = 0{,}45$. Тогда $\frac{m-50}{7{,}05} = 1{,}64 \Rightarrow m = 61{,}56$. Следовательно, прибыль, на которую может рассчитывать страховая компания с надёжностью 0,95, равна $\Pi = 5\,000(100 - 61{,}56) = 192\,190$. **6.29.** 547. **6.30.** 541.

7. Законы распределения и числовые характеристики дискретных случайных величин (ДСВ)

7.1. $MX = 2$, $DX = 0{,}4$. **7.2.** $MX = 1{,}969$. **7.4.** $MX = 3$, $DX = 2$.

7.7. б) $P(A) = 0{,}48$, $P(B) = 0{,}72$, $P(C) = 0{,}52$.

7.8. $P(A) = \frac{1}{7}$,

X	0	1	2	3
p	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$

7.9.

X	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

7.12. $MX = 2{,}1$; $DX = 0{,}63$. **7.25.** $D(Y) = 12$. **7.26.** $D(Y) = 36$.

7.27. $D(X + 2Y) = 19$. **7.28.** $D(3X - 2Y) = 43$. **7.29.** $P = 0{,}5$.

8. Функция распределения, плотность вероятности, числовые характеристики непрерывных СВ

8.1. $MX = \frac{8}{3}$, $DX = \frac{1}{18}$, $\sigma X = \frac{\sqrt{2}}{6}$. **8.2.** $a = \frac{1}{2}$, $M(X) = -\frac{2}{3}$, $D(X) = \frac{2}{9}$.

8.3. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\ x>1\\ x+1, & -1<x\le 0\\ -x+1, & 0<x\le 1\end{cases}$; $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \dfrac{(x+1)^2}{2}-1, & -1<x\le 0\\ 1-\dfrac{(x-1)^2}{2}, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$

8.4. $a=3$, $F(x)=\begin{cases}0, & x\le \dfrac{\pi}{6}\\ -\cos 3x, & \dfrac{\pi}{6}<x\le \dfrac{\pi}{3}\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$. **8.6.** $P(1\le X\le 2)=0{,}75$.

8.8. $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{\pi}$; $M(X)=0$. **8.9.** $a=0{,}375$; $p=\dfrac{7}{24}$.

8.10. $c=\dfrac{2}{\pi}$, $P(0<X<1)=0{,}5$. **8.12.** $M(X)=\dfrac{9}{13}$, $D(X)=\dfrac{219}{845}$, $\sigma(X)\approx 0{,}509$. **8.13.** $M(X)=1{,}25$; $p=0{,}2639$.

8.14. $M(X)=1{,}2857$; $p=0{,}2865$. **8.15.** $M(X)=1{,}8$; $p=0{,}1876$.

8.16. $M(X)=1{,}133$; $p=0{,}2633$. **8.17.** $M(X)=M_0(X)=4$; $D(X)=0{,}2$.

8.18. $M(X)=2{,}833$; $M_0(X)=2{,}5$; $D(X)=0{,}263$.

8.19. $M(X)=1{,}833$; $M_0(X)=1{,}5$; $D(X)=0{,}2621$.

9. Классические распределения случайных величин

9.2. $p=0{,}4$, $n=600$. **9.4.** 1) 2; 2) 0,323. **9.5.** а) 0,1606; б) 0,938; в) 0,9975. **9.6.** 1) $M(X)=3{,}439$, $D(X)=1{,}03$;

2) $M(X)=10$, $D(X)=90$. **9.7.** $P(A)=\dfrac{15}{16}$, $P(B)=\dfrac{2}{3}$.

9.8. $a=1$; $M(X)=2$; $D(X)=\dfrac{4}{3}$; $\sigma(X)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $P(X\in[0;1{,}1])=0{,}275$.

9.10. 0,4. **9.12.** $MX=5$; $DX=25$; $P(1<X<5)=0{,}451$.

9.13. $P(T\ge 20\,000)=0{,}6334$. **9.14.** $p\approx 9{,}85\cdot 10^{-3}$, $\lambda=0{,}0001$.

9.15. $P(-2<X<4)=0{,}6853$. **9.16.** 0,7888. **9.17.** а) 0,4065; б) 0,4637; в) 0,5935. **9.18.** $a=15{,}39$; $\sigma=3{,}26$. **9.21.** $MX=2$; $DX=1{,}8$.

9.23. 4; 0,433. **9.24.** $MX = 2,8525$; $DX = 0,225$.

9.25. а) $MX = 5$; $DX = 20$; б) $MX = 3,3616$; $DX = 2,57$.

9.28. $333\frac{1}{3}$; 0,30. **9.29.** $\sigma = 2,5$; $p \approx 0,77$. **9.30.** 0,1813. **9.31.** 156 ч.

