МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика»

Брест 2005

УДК 519.2
ББК 22.17

В настоящей методической разработке рассматриваются задачи и упражнения по основным темам теории вероятностей и математической статистики, которые изучаются студентами инженерно-технических специальностей ВУЗов. Содержатся краткие теоретические сведения и наборы заданий для аудиторных и индивидуальных работ.

Составители: Тузик Т.А., доцент,
Тузик А.И., профессор, к. ф.-м. н.,
Журавель М.Г., ассистент.

Рецензент: доцент кафедры информатики и прикладной математики БрГУ им. А.С. Пушкина, к. ф.-м. н. Мирская Е.И.

СОДЕРЖАНИЕ

I. Случайные события

1.1. Элементы комбинаторики (размещения, перестановки, сочетания)

Раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных элементов (объектов), называется *комбинаторикой.*

Большинство задач комбинаторики решается с помощью двух общих правил: правила суммы и правила произведения.

<u>*Правило суммы:*</u>

Если некоторый объект *A* можно выбрать *m* способами, а объект *B* – *k* способами (не такими, как *A*), то объект «или *A*, или *B*» можно выбрать *m*+ *k* способами.

<u>*Правило произведения:*</u>

Если объект *A* можно выбрать *m* способами, а после каждого такого выбора другой объект *B* можно выбрать (независимо от выбора объекта *A*) *k* способами, то объект « *A* и *B*» можно выбрать $m \cdot k$ способами.

Пусть имеем конечное множество каких-то элементов: $a_1, a_2, ..., a_n$.

Определение 1. *Размещениями из n элементов по m* $(m < n)$ *называются подмножества, каждое из которых содержит m элементов из данных n, отличающихся одно от другого или элементами, или их порядком, или же и тем и другим.*

Число размещений из *n* элементов по *m* вычисляют по формуле

$$A_n^m = n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1).$$

Пример 1. Даны три элемента *a, b, c*. Составим размещения из трех элементов по 2 и подсчитаем их число.

Размещения: *ab, ac, ba, bc, ca, cb.*   *n* = 3, *m* =2.

Их число $A_3^2 = 6 = 3 \cdot 2$.

Пример 2. Восемь футбольных команд участвуют в соревнованиях. Разыгрываются золотая, серебряная и бронзовая медали. Сколько существует всевозможных способов распределения медалей?

Решение. Теоретически любая из *n* = 8 команд может получить золотые медали. Когда золотая медаль вручена, то на серебряную претендует $n-1=8-1=7$ команд, а на бронзовую $n-2=8-2=6$ команд.

Так как все медали разыгрываются одновременно, то применим правило произведения и определим общее число способов распределения медалей: $n=8,\ m=3,\quad N = A_8^3 = 8\cdot 7\cdot 6 = 168$.

Определение 2. *Перестановками из n элементов называются размещения из n по n.*

Т.к. все элементы участвуют в перестановках, то перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается P_n и определяется по формуле: $P_n = A_n^n = n(n-1)...1 = n!$.

Пример 3. Выпишем все перестановки из 3-х элементов *a, b, c.* Перестановки: *abc, acb, bac, bca, cab, cba.* Их всего 6 : $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Определение 3. *Сочетаниями из n элементов по m* $(m < n)$ *называются те размещения из n элементов по m, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.*

Число сочетаний $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-1+m)}{m\,!}$.

Свойства сочетаний:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$, если m мало отлично от n, то удобно использовать это свойство.
2. $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$;
3. $C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^n C_n^n = 0$;
4. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$.

Пример 4. Из 10 кандидатов на одну и ту же должность должно быть выбрано 3. Определить число всех возможных результатов выборов.

$$C_{10}^3 = \frac{A_{10}^3}{P_3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120.$$

До сих пор считали, что все элементы множества различны. Пусть некоторые элементы повторяются. Среди n элементов k различных; элементов первого типа n_1, элементов второго типа n_2, ..., элементов k-го типа n_k.

$$n_1 + n_2 + ... + n_k = n.$$

Подсчитаем *число перестановок с повторениями*. При перестановке n элементов всего $n\,!$ размещений, но перестановки элементов одного и того же типа ничего не меняют. Перестановки элементов 1, 2, … , k типов можно делать одновременно независимо друг от друга. Поэтому после $n_1!\, n_2! ... n_k!$ перестановок элементы исходной перестановки не изменятся.

Итак, число перестановок с повторяющимися элементами равно

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \,...\, n_k!}.$$

Пример 5. Сколько различных перестановок можно сделать из букв слова «Миссисипи»?

$$P_9(M_1, И_1, C_3, П_1) = \frac{9!}{1! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 40 \cdot 63 = 2520.$$

Пусть данное множество содержит n элементов, из которых надо образовать *размещения по* m *элементов с повторениями*. Очевидно, что любой элемент (первый, второй, …, m-ый) может быть выбран n способами. По правилу произведений получаем, что число таких размещений будет равно

$$\widetilde{A}_n^m = n^m.$$

Число сочетаний $\widetilde{C}_n^m$ с повторениями из n элементов по m определяется по формуле

$$\widetilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Пример 6. В продажу поступили открытки 10 разных видов. Сколькими способами можно образовать набор из 8 открыток? Из 12 открыток?

