Министерство Образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

Элементы операционного исчисления

Методические рекомендации и варианты контрольной работы по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Брест, 2004

УДК 517.445 (07)

В настоящей методической разработке приведены вопросы программы, варианты контрольной работы и решение типового варианта по разделу «Элементы операционного исчисления».

Составитель: И.В. Лизунова, доцент

Рецензент
Зав. кафедрой математического моделирования БрГУ им. А.С. Пушкина, к.ф.-м.н., доцент **Тузик С.А.**

СОДЕРЖАНИЕ

ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В контрольную работу по теме «Элементы операционного исчисления» включено три задания.

В нумерации задач первое число – номер задания (задачи), вторая (после точки) – номер варианта.

Контрольная работа должна выполняться студентом в соответствии со своим вариантом. Номер варианта определяется двумя последними цифрами номера зачетной книжки.

Условия задач необходимо записывать полностью. В случае, если задача имеет общую формулировку, её условие следует переписать, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта. Решение всех задач проводить подробно и аккуратно, давать достаточные пояснения и делать необходимые рисунки и таблицы.

ВОПРОСЫ ПРОГРАММЫ КУРСА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Тема. Элементы операционного исчисления.

Преобразование Лапласа.

Оригинал и изображение. Классы оригиналов и изображений. Линейность преобразования. Теоремы подобия и запаздывания.

Свойства преобразования Лапласа.

Изображение свертки оригиналов. Дифференцирование и интегрирования оригиналов и изображений. Графическое задание оригиналов. Оригиналы от рациональных функций.

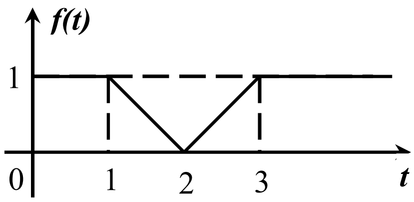
Приложения операционного исчисления.

Решение дифференциальных уравнений и систем операционным методом.

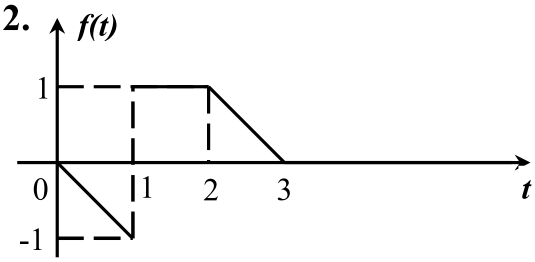
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ»

Задание 1. По данному графику оригинала $f(t)$ найти изображение.

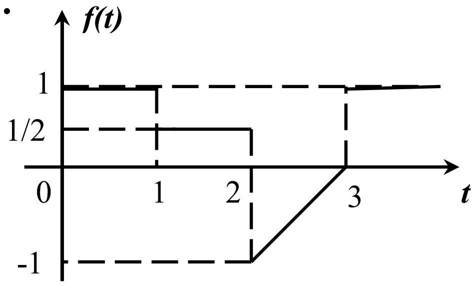
1.



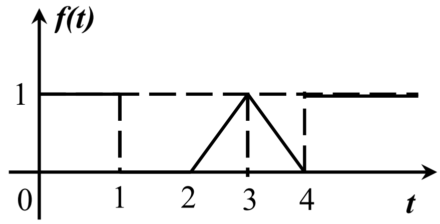
2.



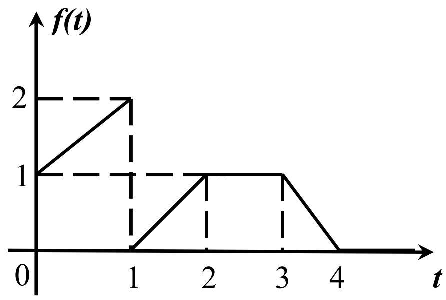
3.



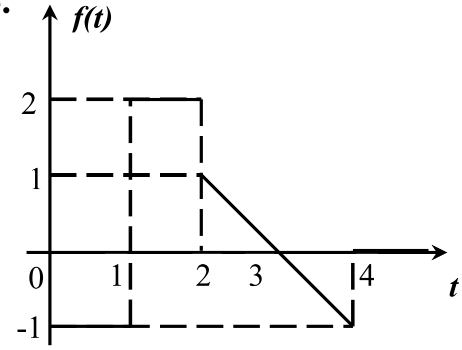
4.



