ванием нейронной сети прямого распространения. Задача решалась на компьютере с многоядерным процессором и видеокартой.

По результатам экспериментов можно сделать предположение, что выявленное соотношение по снижению вычислительных затрат (на гетерогенных устройствах) сохранится и при пропорциональном увеличении вычислительных мощностей процессора и видеокарты. Поэтому описанные в работе идеи могут оказаться полезными при обработке больших объемов данных на гетерогенных кластерных вычислителях, которые активно развиваются в настоящее время.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Чубукова, И. А. Data mining : учеб. пособие / И. А. Чубукова. – Москва : БИНОМ. Лаб. знаний, 2006. – 382с.
2. Воеводин, В. В. Параллельные вычисления [Текст]: книга / В. В. Воеводин – Питер: БХВ Петербург, 2004. – 608 с.
3. Gregory, R. Andrews Foundations of multithreaded, parallel and distributed programming [Text]: book – 688 p.
4. Ciegis, R. Parallel Scientific Computing and Optimization [Text]: book / R. Ciegis, D. Henti, B. Kagstrom, J. Zilinskas – New York : Springer-Verlag, 2009. – 274 p.
5. Storti, D. CUDA for Engineers: An Introduction to High-Performance Parallel Computing (1st Edition) [Text]: book / D. Storti, M. Yurtoglu – Addison-Wesley Professional, 2015. – 352 p.
6. Hamdy, A. Taha Operations Research: An Introduction (9th Edition) [Text]: book / A. Taha Hamdy – Pearson, 2010. – 832 p.
7. McCool, M. Structured Parallel Programming: Patterns for Efficient Computation (1st Edition) [Text]: book / M. McCool, Arch D. Robison, James Reinders – Morgan Kaufmann, 2012. – 432 p.
8. STL-10 dataset [Электронный ресурс]. – Режим доступа : academictorrents.com/details/a799a2845ac29a66c07cf74e2a2838b6c5698a6a – Дата доступа : 25.02.2018.
9. STL-10 dataset description [Электронный ресурс]. – Режим доступа : stanford.edu/~acoates//stl10/ – Дата доступа : 24.02.2018.
10. CUDA toolkit [Электронный ресурс]: – Режим доступа : developer.nvidia.com/cuda-downloads – Дата доступа : 23.02.2018.

Материал поступил в редакцию 02.02.2019

KRASNOPROSHIN V. V., MATSKEVICH V. V. Algorithm for Fast Image Compression on Heterogeneous Computing Devices

The paper deals with the problem of organizing efficient data processing on heterogeneous computing devices. A possible approach to solving the problem using the data parallelization technology is proposed. It is shown that, in the general case, the problem is a non-trivial mathematical problem. For one of the special cases, a solution algorithm is proposed. The effectiveness of the approach is demonstrated by the example of solving the problem of compressing color images using a direct distribution neural network.

The ideas described in the paper may be useful in processing large amounts of data on heterogeneous clusters.

УДК 519.95

Волчкова Г. П., Котов В. М.

ЗАДАЧА $\mathbf{Qm} \,\|\, \mathbf{C}_{\max}$ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА КОЛИЧЕСТВО РАБОТ, ВЫПОЛНЯЮЩИХСЯ НА КАЖДОМ ПРИБОРЕ

Одной из классических задач теории расписаний является задача $\mathbf{P} \mid \mathbf{m} \mid \mathbf{C}_{\max}$, которая состоит в распределении n независимых работ на m идентичных параллельных приборов. Каждая работа имеет определенное время выполнения и может быть выполнена на любом из m приборов. При этом требуется так распределить работы на приборы, чтобы время завершения выполнения последней работы было минимальным. Эта проблема NP-трудна уже в случае $\mathbf{P} \mid \mathbf{2} \mid \mathbf{C}_{\max}$ [1].

В [2] рассмотрена эта задача в следующей интерпретации. Предполагается, что на одном приборе может выполняться k работ, так как каждый прибор имеет k единиц специфического ресурса, и каждая работа требует единицу этого ресурса.

Показано, что эта задача может быть сформулирована как задача k-разбиения. В таком случае работы $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ идентифицируются с предметами, а процессоры с подмножествами $\{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$. Тогда решение задачи теории расписаний соответствует разбиению предметов на подмножества. В [2] показано, что если C^* и $C^*\|$ – значения оптимальных решений для задачи k-разбиения и задачи $\mathbf{P} \mid \mathbf{m} \mid \mathbf{C}_{\max}$ соответственно, то $\dfrac{C^*}{C^*\|} < 2 - \frac{1}{m}$. Предложены приближенные алгоритмы, решающие задачу k-разбиения.