9.34. 0,029. **9.35.** 0,2.

10. Системы случайных величин. Законы распределения, числовые характеристики двумерных дискретных и непрерывных случайных величин

10.1. а) $P(x < 0, y \geq 0) = 0,14$, $P(x \geq 1, -1 < y < 2) = 0,24$, $P(x \leq 4, y > 2) = 0,1$.

10.2. $m_x = 0,18$; $\sigma_x = 0,68$; $m_y = 1,7$; $\sigma_y = 0,83$; $r_{xy} = -0,028$.

10.3. $\mu_{xy} = 0$. **10.5.** 0,0476.

10.6. $m_x = \frac{4}{3}$, $m_y = \frac{2}{3}$, $\sigma_x = \sigma_y = 0,471$, $r_{xy} = 0,5$.

10.7. $m_x = 4,3$; $m_y = 1,7$; $\sigma_x = 2,01$; $\sigma_y = 1,42$; $r_{xy} = 0,0105$.

10.8. $m_x = m_y = \sqrt{\frac{\pi}{12}}$; $\sigma_x = \sigma_y = 0,2675$.

10.9. $\mu_{xy} = 0$, X и $У$ – зависимы.

11. Закон больших чисел. Теоремы Бернулли, Чебышева. Понятие о предельных теоремах

11.1. не более 0,3333. **11.2.** не более 0,16. **11.3.** 0,9342.
11.4. 0,000003. **11.5.** не менее 0,9875. **11.6.** 801.
11.7. более 0,878125. **11.8.** не менее 0,8. **11.9.** не более 0,75.
11.10. не менее 0,667. **11.11.** более 0,936. **11.12.** не менее 0,97.
11.13. более 0,84375. **11.14.** 0,975, можно. **11.15.** не более 0,24.

Литература

1. Барковская, Л. С. Теория вероятностей. Практикум / Л. С. Барковская, Л. В. Станишевская, Ю. Н. Черторицкий. – 3-е изд., перераб. и доп. – Минск : БГЭУ, 2011. – 150 с.
2. Гладкий, И. И. Теория вероятностей / И. И. Гладкий, Н. В. Маньяков, Л. П. Махнист. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2003. – 50 с.
3. Гладкий, И. И. Теория вероятностей и математическая статистика / И. И. Гладкий, Т. И. Каримова, Л. П. Махнист. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2008. – 67 с.
4. Теория вероятностей и математическая статистика : методические рекомендации / И. И. Гладкий [и др.]. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2010. – 51 с.
5. Теория вероятностей и математическая статистика : задачи и упражнения / И. И. Гладкий [и др.]. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2010. – 46 с.
6. Гусева, С. Т. Кратные и криволинейные интегралы. Теория вероятностей / С. Т. Гусева, Л. С. Золотухина, Т. И. Каримова. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2007. – 51 с.
7. Махнист, Л. П. Учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» / Л. П. Махнист, С. Ф. Лебедь, Т. И. Каримова. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2019.
8. Пархимович, И. В. Теория вероятностей и математическая статистика / И. В. Пархимович, Р. А. Гоголинская, Е. М. Остапчук. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2010. – 43 с.
9. Тузик, Т. А. Теория вероятностей. Математическая статистика / Т. А. Тузик, И. И. Гладкий. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2002. – 52 с.
10. Швычкина, Е. Н. Практикум по высшей математике для студентов технических специальностей. Ч. 7. Теория вероятностей и математическая статистика / Е. Н. Швычкина, Л. Т. Мороз, С. Н. Наумовец. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2015. – 80 с.
11. Kiełbasa, A. Matura z matematyki 2010 - ... Poziom podstawowy i rozszerzony / A. Kiełbasa, P. Łukasiewicz. – Warszawa : Wydawnictwo «2000». – 2009. – Część II. – 212 s.
12. Probability theory. Elements of mathematical statistics : учеб.-метод. разработка на английском языке / Брест. гос. техн. ун-т ; сост. И. И. Гладкий [и др.]. – Брест : БрГТУ, 2014. – 60 с.

Учебное издание

Авторы:
Каримова Татьяна Ивановна
Гладкий Иван Иванович
Крагель Екатерина Александровна
Махнист Леонид Петрович
Кузьмина Елена Викторовна

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ
Теория вероятностей

Текст печатается в авторской редакции, орфографии и пунктуации

Ответственный за выпуск: Гладкий И. И.
Редактор: Митлошук М. А.
Компьютерная верстка: Ковальчук Е. Н.

Подписано в печать 29.12.2023 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага «Performer».
Гарнитура «Arial». Усл. печ. л. 4,42. Уч. изд. л. 4,75. Заказ № 1392. Тираж 22 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/235 от 24.03.2014 г.