Решение. В данном случае имеем дело с сочетаниями с повторениями.

$$\widetilde{C}_{10}^8 = C_{10+8-1}^8 = C_{17}^8 = \frac{17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} = 17\cdot13\cdot11\cdot10 = 24310.$$

$$\widetilde{C}_{10}^{12} = C_{21}^{12} = C_{21}^9 = \frac{21\cdot20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9} = 19\cdot17\cdot5\cdot14\cdot13 = 293930.$$

Задания для аудиторной работы

1. Найти все сочетания и размещения из четырехэлементного множества $\{a, b, c, d\}$ по 2.
2. Студенты некоторого курса изучают 12 дисциплин. В расписание занятий каждый день включается 3 предмета. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий на каждый день? (Ответ: 1320).
3. Сколькими способами можно рассадить 8 человек по 8 вагонам поезда, если в каждый вагон сядет по одному человеку? (Ответ: 40320).
4. Из девяти значащих цифр составляются: а) трехзначные числа; б) четырехзначные числа, цифры в которых не повторяются.
   Сколько таких чисел может быть составлено?
5. Сколькими способами можно из 15 человек составить делегацию в составе 8 человек? (Ответ: 6435).
6. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, 1 ферзя, 1 короля) на первой линии шахматной доски? (Ответ: 5040).
7. Сколькими способами можно выставить на игру футбольную команду, состоящую из трех нападающих, трех полузащитников, четырех

защитников и вратаря, если всего в команде 6 нападающих, 3 полузащитника, 6 защитников и 1 вратарь? (Ответ: 300).

8. Из чисел 1, 2, 3, …, 100 составлены всевозможные парные произведения. Сколько полученных чисел будут кратны трем? (Ответ: 2739).
9. Сколькими способами можно из 9 человек образовать 3 комиссии по 4, по 3 и по 2 человека в каждой? (Ответ: 1260).
10. Из 20 сотрудников лаборатории 5 человек должны уехать в командировку. Сколько может быть составов отъезжающей группы, если заведующий лабораторией и два ведущих инженера одновременно не должны уезжать? (Ответ: 14824).

Задания для индивидуальной работы

I.

1. В шахматном турнире участвовало 14 шахматистов, каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего сыграно партий? (Ответ: 91).
2. Сколькими способами можно смоделировать флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти различных цветов? (Ответ: 60).
3. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «ракета», чтобы все они начинались с буквы «р»? (Ответ: 60).
4. Пять пассажиров садятся в электропоезд, состоящий из 10 вагонов. Каждый пассажир может сесть в любой вагон. Определите число всех возможных вариантов размещения пассажиров в поезде. (Ответ: 100 000).

II.

1. В пассажирском поезде 12 вагонов. Сколькими способами можно размещать вагоны, составляя этот поезд? (Ответ: 479 001 600).
2. Сколькими способами можно распределить 6 различных книг между 3 учениками так, чтобы каждый получил 2 книги? (Ответ: 90).
3. Сколькими различными способами собрание из 40 человек может выбрать председателя собрания, его заместителя и секретаря? (Ответ: 59 280).
4. Бригадир должен отправить на работу звено из 5 человек. Сколько таких звеньев можно составить из 12 человек бригады? (Ответ: 792).

III.

1. При встрече 12 человек обменялись рукопожатиями. Сколько рукопожатий было сделано при этом? (Ответ: 66).
2. Сколько прямых линий можно провести через 8 точек, если известно, что любые три из них не лежат на одной прямой? (Ответ: 28).
3. Сколькими способами можно составить патруль из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера? (Ответ: 246 480).

4. Из группы студентов инженерно-строительного факультета в 16 человек формируются две строительные бригады по 10 и 6 человек. Сколько способов создать эти бригады? (Ответ: 8008).

IV.

1. Автоколонна, состоящая из 30 автомобилей, должна выделить на уборочные работы в колхозы 12 грузовиков. Сколькими способами это можно сделать? (Ответ: 86 493 225).
2. Сколько различных пятизначных чисел можно записать при помощи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (без повторений)? (Ответ: 15 120).
3. На шахматном турнире было сыграно 45 партий, причем каждый из шахматистов сыграл с остальными по одной партии. Сколько шахматистов участвовало в турнире? (Ответ: 10).
4. На книжной полке 8 различных книг. Сколько способов расставить эти книги так, чтобы две определенные книги оказались поставленными рядом? (Ответ: 10080).

1.2. Алгебра событий

Событие – это результат некоторого опыта (выполнения определенного комплекса условий). События обозначают большими буквами латинского алфавита с индексами или без них: $A, B, C,..., A_1, A_2$ и т.д.

Событие называется *достоверным* (U), если оно всегда происходит в условиях данного опыта. *Невозможное* событие ($\bar{V}$) никогда не происходит в результате данного опыта.

Событие называется случайным, если оно может произойти или нет при реализации комплекса условий данного опыта. Элементарные события нельзя разложить на более простые. Множество всех элементарных событий в условиях данного опыта называется *пространством элементарных событий* и обозначается Ω.

Событие «не A» означает ненаступление события A. Оно обозначается $\overline{A}$ и называется *противоположным* к A.

Событие «A и B» означает совместное наступление событий A и B. Оно обозначается $A \cdot B = A \cap B$ и называется их *произведением*.

Событие «A или B» означает наступление или A, или B, или обоих вместе. Обозначается $A + B = A \cup B$ и называется их *суммой*.

Если $A \cdot B = V$, то A и B – несовместные события.

Свойства суммы: $A + A = A,\ A + \Omega = A,\ A + \overline{A} = \Omega,\ A + B = B + A$. $A + (B + C) = (A + B) + C$.

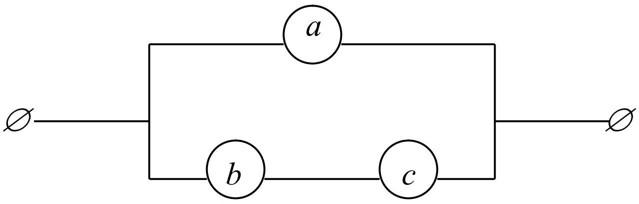
Свойства произведения: $A \cdot A = A,\ A \cdot B = B \cdot A,\ A \cdot \Omega = A,\ A \cdot \overline{A} = V$, $A(B + C) = AB + AC,\ A(BC) = (AB)C$.