В данной работе рассматривается задача с ограничениями на множестве параллельных приборов различной производительности $\mathbf{Q} \mid \mathbf{m} \mid \mathbf{C}_{\max}$, которая формулируется следующим образом.

Задано множество $N=\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ из n-независимых работ, где работа i_j имеет время обработки p_j. Работы выполняются на множестве $M=\{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$ из m приборов с различными скоростями s_j, $j = 1,\ldots,m$, при этом время выполнения i-й работы на j-м приборе определим как $t_{ij} = p_i / s_j$.

Дополнительным ограничением является то, что на каждом приборе выполняется не более k ($k \le n$) работ.

Обозначим через Z_j загрузку на j-м приборе:

$$Z_j = \sum_{i=1}^{k_j} p_i \Big/ s_j, \quad j = 1,\ldots,m.$$

Нижнюю границу значения оптимального решения можно оценить следующим образом:

$$LB = \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i \Big/ \sum_{j=1}^{m} s_j , \; p_1/s_1, \; \min\left\{ (p_1+p_2)/s_1, \; p_2/s_2 \right\} \right\}. \quad (1)$$

Предлагаемый алгоритм A_1 основывается на идеях редуцирования задачи [3] и динамического пересчета нижних оценок оптимального решения [4, 5].

Волчкова Галина Петровна, *ст. преподаватель кафедры дискретной математики и алгоритмики ФПМИ Белорусского государственного универистета, e-mail: Volchkovagp@mail.ru.*

Котов Владимир Михайлович, *заведующий кафедрой дискретной математики и алгоритмики ФПМИ Белорусского государственного униврристета, e-mail: kotovvm@bsu.by.*

Республика Беларусь, 220050, г. Минск, пр. Независимости, 4.

Для описания алгоритма A_1 нам потребуются следующие обозначения и процедуры.

Пусть k_j – количество работ, назначенных на прибор j к данному моменту времени. Обозначим через $N_F\left(J_F\right)$ – множество фиксированных работ (приборов), таких, которые в дальнейшем не участвуют в построении расписания. Обозначим через $N_s(J_s)$ множество свободных (нефиксированных) работ (приборов). Считаем, что в начальный момент времени $\left|N_s\right| = n$, $\left|J_s\right| = m$.

Отсортируем работы в порядке не возрастания времен выполнения $p_1 \ge p_2 \ge \ldots \ge p_n$, и приборы в порядке не возрастания скоростей $s_1 \ge s_2 \ge \ldots \ge s_m$.

Процедура $P_0(j,i)$

Пока $j \le m$; $k_j < k$; $p_i / s_j \le LB$; $i \le n$ выполняем следующие действия:

Если $Z_j + p_i / s_j \le LB$ и $k_j < k$, то полагаем $Z_j = Z_j + p_i / s_j$, $k_j = k_j + 1$.

Иначе $j = j + 1$.

Параметрами процедуры являются i – номер работы, j – номер прибора. Процедура $P_0(j,i)$ закончит работу, когда при загрузке очередной работы $i = i_0$ оказалось, что существует прибор $j = j_0$, для которого $k_{j_0} = k$ либо $p_{i_0} / s_{j_0} > LB$, либо $j_0 > m$. Таким образом, будем считать, что выходными данными процедуры будут номер прибора j_0 и номер работы i_0.

Алгоритм A_1 начинает свою работу с выполнения процедуры при $j = 1$, $i = 1$, $Z_j = 0$, $k_j = 0$, $N_F = \varnothing$, $J_F = \varnothing$, $N_s = N$, $J_s = M$.

После завершения процедуры возможны следующие ситуации:

Ситуация 1. На прибор j_0 загружено k работ.

Лемма 1. В Ситуации 1 приборы $1,2,\ldots,j_0$ можно редуцировать.

Доказательство. Если $j_0 = 1$, то на первый прибор будут загружены работы с самыми большими временами выполнения. В этом случае редуцирование корректно.

Пусть $j_0 > 1$. Нетрудно заметить, что любое количество работ $\hat{k} < k$ с индексом $i > i_0$ может быть загружено на любой из приборов, при этом загрузка любого прибора не превышает $2LB$. Действительно, на прибор j_0 загружено k работ, причем это работы с индексами не больше i_0. Поэтому для любых k работ с индексами больше i_0 их суммарное время выполнения не превосходит суммарного времени выполнения работ на приборе j_0.

В силу упорядоченности производительности приборов время выполнения любых k работ на любом из приборов $1,2,\ldots,j_0 - 1$ не превосходит их времени выполнения на приборе j_0. Таким образом, мы можем назначить нужное количество работ $k + k_1$, начиная с работы $i_0 + 1$ на прибор 1, при этом загрузка прибора 1 не будет превышать $2LB$.