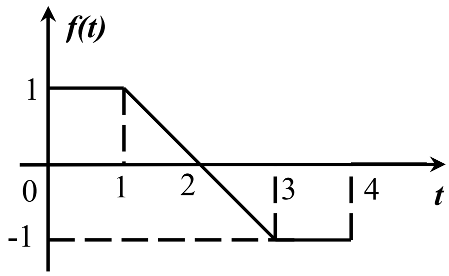
5.



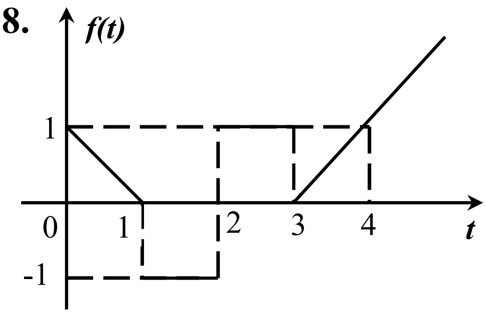
6.



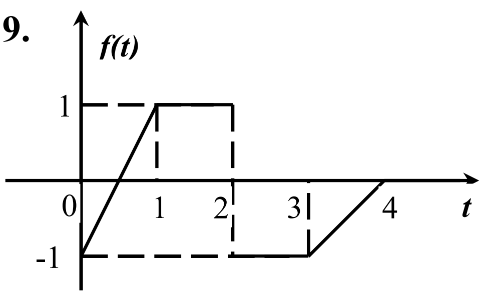
7.



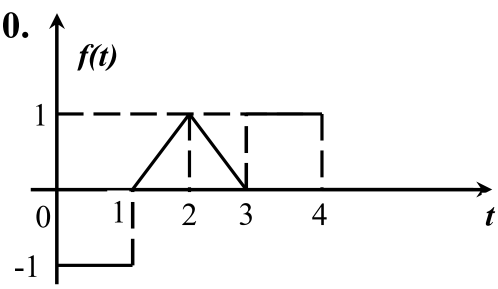
8.



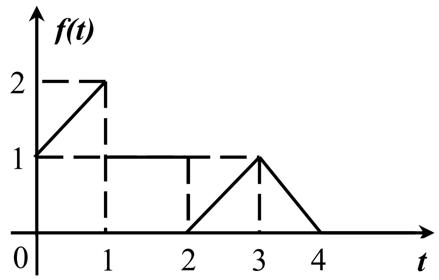
9.



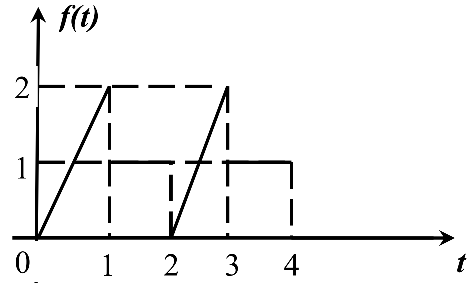
10.



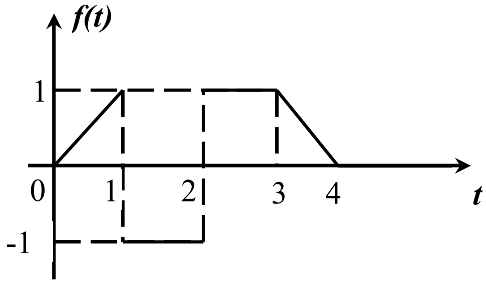
11.



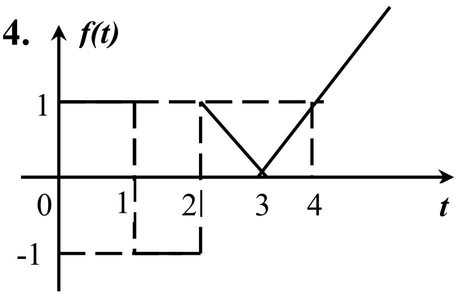
12.