События $A_1, A_2,..., A_n$ образуют *полную группу событий*, если:

1. $A_1 + A_2 + ... + A_n = U$ (событие достоверное),
2. $A_i A_j = V$, $i \neq j$ (события попарно несовместные).

Задания для аудиторной работы

1. На плоскость бросается точка. Событие A (B) состоит в попадании в круг A (в круг B). Выясните смысл событий $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, AB, $\overline{AB}$.
2. Докажите, что события $\overline{A}$, $\overline{A}B$, $\overline{A \cup B}$ образуют *полную группу событий.*
3. Пусть *A, B, C* – произвольные события. Найдите выражения для событий, состоящих в том, что из событий A, B и C:
   1. произошло только A;
   2. произошли A и B, а C не произошло;
   3. произошли все 3 события;
   4. произошло хотя бы одно из этих событий;
   5. произошло одно и только одно из этих событий;
   6. произошло не более двух событий.
4. Электрическая цепь составлена по схеме

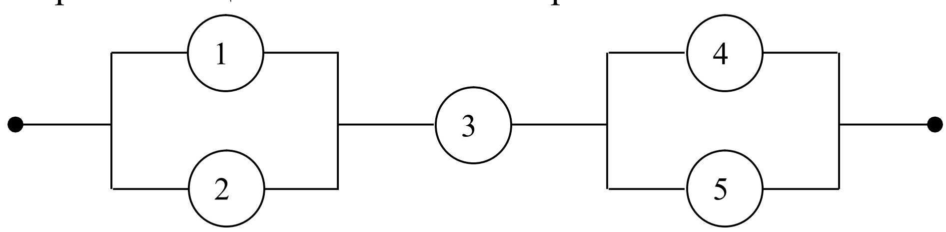


События A, B и C соответственно означают выход из строя элементов a, b и c.

Опишите пространство элементарных событий, события A, B и C; событие D – работа цепи и $\overline{D}$ – разрыв цепи.

Задания для индивидуальной работы

1. Справедливы ли равенства: а) $\overline{A} + \overline{B} = \overline{A + B}$; б) $\overline{A + B + C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$; в) $\overline{A + B + C} = \overline{ABC}$?
2. Пусть A, B и C – произвольные события. Запишите такие события:
   а) произошло по крайней мере два события из трех;
   б) произошли только два события;
   в) не произошло ни одного из данных событий.
3. В электрической цепи пять элементов расположены по схеме



События A_i $(i=\overline{1,5})$ означают работу *i* элемента. Опишите события *B* – цепь работает и $\overline{B}$ - разрыв цепи.

1.3. Классическое и геометрическое определения вероятности случайного события

Пусть $A_1,\ A_2,...,\ A_n$ - полная группа равновозможных элементарных исходов некоторого опыта (испытания).

При некоторых исходах событие *A* наступает, при других – не наступает. Исходы, при которых событие *A* происходит, называется благоприятствующими событию *A*.

Вероятностью случайного события A называется отношение числа *m* элементарных исходов опыта, благоприятствующих событию *A*, к общему числу *n* всех равновозможных исходов опыта.

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Вероятность любого события удовлетворяет неравенству $0\le P(A)\le 1$. Для достоверного события $P(U)=1$, для невозможного $P(V)=0$.

Геометрическая вероятность. Если число элементарных исходов опыта бесконечно и заполняет область *R*, а число исходов, благоприятствующих событию *A*, бесконечно и заполняет область *Q*, то вероятность случайного события *A* определяется по формуле

$$P(A)=\frac{мера\ (Q)}{мера\ (R)},$$

где мера области – это или ее длина, или площадь, или объем.

Пример 1. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что 1) только один раз появится «герб»; 2) ни разу не появится «герб»; 3) хотя бы один раз появится «герб».

Решение. Опыт состоит в двукратном подбрасывании монеты. Опишем пространство элементарных исходов. Будем обозначать выпадение «герба» – *г*, «цифры» – *ц*.

$\Omega=\{гг,\ гц,\ цг,\ цц\}$. Всех исходов $n=4$.

Событие *A* – только один раз появится «герб», ему благоприятствуют 2 исхода, $m=2$.

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Событию *B* – ни разу не появится «герб», благоприятствует один исход, $m=1$, тогда

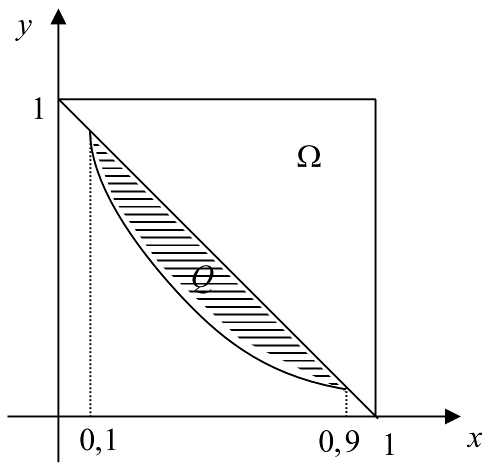
$$P(B)=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

Событию C – хотя бы один раз появится «герб», - благоприятствуют три исхода, $m = 3$.

$$P(C) = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Пример 2. Наугад взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что $x + y \le 1$, а $x\,y \ge 0{,}09$.

Решение. Каждое из чисел x и y может принять бесконечно много значений из условия $0 < x \le 1$ и $0 \le y \le 1$. Воспользуемся геометрической иллюстрацией, получим что Ω - квадрат со стороной, равной 1.



Изобразим благоприятную область Q: $\begin{cases} x + y \le 1, \\ xy \ge 0{,}09. \end{cases}$ Найдем точки пересечения линий $y = 1 - x$, $x(1-x) = 0{,}09$, $x - x^2 - 0{,}09 = 0$, $x^2 - x + 0{,}09 = 0$, $x_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - 0{,}09} = 0{,}5 \pm 0{,}4$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}9$.