Аналогичные рассуждения справедливы для приборов $2,\ldots,j_0 - 1$. Это значит, что на приборы $1,2,\ldots,j_0$ будет назначено k работ, причем загрузка любого из этих приборов не будет превышать $2LB$. $\otimes$

Следствие 1. Если $\sum_{i=1}^{k \cdot j_0} p_i \Big/ \sum_{j=1}^{j_0} s_j < LB$, то нижняя граница может быть уточнена следующим образом: $\overline{LB} \ge \sum_{i=k \cdot j_0+1}^{n} p_i \Big/ \sum_{j=j_0+1}^{m} s_j$.

Ситуация 2. $j_0 > m$.

Это значит, что на любом приборе выполняется хотя бы одна работа и очередная работа i_0 не может быть назначена на прибор с номером m, т. е. $Z_m + p_{i_0} / s_m$. В этом случае выполняем Процедуру $P_1(j,i)$ при начальном значении $j = 1$, $i = i_0$.

Процедура $P_1(j,i)$

Пока $k_j < k$ и $i \le n$ выполняем следующие действия:

Если $Z_j \le LB$ и $k_j < k$, то работа i назначается на прибор j и полагается $i = i + 1$; иначе $j = j + 1$.

Процедура заканчивает работу, когда на очередной прибор назначено k работ или все работы из списка работ назначены.

Лемма 2. В Ситуации 2 при завершении процедуры $P_1(j,i)$ существует прибор j_2, для которого $k_{j_2} = k$.

Доказательство. В противном случае на всех приборах $Z_j > LB$. $\otimes$

Возможны две ситуации:

Ситуация 2.1. $Z_{j_2} \ge LB$.

Прибор j_2 и все назначенные на него работы считаем фиксированными (удаляем их из рассмотрения) и продолжаем $P_1(j,i)$ при начальном значении $j = j_2 + 1$, $i = i_0 + 1$.

Ситуация 2.2. $Z_{j_2} < LB$.

Процедура $P_2(j,i)$

Удаляем последнюю работу, назначенную на прибор j, и назначаем на ее место первую работу, назначенную на прибор $j + 1$.

Очевидно, что $LB < Z_j' \le 2LB$. После этого считаем прибор и все назначенные на него работы фиксированными, перенумеровываем все оставшиеся работы и приборы и выполняем процедуру $P_0(j,i)$ при начальном значении $j = 1$, $i = 1$.

Ситуация 3. На прибор с наименьшим номером j_0, не назначена ни одна работа, т. е. $k_{j_0} = 0$.

В таком случае, проверяем, можно ли пересчитать оценку. Для определения такой возможности рассматриваем работы из множества N_{j_0}, у которых $p_i / s_{j_0} > LB, i = i_0,\ldots,k_1$.

Определяем новую оценку пор формуле

$$LB_{j_0} = \min\left(\min_{k=i_0,\dots,k_1} \left\{ \frac{p_k}{s_{j_1}}, \sum_{l=1}^{k-1} p_l \Big/ \sum_{j=1}^{j_1-1} s_j \right\} \right). \quad (2)$$

Идея пересчета оценки состоит в том, что рассматриваются все возможные варианты, при которых либо работа i_k, $k = i_0,\dots,k_1$ будет назначена на прибор j_0, либо она будет назначена на один из предыдущих приборов $1,\dots,j_0-1$.

Если $LB_{j_0} > LB$, то полагаем $LB = LB_{j_0}$ и выполняем процедуру $P_0(j,i)$ при начальном значении $j=1$, $i=1$.

Пусть $LB_{j_1} \le LB$. Для работ $i = i_0,\cdots,k_1$ из множества N_{j_0} выполняем процедуру $P_1(j,i)$ при начальном значении $j=1$, $i=1$. Отметим, что прибор j такой, что $k_j < k$ и $Z_j \le LB$ обязательно существует, иначе можно было бы пересчитать оценку.

Если в процессе назначения появился прибор j_2, на который назначено k работ, то возможны три ситуации:

Ситуация 3.1. $Z_{j_2} \ge LB$.

Фиксируем прибор и все работы, выполняющиеся на нем. Перенумеровываем все оставшиеся работы и приборы и выполняем процедуру $P_0(j,i)$ при начальном значении $j=1$, $i=1$.

Ситуация 3.2. $Z_{j_2} < LB$.

Ситуация 3.2.1. Пусть $j_2 = j_0 - 1$.

Лемма 3. Если в Ситуации 3 выполняется неравенство $Z_{j_2} < LB$, то для любого прибора $j < j_2$ при назначении на него $k - k_j$ очередных работ его загрузка будет не больше $2LB$.