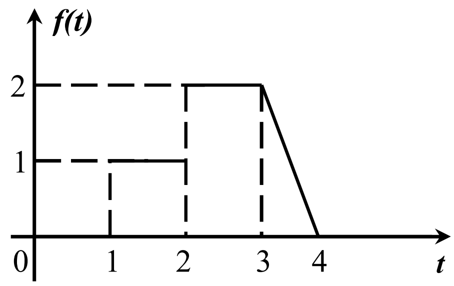
13



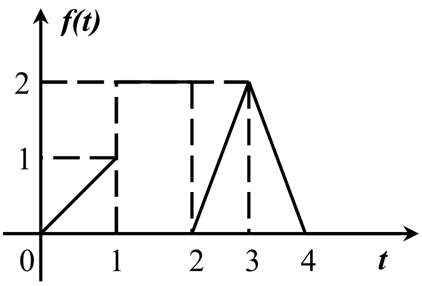
14.



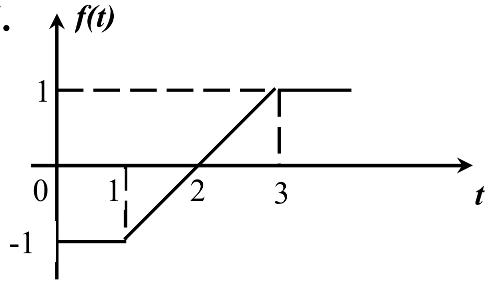
15.



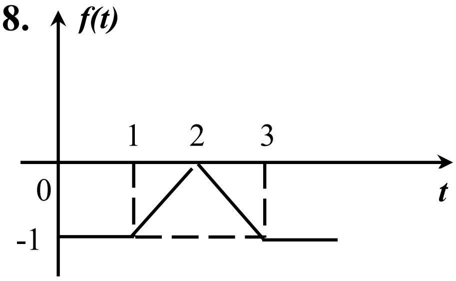
16.



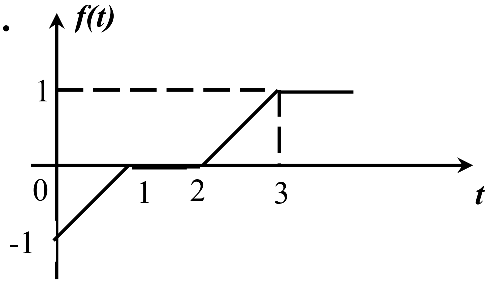
17.



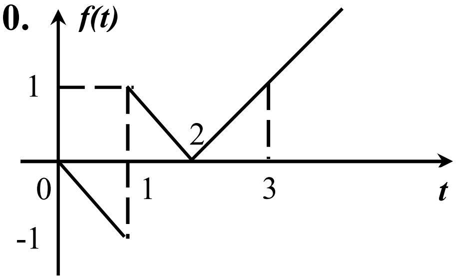
18.



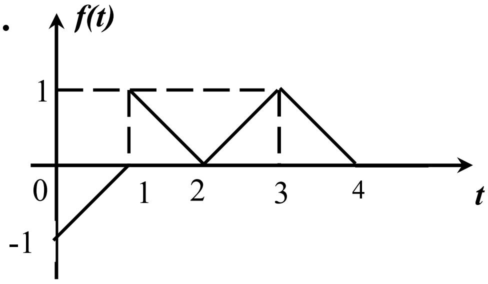
19.



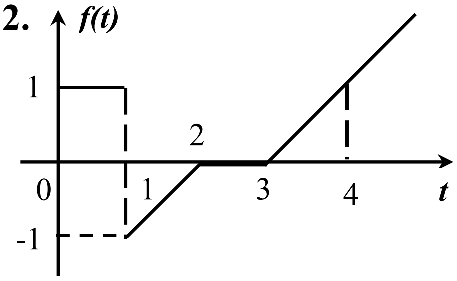
20.



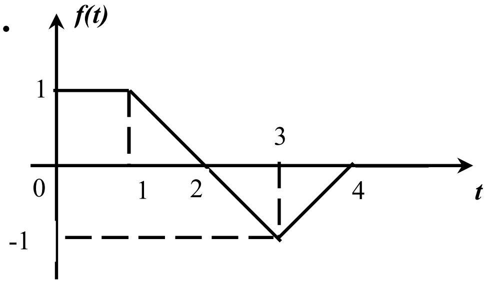
21.



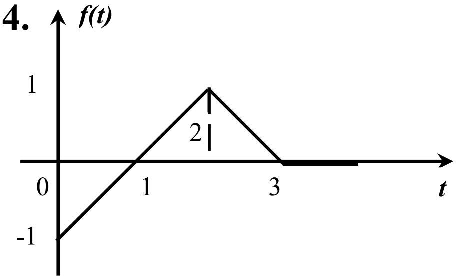
22.