Пусть событие A состоит в том, что взятые числа x и y удовлетворяют условиям $x + y \le 1$, $xy \ge 0{,}09$.

Тогда $P(A) = \dfrac{S_Q}{S_\Omega}$; $S_\Omega = 1$,

$$S_Q = \iint\limits_Q dx\,dy = \int\limits_{0{,}1}^{0{,}9} dx \int\limits_{\frac{0{,}09}{x}}^{1-x} dy = \int\limits_{0{,}1}^{0{,}9} \left(1 - x - \frac{0{,}09}{x}\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} - 0{,}09\ln x\right)\Bigg|_{0{,}1}^{0{,}9} = \left(0{,}9 - \frac{0{,}81}{2} - 0{,}09\ln 0{,}9\right) - \left(0{,}1 - \frac{0{,}01}{2} - 0{,}09\ln 0{,}1\right) =$$

$$= 0{,}8 - 0{,}4 - 0{,}09\ln 9 = 0{,}4 - 0{,}09\ln 9 = 0{,}4 - 0{,}1976 = 0{,}2024.$$

Задания для аудиторной работы

1. Куб, все грани которого окрашены, распилили на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешали. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три; г) четыре. (Ответ: а) 0,384; б) 0,096).
2. Из партии втулок, изготовленных токарем за смену, случайным образом для контроля взяты 10 штук. Найти вероятность того, что среди них 2 втулки второго сорта, если во второй партии 25 втулок первого сорта и 5 – второго. (Ответ: 0,3601).
3. На 10 карточках написаны буквы *А*, *А*, *А*, *М*, *М*, *Т*, *Т*, *Е*, *И*, *К*. После их перемешивания вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают в том порядке, каком они вынуты. Найти вероятность того, что получим слово: а) «математика»; б) «кит»; в) «метка». (Ответ: а) 0,000006613; б) 0,0028; в) 0,000397).
4. Наугад взятый телефонный номер состоит из 6 цифр. Найти вероятность того, что в нем все цифры: а) различные; б) нечетные. (Ответ: а) 0,1512; б) 0,0115625).
5. Десять книг на одной полке расставлены наудачу. Определить вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся рядом. (Ответ: 0,067).
6. Внутрь круга радиусом R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника; в) правильного шестиугольника. (Ответ: а) $\frac{2}{\pi}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$).
7. Дано уравнение $x^2 + ax + b = 0$. Известно, что $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 1$, причем вероятность попадания каждой из точек a и b в какой-либо интервал отрезка [0; 1] пропорциональна длине интервала и не зависит от его положения относительно отрезка [0; 1]. Найти вероятность того, что данное уравнение имеет действительные корни. (Ответ: $\frac{1}{12}$).

Задания для индивидуальной работы

I.

1. В группе спортсменов 7 лыжников и 5 конькобежцев. Из них случайным образом выбирают три спортсмена. Найти вероятность того, что среди них: а) все лыжники; б) один лыжник и 2 конькобежца. (Ответ: а) 0,1591; б) 0,3182).

2. В лифт девятиэтажного дома вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на 4-ом этаже. (Ответ: 0,00195).
3. На карточках буквы *А*, *О*, *О*, *О*, *О*, *Г*, *Л*, *Л*, *В*, *М*, *К*. Какова вероятность ребенку, не умеющему читать, случайно сложить слово: а) «головоломка»; б) «волк»?

II.

1. Из букв разрезной азбуки *А*, *Е*, *Е*, *Р*, *Р*, *Ж*, *Н*, *Т* ребенок складывает «слова». Какова вероятность случайного сложения слова: а) «тренажер»; б) «енот»?
2. На полке 8 радиоламп, из которых 2 негодные. Случайным образом отбираются 4 радиолампы. Определите вероятность того, что среди отобранных: а) три годные и одна негодная лампа; б) все четыре лампы годные. (Ответ: а) 0,57; б) 0,21).
3. Определите вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001. (Ответ: 0,302).

III.

1. Билеты лотереи выпущены на общую сумму 10 000 000 руб. Цена билета 2000 руб. Ценные выигрыши выпадают на 2740 билетов. Определить вероятность ценного выигрыша на один купленный билет. (Ответ: 0,548).
2. В группе из 9 спортсменов 6 мастеров спорта. Случайным образом отобраны 4 спортсмена. Определить вероятность того, что среди них: а) 2 мастера спорта; б) все 4 мастера спорта. (Ответ: а) 0,357; б) 0,119).
3. Найти вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных правильных дробей не больше единицы, а их произведение не больше $\frac{3}{16}$. (Ответ: 0,456).

IV.

1. В лотерее разыгрывается 1000 билетов. Среди них 2 выигрыша по 50 руб., пять по 20 руб., десять по 10 руб. и 25 по 5 руб. Некто покупает один билет. Найти вероятность того, что он выиграет: а) не менее 20 руб.; б) что-нибудь. (Ответ: а) 0,007; б) 0,042).
2. На десяти одинаковых карточках написаны цифры от 0 до 9. Определите вероятность того, что случайно составленное с помощью данных карточек двузначное число делится на 18. (Ответ: 0,056).
3. Из пруда, в котором плавает 40 щук, выловили 5, их пометили и выпустили обратно в пруд. Во второй раз выловили 9 щук. Какова

вероятность того, что среди них окажутся только две помеченные щуки? (Ответ: 0,246).

1.4. Теоремы сложения и умножения вероятностей случайных событий.

Теорема 1. Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n), \quad A_i A_j = V, \ i \neq j.$$

Следствие 1. Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей равна 1.

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1, \qquad \text{причем} \qquad A_1 + A_2 + ... + A_n = U,$$

$A_i A_j = V, \ i \neq j, \ (i, j) = (\overline{1, n})$.