Доказательство. Пусть на первом этапе на прибор j было загружено k_j работ, а на втором этапе на него назначено $\bar{k}_j$ работ. При этом время выполнения каждой из работ, назначенных на втором этапе, не превосходит времени выполнения каждой из работ, назначенных на первом этапе. Для прибора j его загрузка при назначении первых $k - k_j - \bar{k}_j$ работ не превосходит LB. Поэтому суммарное время выполнения последней назначенной работы на прибор j и оставшихся $k - k_j - \bar{k}_j$ очередных работ не превосходит суммарного времени выполнения работ, назначенных на прибор j_2. Таким образом, суммарная загрузка прибора j может быть оценена следующим образом

$Z_j \le Z_j(\left|k_j\right| - \left|\bar{k}_j\right| - 1) + Z_{j_2} \le 2LB$, где $Z_j(\left|k_j\right| - \left|\bar{k}_j\right| - 1)$ – загрузка при выполнении $k_j - \bar{k}_j - 1$ очередных работ. $\otimes$

Следствие 2. На приборы $1,\dots,j_0-1$ были назначены работы с самыми большими временами выполнения, поэтому все эти приборы и работы, назначенные на них, можно исключить из рассмотрения (перевести во множество фиксированных).

Замечание. Нижнюю оценку можно уточнить по формуле (1) для оставшихся работ и приборов. Для этого перенумеруем оставшиеся работы и приборы и выполним процедуру $P_0(j,i)$ при начальном значении $j=1$, $i=1$.

Ситуация 3.2.2. Пусть $j_2 < j_0 - 1$.

Применяем процедуру $P_2(j,i)$ при $j = j_2$, $i=1$. В таком случае, новая загрузка прибора j_2 будет не меньше LB и не больше $2LB$. Вычеркиваем прибор и работы, выполнявшиеся на нем, из рассмотрения, т. е. переводим их во множества фиксированных. Перенумеровываем оставшиеся работы и приборы и выполняем процедуру $P_0(j,i)$ при начальном значении $j=1$, $i=1$.

Ситуация 3.3. Работы из множества работ N_{j_0} закончились, но ни на одном из приборов $j = 1,\dots,j_0$ не выполняется k работ. Выполняем процедуру $P_0(j,i)$ с начальным значением, равным наименьшему номеру прибора j, у которого $Z_0 < LBj_0$, $i = k_1 + 1$. При этом может возникнуть одна из ситуаций: 1, 2 или 3.

Теорема. Предложенный алгоритм имеет гарантированную оценку 2.

Доказательство следует из приведенных выше утверждений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Garey, M. R. Computers and Intractability: a Guide to the Theory of NP-completeness / M. R. Garey, D. S. Johnson – San Francisco, 1979.
2. Котов, В. М. Алгоритмы для задач разбиения и упаковки. – Минск: БГУ, 2001. – 97 с.
3. Kellerer, H. An approximation algorithm with absolute worst-case performance ratio 2 for two-dimensional vector packing / H.Kellerer, V. Kotov // Operations Research Letters. – 2003. – Vol. 31(1). – P. 35–41.
4. Kellerer, H. A 3/2-approximation algorithm for k i –partitioning / H. Kellerer, V. Kotov // Operation Research Letters. – 2011. – Vol. 39, № 5. – P. 359–362.
5. Cheng, T.C.E. Algorithms better than LPT for semi-online scheduling with decreasing processing times / T.C.E. Cheng, H. Kellerer, V. Kotov // Operations Research Letters. – 2012. – Vol. 40 (5). – P. 349–352.

Материал поступил в редакцию 15.02.2019

VOLCHKOVA G. P., KOTOV V. M. Task $\mathbf{Qm} \,||\, \mathbf{C}_{\max}$ ***with restrictions for the number of the works which are carried out on each device***

We consider cardinality constrained uniform machine scheduling problem $\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{m} \,|\, \mathbf{C}_{\max}$ and proposed an approximation algorithm with worst case bound 2.

УДК 004.94

Таранчук В. Б.

МЕТОДЫ И ИНСТРУМЕНТАРИЙ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ КОМПЬЮТЕРНЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Введение. Построение цифровых геологических, геоэкологических моделей является обязательной составляющей экспертных заключений в ряде сфер деятельности, в частности, при ведении государственного мониторинга состояния окружающей среды, недр,

Таранчук Валерий Борисович, *д. физ.-мат. н., профессор, профессор кафедры компьютерных технологий и систем Белорусского государственного университета.*
Республика Беларусь, 220050, г. Минск, пр. Независимости, 4.