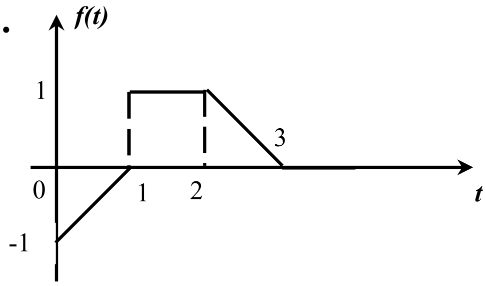
23.



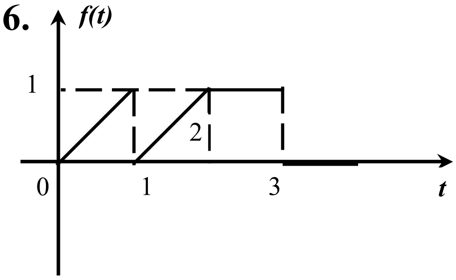
24.



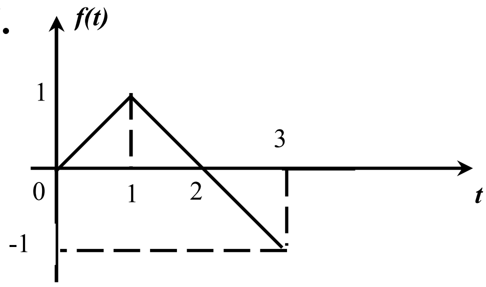
25.



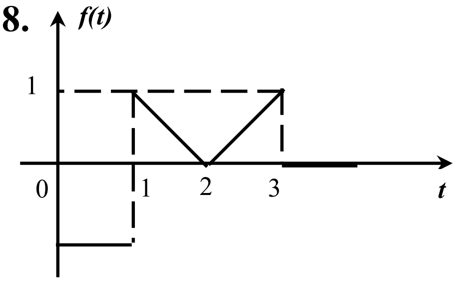
26.



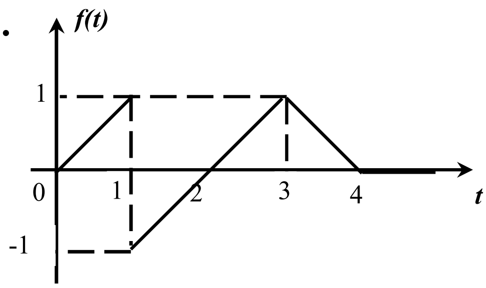
27.



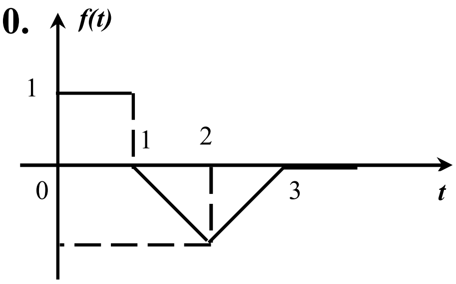
28.



29.



30.



Задание 2. Операционным методом решить задачу Коши.