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1, \qquad P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Теорема 2. Вероятность произведения конечного числа совместных событий равна произведению вероятности одного из событий на условные вероятности других событий с учетом наступления предыдущих событий.

$$P(ABCD) = P(A) \cdot P\left(B/_A\right) \cdot P\left(C/_{AB}\right) \cdot P\left(D/_{ABC}\right).$$

Если любые условные вероятности событий A, B, C, D равны их безусловным вероятностям, то события A, B, C и D *независимы* друг от друга.

Для независимых в совокупности событий $A_1, A_2, ..., A_n$ справедливо равенство

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n).$$

Теорема 3. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема 4. Вероятность появления хотя бы одного из n совместных событий равна

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_n}).$$

Пример 1. Известно, что 2 % всей продукции, выпускаемой некоторым заводом, является нестандартной, а 85 % стандартной продукции удовлетворяет требованиям высшего сорта. Определить вероятность того, что наудачу выбранное изделие окажется высшего сорта.

Решение. Пусть событие A – выбранное изделие высшего сорта, B – выбранное изделие стандартное.

$$P(\overline{B})=0{,}02;\quad P(B)=0{,}98.\qquad P\left(A/_B\right)=0{,}85.$$

Тогда искомая вероятность равна

$$P(B\cdot A)=P(B)\cdot P\left(A/_B\right)=0{,}98\cdot 0{,}85=0{,}833\Leftrightarrow P(B\cdot A)\%=83{,}3\%.$$

Пример 2. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. По мишени стреляют одиночными выстрелами до первого попадания, после чего стрельбу прекращают. Найти вероятность того, что будет сделано не более трех выстрелов.

Решение. Обозначим через A_i - события, состоящие в том, что при i выстреле произошло попадание в мишень, событие B – будет сделано не более трех выстрелов.

Пользуясь алгеброй событий представим событие B суммой трех несовместных событий:

$$B=A_1+\overline{A_1}A_2+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}A_3.\qquad P(A_i)=0{,}6;\quad P(\overline{A_i})=0{,}4;\ i=1,2,3.$$

$$P(B)=P(A_1)+P(\overline{A_1}A_2)+P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3)=P(A_1)+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)+$$
$$+P\ (\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3),$$

т.к. события A_1, A_2, A_3 независимы.

$$P(B)=0{,}6+0{,}4\cdot 0{,}6+0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=0{,}6(1+0{,}4+0{,}16)=0{,}6\cdot 1{,}56=0{,}936\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(B)\%=93{,}6\%.$$

Пример 3. Вероятность отказа детали - 0,4. Для повышения надежности устройства детали дублируются, т.е. вместо одной детали берется n деталей. Каково должно быть n, чтобы вероятность безотказной работы устройства равнялась 99 %?

Решение. Пусть событие B – безотказная работы устройства, $A_i\ \ (i=\overline{1,n})$ - работа i детали. $P(\overline{A_i})=0{,}4;\quad P(A_i)=0{,}6$.

Устройство будет безотказно работать, если хотя бы одна из n деталей будет работать, т.е. $B=A_1+A_2+...+A_n$.

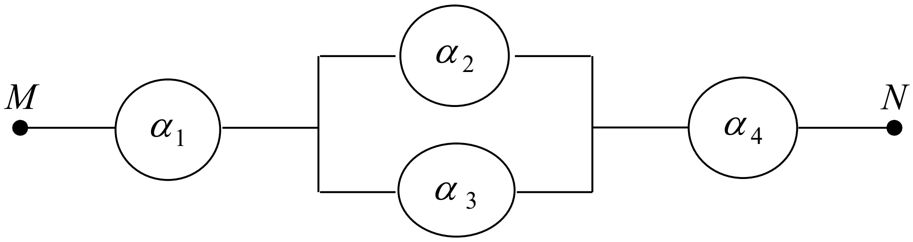
По теореме 4

$$P(B)=P(A_1+A_2+...+A_n)=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot...\cdot\overline{A_n})=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\times$$
$$\times...\cdot P(\overline{A_n})=1-\left(P(\overline{A_1})\right)^n=1-0{,}4^n.$$

По условию задачи $P(B)=0{,}99$, т.е. $1-0{,}4^n=0{,}99$. $0{,}4^n=0{,}01$; $n\ \lg 0{,}4=\lg 0{,}01$; $n\ (\lg 4-1)=-2$.

$$n=\frac{2}{1-\lg 4}=\frac{2}{1-0{,}602}=5{,}025,\quad \text{т.е. } n=6.$$

Пример 4. Электрическая цепь *MN* составлена по схеме



Все 4 элемента цепи работают независимо друг от друга и вероятности выхода их из строя за данный промежуток времени соответственно равны: $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}5$; $p_3 = 0{,}4$; $p_4 = 0{,}2$. Найти вероятность нормальной работы цепи в данный промежуток времени.

Решение. Пусть событие A_i $(i = \overline{1,4})$ - нормальная работа i элемента, B – нормальная работа всей цепи в данный промежуток времени.

$$B = A_1 \cdot (A_2 + A_3) \cdot A_4$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2 + A_3) \cdot P(A_4) = P(A_1) \cdot P(A_4) \cdot (P(A_2) + P(A_3) -$$
$$- P(A_2 \cdot A_3)).$$

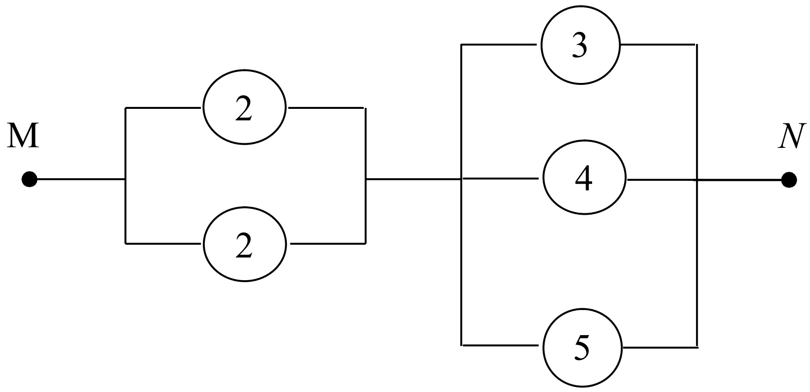
Дано, что $P(\overline{A_1}) = 0{,}3$; $P(\overline{A_2}) = 0{,}5$; $P(\overline{A_3}) = 0{,}4$; $P(\overline{A_4}) = 0{,}2$. Тогда $P(A_1) = 0{,}7$; $P(A_2) = 0{,}5$; $P(A_3) = 0{,}6$; $P(A_4) = 0{,}8$.

$P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}5 \cdot 0{,}6) = 0{,}56 \cdot (0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}3) = 0{,}56 \cdot 0{,}8 = 0{,}448$.

Задания для аудиторной работы

1. В денежно-вещевой лотерее на серию 10000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Какова вероятность какого-либо выигрыша для владельца: а) одного лотерейного билета; б) двух билетов? (Ответ: б) 0,0396).
2. Двадцать экзаменационных билетов содержат по два неповторяющихся вопроса. Студент знает ответы на 35 вопросов. Для сдачи экзамена достаточно ответить на оба вопроса билета или на один вопрос билета и один дополнительный вопрос. Найти вероятность того, что экзамен будет сдан. (Ответ: 0,963).
3. Три стрелка производят по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания в мишень первым стрелком – 0,9; вторым – 0,8 и третьим – 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена: а) всеми стрелками; б) хотя бы двумя стрелками; в) только одним стрелком. (Ответ: а) 0,504; б) 0,902; в) 0,092).
4. Имеется n радиолокационных станций, следящих за одним объектом. Каждая станция обнаруживает объект независимо от других станций с вероятностью p. Найти вероятность того, что объект будет обнаружен. (Ответ: $1-(1-p)^n$).

5. Сколько раз надо подбросить монету, чтобы вероятность хотя бы однократного появления «герба» была больше 0,875? (Ответ: $n > 3$).
6. Вероятность попадания в самолет при одном выстреле из винтовки 0,04. Сколько стрелков должны стрелять одновременно, чтобы вероятность попадания в самолет была больше 70 %? (Ответ: $n > 300$).
7. Участок электрической цепи MN состоит из 5 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятности выхода из строя элементов соответственно равны: $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}6$; $p_3 = 0{,}5$; $p_4 = 0{,}4$; $p_5 = 0{,}2$. Вычислить вероятность разрыва цепи.



(Ответ: 0,2128).

Задания для индивидуальной работы

I.

1. В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности их включения в данный момент соответственно равны 0,9; 0,8 и 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) только две камеры; б) не более одной камеры; в) хотя бы одна камера. (Ответ: а) 0,428; б) 0,124; в) 0,992).
2. Студент знает 30 вопросов из 35 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент ответит на три заданных вопроса. (Ответ: 0,62).
3. Сколько раз надо подбросить игральный кубик, чтобы появление хотя бы один раз пяти очков имело вероятность больше 0,85? (Ответ: $n > 10$).

II.

1. Первый рабочий изготавливает 40 % деталей второго сорта, второй – 30 %. У каждого рабочего взято наугад по 2 детали. Какова вероятность того, что а) все 4 детали второго сорта; б) хотя бы 3 детали второго сорта; в) только одна деталь первого сорта. (Ответ: а) 0,0144; б) 0,1248; в) 0,3864).
2. Три стрелка поочередно ведут стрельбу по одной и той же мишени. Каждый стрелок имеет два патрона, при первом же попадании стрельба прекращается. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле

для первого стрелка равна 0,2, для второго – 0,3, для третьего – 0,4. Найти вероятность того, что все три стрелка израсходуют весь свой боезапас. (Ответ: 0,188).

3. В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена. (Ответ: 0,9286).

III.

1. В блок входят три радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны 0,3; 0,2 и 0,4. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) ни одной радиолампы; б) хотя бы одна радиолампа; в) не менее двух радиоламп. (Ответ: а) 0,336; б) 0,664; в) 0,212).
2. Сколько раз надо повторить испытание, чтобы с вероятностью не меньшей 0,75, утверждать, что хотя бы один раз произойдет событие A, вероятность наступления которого в одном испытании 0,05? (Ответ: не менее 28).
3. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания при одном выстреле. (Ответ: 0,5).

IV.

1. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух ящиках; в) хотя бы в одном ящике. (Ответ: а) 0,6976; б) 0,9572; в) 0,9976).
2. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если для второго орудия эта вероятность равна 0,8. (Ответ: 0,7).
3. В ящике 15 деталей, из них шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что все они неокрашенные. (Ответ: 0,011).

1.5. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

Вероятность события A, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу событий, вычисляется **по формуле полной вероятности**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P\left(A/H_i \right), \text{ где } \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$$

Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез H_i могут быть переоценены **по формулам Байеса**

$$P\left(H_i/A\right) = \frac{P(H_i)\cdot P\left(A/H_i\right)}{P(A)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Пример. Вероятности того, что во время работы цифровой электронной машины произойдет сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти, в остальных устройствах, относятся как 3 : 2 : 5. Вероятность обнаружения сбоя в арифметическом устройстве равна 0,8, в оперативной памяти – 0,9 и в других устройствах – 0,85. а) Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен; б) в ЭВМ произошел сбой. По какой причине вероятнее всего он произошел?

Решение. Пусть событие A – обнаружение сбоя в работе ЭВМ.

Возможны гипотезы: H_1 - сбой в арифметическом устройстве; H_2 - сбой в оперативной памяти; H_3 - сбой в остальных устройствах.