1.	$y'' + y' + y = 7e^{2t}$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 4$.
2.	$y'' + y' - 2y = -2(t+1)$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 1$.
3.	$y'' + 4y' + 29y = e^{-2t}$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 1$.
4.	$2y'' + 5y' = 29\cos t$,	$y(0) = -1$,	$y'(0) = 0$.
5.	$y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t}\cos 3t$,	$y(0) = 5$,	$y'(0) = 1$.
6.	$y'' + y' - 2y = e^{-t}$,	$y(0) = -1$,	$y'(0) = 0$.
7.	$y'' - 3y' + 2y = 2e^{t}\cos t/2$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 0$.
8.	$y'' + y' + y = t^2 + t$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = -3$.
9.	$y'' + 4y = \sin 2t$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 1$.
10.	$y'' - 9y = \sin t - \cos t$,	$y(0) = -3$,	$y'(0) = 2$.
11.	$y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$,	$y(0) = 2$,	$y'(0) = 6$.
12.	$y'' + 3y' - 10y = 47\cos 3t - \sin 3t$,	$y(0) = 3$,	$y'(0) = -1$.
13.	$y'' - 2y' = e^{t}(t^2 + t - 3)$,	$y(0) = 2$,	$y'(0) = 2$.
14.	$y'' + 4y = 8\sin 2t$,	$y(0) = 3$,	$y'(0) = -1$.
15.	$y'' + y = sh\, t$,	$y(0) = 2$,	$y'(0) = 1$.
16.	$y'' + y' - 2y = e^{t}$,	$y(0) = -1$,	$y'(0) = 0$.
17.	$y'' + y = 6e^{-t}$,	$y(0) = 3$,	$y'(0) = 1$.
18.	$y'' - y' = t^2$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 1$.
19.	$y'' + y' = t^2 + 2t$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = -2$.
20.	$y'' - y' = \cos 3t$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 1$.
21.	$y'' + 2y' = 2 + e^{t}$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 2$.
22.	$2y'' - y' = \sin 3t$,	$y(0) = 2$,	$y'(0) = 1$.
23.	$y'' + 2y' = \sin t/2$,	$y(0) = -2$,	$y'(0) = 4$.
24.	$y'' - 3y' + 2y = e^{t}$,	$y(0) = -1$,	$y'(0) = 0$.
25.	$y'' + 3y' + y = 3e^{t}$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = -1$.
26.	$y'' - 2y' - 3y = 2t$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 1$.
27.	$y'' - y' - 6y = 2$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 0$.
28.	$y'' + 4y = 4e^{2t} + 4t^2$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 2$.
29.	$y'' + 4y' + 4y = t^3 e^{2t}$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 2$.
30.	$y'' + 4y = 3\sin t + 10\cos 3t$,	$y(0) = -2$,	$y'(0) = 3$.

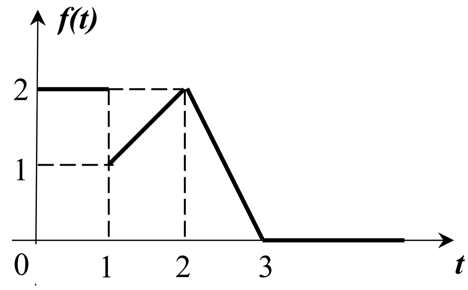
Задание 3. Решить систему линейных дифференциальных уравнений.

1.	$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 1, \\ \dot{y} = x + y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ \ y(0) = 2.$	2.	$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 1, \\ \dot{y} = 4x - y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 1.$
3.	$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x - y + 1, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ \ y(0) = 2.$	4.	$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = 2x - y + 9, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ \ y(0) = 0.$
5.	$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ \ y(0) = 1.$	6.	$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 1, \\ \dot{y} = x + 2y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 2.$
7.	$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -5x - 3y + 2, \end{cases}$ $x(0) = 2,\ \ y(0) = 0.$	8.	$\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 2.$
9.	$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 2, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 1.$	10.	$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 1, \\ \dot{y} = 4x - 2y, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ \ y(0) = 0.$
11.	$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 5.$	12.	$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y, \\ \dot{y} = -4x, \end{cases}$ $x(0) = 3,\ \ y(0) = 1.$
13.	$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -\dfrac{3}{2}x + y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ \ y(0) = 0.$	14.	$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y + 2, \\ \dot{y} = 3x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 2.$
15.	$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = \dfrac{5}{2}x - y + 2, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 1.$	16.	$\begin{cases} \dot{x} = 2y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ \ y(0) = 0.$