Известны вероятности: $P(H_1) = \frac{3}{10}$; $P(H_2) = \frac{2}{10}$; $P(H_3) = \frac{5}{10}$;

$P\left(A/H_1\right) = 0{,}8$; $P\left(A/H_2\right) = 0{,}9$; $P\left(A/H_3\right) = 0{,}85$.

а) Тогда полная вероятность равна

$$P(A) = 0{,}3\cdot 0{,}8 + 0{,}2\cdot 0{,}9 + 0{,}5\cdot 0{,}85 = 0{,}24 + 0{,}18 + 0{,}425 = 0{,}845.$$

б) Пересчитаем вероятности гипотез с учетом того, что событие A произошло, т.е. сбой в работе ЭВМ обнаружен.

$$P\left(H_1/A\right) = \frac{0{,}3\cdot 0{,}8}{0{,}845} = \frac{0{,}24}{0{,}845} = \frac{240}{845} = 0{,}284 < P(H_1) = 0{,}3\ ;$$

$$P\left(H_2/A\right) = \frac{0{,}2\cdot 0{,}9}{0{,}845} = \frac{0{,}18}{0{,}845} = \frac{180}{845} = 0{,}213 > P(H_2) = 0{,}2\ ;$$

$$P\left(H_3/A\right) = \frac{0{,}5\cdot 0{,}85}{0{,}845} = \frac{425}{845} = 0{,}503 > P(H_3) = 0{,}5\ .$$

Задания для аудиторной работы

1. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне – 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взяли один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар. (Ответ: 0,5).
2. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате – 0,075; на втором – 0,08. Производительность второго автомата втрое больше, чем первого. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь нестандартная. (Ответ: 0,07875).

3. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3 : 2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина. (Ответ: 0,4286).
4. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире», они встречаются в передаваемых сообщениях в отношении 5 : 3. Статистические свойства помех таковы, что искажается в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что: а) передаваемый сигнал принят; б) принятый сигнал – «тире». (Ответ: а) 0,625; б) 0,5).
5. С первого автомата на сборку поступает 40 %, со второго – 35 % и с третьего – 25 % деталей. Среди деталей первого автомата 0,2 % бракованных, второго – 0,3 % и третьего – 0,5 %. Найти вероятность того, что: а) поступившая на сборку деталь бракованная; б) деталь, оказавшаяся бракованной, изготовлена вторым автоматом. (Ответ: а) 0,0031; б) 0,34).
6. В группе из 20 стрелков пять отличных, девять хороших и шесть посредственных. При одном выстреле отличный стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,9; хороший – с вероятностью 0,8 и посредственный – с вероятностью 0,6. Наугад выбранный стрелок выстрелил дважды; отмечено одно попадание и один промах. Каким вероятнее всего был этот стрелок: отличным, хорошим или посредственным? (Ответ: 0,143 – отличный; 0,457 – хороший; 0,4 – посредственный).

Задания для индивидуальной работы

I.

1. Литье в болванках поступает из трех заготовительных цехов: 50 % - из первого, 30 % - из второго и 20 % - из третьего цеха. При этом материал первого цеха имеет 8 % брака, второго – 6 % и третьего – 4 %. Найти вероятность того, что наудачу взятая болванка не имеет дефектов. (Ответ: 0,934).
2. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс вокзала A или в одну из пяти касс вокзала B. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала A имеются в продаже билеты, равна 0,6; в кассах вокзала B – 0,5. а) Найти вероятность того, что в наугад выбранной кассе имеется в продаже билет; б) пассажир купил билет. Чему равна вероятность покупки в кассе вокзала B? (Ответ: а) 0,5375; б) 0,5814).

II.

1. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов, 4 бегуна.

Вероятность выполнить норму для лыжника – 0,9; для велосипедиста – 0,8 и бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, вызванный наудачу, выполнит норму. (Ответ: 0,86).

2. Три автомата изготовляют однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Производительности первого, второго и третьего автоматов относятся как 2 : 3 : 5. Вероятность того, что деталь с первого автомата высшего качества равна 0,8, для второго – 0,6 и для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что: а) наудачу взятая с конвейера деталь будет высшего качества; б) взятая наугад деталь высшего качества изготовлена первым автоматом. (Ответ: а) 0,69; б) 0,2319).

III.

1. Имеется две урны. В первой урне два белых и три черных шара, во второй – 3 белых и 5 черных шаров. Из первой и второй урн, не глядя, берут по одному шару и кладут их в третью урну. Шары в третьей урне перемешивают и берут из нее наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый. (Ответ: 0,3875).
2. Среди шести винтовок пристреленными оказываются только две. Вероятность попадания из пристреленной винтовки равна 0,9, а из не пристреленной – 0,2. Выстрелом из одной наугад взятой винтовки цель поражена. Определить вероятность того, что взята пристреленная или не пристреленная винтовка. (Ответ: 0,6924; 0,3076).

IV.

1. Сборщик получил три ящика деталей. В первом ящике 40 деталей, из них 20 окрашенных; во втором ящике – 50 деталей, из них 10 окрашенных; в третьем – 30 деталей, из них 15 окрашенных. Найти вероятность того, что наугад извлеченная деталь из наугад взятого ящика окажется окрашенной. (Ответ: 0,2).
2. Счетчик регистрирует частицы трех типов A, B и C с вероятностями соответственно 0,8; 0,2 и 0,4. Вероятности появления частиц $P(A)=0{,}2$, $P(B)=0{,}5$; $P(C)=0{,}3$. Счетчик отметил частицу. Какого типа вероятнее всего была частица? (Ответ: A – 0,421; B – 0,263; C – 0,316).

1.6. Повторение независимых испытаний

Производится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с одной и той же вероятностью $p=P(A_i)$ $i=\overline{1,n}$ и не появиться с вероятностью $P(\overline{A_i})=1-p=q$.