17.	$\begin{cases}\dot{x}=2x+8y+1,\\ \dot{y}=3x+4y,\end{cases}$ $x(0)=2,\ \ y(0)=1.$	18.	$\begin{cases}\dot{x}=2x+2y+2,\\ \dot{y}=4y+1,\end{cases}$ $x(0)=0,\ \ y(0)=1.$
19.	$\begin{cases}\dot{x}=x+y,\\ \dot{y}=4x+y+1,\end{cases}$ $x(0)=1,\ \ y(0)=0.$	20.	$\begin{cases}\dot{x}=x-2y+1,\\ \dot{y}=-3x,\end{cases}$ $x(0)=0,\ \ y(0)=1.$
21.	$\begin{cases}\dot{x}=3y+2,\\ \dot{y}=x+2y,\end{cases}$ $x(0)=-1,\ \ y(0)=1.$	22.	$\begin{cases}\dot{x}=x+4y+1,\\ \dot{y}=2x+3y,\end{cases}$ $x(0)=0,\ \ y(0)=1.$
23.	$\begin{cases}\dot{x}=2y,\\ \dot{y}=2x+3y+1,\end{cases}$ $x(0)=2,\ \ y(0)=1.$	24.	$\begin{cases}\dot{x}=-2x+y+2,\\ \dot{y}=3x,\end{cases}$ $x(0)=1,\ \ y(0)=0.$
25.	$\begin{cases}\dot{x}=4x+3,\\ \dot{y}=x+2y,\end{cases}$ $x(0)=-1,\ \ y(0)=0.$	26.	$\begin{cases}\dot{x}=y+3,\\ \dot{y}=x+2,\end{cases}$ $x(0)=1,\ \ y(0)=0.$
27.	$\begin{cases}\dot{x}=x+3y+3,\\ \dot{y}=x-y+1,\end{cases}$ $x(0)=0,\ \ y(0)=1.$	28.	$\begin{cases}\dot{x}=-x+3y+2,\\ \dot{y}=x+y+1,\end{cases}$ $x(0)=0,\ \ y(0)=1.$
29.	$\begin{cases}\dot{x}=3y,\\ \dot{y}=3x+1,\end{cases}$ $x(0)=2,\ \ y(0)=0.$	30.	$\begin{cases}\dot{x}=x+3y,\\ \dot{y}=x-y,\end{cases}$ $x(0)=1,\ \ y(0)=0.$

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ»

Задание 1. По данному графику оригинала $f(x)$ найти изображение.



Решение. Запишем оригинал единым аналитическим выражением:

$$f(t)=\begin{cases}0, & \textit{если} \quad t<0,\\ 2, & \textit{если} \quad 0\le t<1,\\ t, & \textit{если} \quad 1\le t<2,\\ 6-2t, & \textit{если} \quad 2\le t\le 3,\\ 0, & \textit{если} \quad t>3.\end{cases}$$

В момент времени $t=0$ «включается» функция $f(t)=2$, которая при $t=1$ снимается и включается функция $f(t)=t$, которая снимается при $t=2$ и включается функция $f(t)=6-2t$, она снимается при $t=3$.

Запишем функцию $f(t)$ с помощью сдвига $\eta(t-\tau)$.

$$f(t)=2\eta(t)-2\eta(t-1)+t\eta(t-1)-t\eta(t-2)+(6-2t)\eta(t-2)-(6-2t)\eta(t-3)=$$

$$=\varphi_1(t)\eta(t)+\varphi_2(t-1)\eta(t-1)+\varphi_3(t-2)\eta(t-2)+\varphi_4(t-3)\eta(t-3)=$$

$$=2\cdot\eta(t)+(t-1-1)\eta(t-1)-3(t-2)\eta(t-2)+2(t-3)\eta(t-3).$$

$\varphi_1(t)=2;$ $\qquad\varphi_2(t)=t-1;$ $\qquad\varphi_3(t)=-3t;$ $\qquad\varphi_4(t)=2t.$

$$F(p)=\frac{2}{p}+\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}\right)e^{-p}-\frac{3}{p^2}e^{-2p}+\frac{2}{p^2}e^{-3p}.$$

Ответ. $F(p)=\frac{2}{p}+\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}\right)e^{-p}-\frac{3}{p^2}e^{-2p}+\frac{2}{p^2}e^{-3p}.$

Задание 2. Операционным методом решить задачу Коши для дифференциального уравнения:

$$y'' + 2y' + 5y = \sin t,\;\; y(0) = 1,\;\; y'(0) = 2.$$

Решение. Переходим от оригиналов к изображениям

$$y(t) \risingdotseq Y(p),$$

$$y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p) - 1,$$

$$y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - p - 2,$$

$$\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Операторное уравнение примет вид

$$p^2Y(p) - p - 2 + 2pY(p) - 2 + 5Y(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

или

$$Y(p)\left(p^2 + 2p + 5\right) = p + 4 + \frac{1}{p^2 + 1},$$

откуда находим

$$Y(p) = \frac{p + 4}{p^2 + 2p + 5} + \frac{1}{\left(p^2 + 1\right)\left(p^2 + 2p + 5\right)}.$$

Представим последнюю дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{\left(p^2 + 1\right)\left(p^2 + 2p + 5\right)} = \frac{Ap + B}{p^2 + 1} + \frac{Cp + D}{p^2 + 2p + 5},$$

$$1 = (Ap + B)\left(p^2 + 2p + 5\right) + (Cp + D)\left(p^2 + 1\right),$$

$$\begin{aligned}
&p^3: && A + C = 0,\\
&p^2: && 2A + B + D = 0,\\
&p\;\,: && 5A + 2B + C = 0,\\
&p^0: && 5B + D = 1.
\end{aligned}$$

Решая систему, найдем

$$A = -\frac{1}{10},\;\; B = \frac{1}{5},\;\; C = \frac{1}{10},\;\; D = 0.$$

Тогда

$$Y(p)=\frac{p+4}{p^2+2p+5}+\frac{-\frac{1}{10}p+\frac{1}{5}}{p^2+1}+\frac{\frac{1}{10}p}{p^2+2p+5}$$

или

$$Y(p)=\frac{\frac{11}{10}p+4}{p^2+2p+5}+\frac{-\frac{1}{10}p+\frac{1}{5}}{p^2+1}.$$

Перейдем к оригиналам

$$L^{-1}\left(\frac{\frac{11}{10}p+4}{p^2+2p+5}\right)=L^{-1}\left(\frac{11}{10}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+4}+\frac{29}{10\cdot 2}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+4}\right)=$$

$$=\frac{11}{10}e^{-t}\cos 2t+\frac{29}{20}e^{-t}\sin 2t,$$

$$L^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{10}p+\frac{1}{5}}{p^2+1}\right)=L^{-1}\left(-\frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}\right)=-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\sin t.$$

Окончательно,

$$y(t)=e^{-t}\left(\frac{11}{10}\cdot\cos 2t+\quad\frac{29}{20}\cdot\sin t\right)-\frac{1}{10}\cdot\cos t+\frac{1}{5}\cdot\sin t.$$

Ответ. $y(t)=e^{-t}\left(\frac{11}{10}\cdot\cos 2t+\quad\frac{29}{20}\cdot\sin t\right)-\frac{1}{10}\cdot\cos t+\frac{1}{5}\cdot\sin t.$

Задание 3. Решить систему линейных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y + 1, \end{cases}$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 5.$$

Решение. Переходя в каждом уравнении системы к изображениям, получим:

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) + 2Y(p), \\ pY(p) - 5 = 2X(p) + Y(p) + \dfrac{1}{p}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - 2Y(p) = 0, \\ -2X(p) + (p-1)Y(p) = \dfrac{1}{p} + 5. \end{cases}$$

Решив систему, найдем

$$X(p) = \frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p} - 2\frac{1}{p+1} + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{p-3},$$

$$Y(p) = \frac{5p^2 - 4p - 1}{p(p+1)(p-3)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p} + 2\frac{1}{p+1} + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{p-3},$$

а затем

$$x(t) = L^{-1}\left(X(p)\right) = L^{-1}\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p} - 2\frac{1}{p+1} + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{p-3}\right) = -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t},$$

$$y(t) = L^{-1}\left(Y(t)\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p} + 2\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{p-3}\right) = \frac{1}{3} + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}.$$

Таким образом, решением системы является пара функций:

$$x(t) = -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t},$$

$$y(t) = \frac{1}{3} + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}.$$

Ответ. $\begin{cases} x(t) = -\dfrac{2}{3} - 2e^{-t} + \dfrac{8}{3}e^{3t}, \\ y(t) = \dfrac{1}{3} + 2e^{-t} + \dfrac{8}{3}e^{3t}. \end{cases}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Жевняк Р.М., Карпук А.А. высшая математика, ч. IV –Мн.: Высш. шк., 1987 –240с.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления, ч. II. –М.: Наука., 1970. 576с.

3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. –М.: Наука, 1981, 302с.

4. Гладкий И.И., Сидоревич М.П., Тузик Т.А. Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления: методические указания для студентов технических специальностей. Брест, Изд. БГТУ, -2000. 88с.

Учебное издание

Составители: Лизунова Ирина Владимировна

Элементы операционного исчисления

Методические рекомендации и варианты контрольной работы по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Редактор Т.В. Строкач
Ответственный за выпуск И.В. Лизунова
Технический редактор А.Д. Никитчик
Компьютерный набор И.И. Гладкий

Подписано в печать 3.11.2004 г. Формат 60х84 1/16. Бумага писч. Усл.п.л. 0,93. Уч.изд.л. 1,0. Тираж 150 экз. Заказ № 1087.

Отпечатано на ризографе УО «Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул. Московская,267.