I. а) Вероятность того, что событие A в серии из n испытаний появится ровно m раз, вычисляется **по формуле Бернулли**

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q=1-p. \tag{1}$$

б) Если число испытаний велико, то вероятность $P_n(m)$ вычисляется **по локальной формуле Муавра-Лапласа**

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right), \quad q = 1-p, \tag{2}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ - функция Гаусса, она *четная* $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Значения этой функции приводятся в таблице 1 (стр. 72).

в) Если число испытаний n велико, а вероятность p мала ($0 < p < 0{,}1$), то справедлива **формула Пуассона**

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!}\,e^{-\lambda}, \tag{3}$$

где $\lambda = np$ - среднее число появлений события A в серии из n испытаний.

II. Вероятность того, что событие A в серии из n испытаний появится не менее k_1 раз и не более k_2 раз

а) при небольших n вычисляется с помощью **формулы Бернулли**

$$P_n\,(k_1 \le m \le k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1+1) + P_n(k_1+2) + \ldots + P_n(k_2)\,; \tag{4}$$

б) при больших n – с помощью **интегральной формулы Лапласа**

$$P_n(k_1 \le m \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad q = 1-p \tag{5}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}\,dt$ - функция Лапласа, ее значения в таблице 2 (стр. 73). Функция $\Phi(x)$ - *нечетная*, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Для значений $x > 5 \quad \Phi(x) = 0{,}5$.

Замечание 1. Если вероятность наступления события A в каждом испытании различна $P(A_i) = p_i$, $i = \overline{1,n}$, то вероятность того, что событие A при n испытаниях появится m раз, равна коэффициенту при x^m в разложении по степеням x производящей функции

$$\varphi_n(x) = (q_1 + p_1 x)(q_2 + p_2 x)\cdot\ldots\cdot(q_n + p_n x).$$

Замечание 2. Наивероятнейшее число m_0 наступлений события A в n опытах определяется из двойного неравенства $np - q \le m_0 \le np + p$, причем $P_n(m_0) = \max$.

Замечание 3. Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности.

Пусть $P(A)=p$ и частота события A при n испытания $W(A)=\frac{m}{n}$. Тогда вероятность того, что частота мало отличается от $P(A)$ (по абсолютной величине) определяется с помощью приближенной формулы

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (6)$$

Пример 1. Рабочий обслуживает 12 однотипных станков. Вероятность того, что станок потребует внимания рабочего в течение смены равна 1/3. Найти вероятность того, что в течение смены от 3 до 6 станков потребуют внимания рабочего.

Решение. $n=12,\ \ 3\le m\le 6,\ \ p=P(A)=1/3,\ \ q=P(\overline{A})=2/3$.

$$P_{12}(3\le m\le 6)=P_{12}(3)+P_{12}(4)+P_{12}(5)+P_{12}(6)=C_{12}^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{9}+$$

$$+C_{12}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{8}+C_{12}^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{7}+C_{12}^{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{6}=C_{12}^{3}\cdot\frac{2^9}{3^{12}}+$$

$$+C_{12}^{4}\,\frac{2^8}{3^{12}}+C_{12}^{5}\,\frac{2^7}{3^{12}}+C_{12}^{6}\,\frac{2^6}{3^{12}}=\frac{2^6}{3^{12}}\left(\frac{12\cdot11\cdot10}{6}\cdot8+\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{24}\cdot4+\right.$$

$$\left.+\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{120}\cdot2+\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{120\cdot6}\right)=\frac{64}{81^3}\left(22\cdot80+55\cdot36+99\cdot16+77\cdot12\right)=$$

$$=\frac{64}{81^3}(1760+1980+1584+924)=0{,}7524.$$

Пример 2. Сколько опытов нужно произвести, чтобы с вероятностью 0,9 можно было бы утверждать, что частота события A будет отличаться от $P(A)=0{,}4$ по абсолютной величине, не более чем на 0,1?

***Решение.* По формуле (6)** $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.

$\varepsilon=0{,}1;\ \ p=0{,}4;\ \ q=0{,}6;\ \ n=?$

$$2\Phi\left(0{,}1\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}4\cdot0{,}6}}\right)=0{,}9. \qquad \Phi\left(0{,}1\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}24}}\right)=0{,}45.$$

По таблице 2 для функции Лапласа находим $\Phi(t)=0{,}45;\ \ t=1{,}64$, т.е.

$0{,}1\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}24}}=1{,}64$; $\quad\frac{n}{0{,}24}=(16{,}4)^2$; $\quad n=0{,}24\cdot(16{,}4)^2=64{,}6$. Отсюда $n=65$.

Задания для аудиторной работы

1. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) 2 раза; б) менее двух раз; в) не менее трех раз. (Ответ: а) 0,3125; б) 0,1875; в) 0,8125).
2. Рабочий обслуживает десять однотипных станков. Вероятность того, что станок потребует внимания рабочего в течение часа, равна 0,05. Найти вероятность того, что в течение часа этих требований будет от трех до пяти. (Ответ: 0,0115).
3. Вероятность изготовления изделия отличного качества равна 0,9. Изготовлено 50 изделий. Найти наивероятнейшее число изделий отличного качества и его вероятность. (Ответ: 45; 0,1849).
4. Вероятности перегорания первой, второй, третьей и четвертой ламп равны соответственно 0,1; 0,2; 0,3 и 0,4. Вероятность выхода из строя прибора при перегорании одной лампы равна 0,2; двух ламп – 0,4; трех ламп - 0,6 и четырех ламп – 0,8. Определить вероятность выхода прибора из строя. (Ответ: 0,2).
5. Вероятность появления события A в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие A появится: а) ровно 80 раз; б) не менее 75 и не более 90 раз; в) хотя бы один раз. (Ответ: а) 0,0997; б) 0,8882; в) 1).
6. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02. (Ответ: 0,7698).
7. Станок изготавливает за смену 10000 деталей. Вероятность изготовления бракованной детали $p = 0{,}0001$. Найти вероятность того, что за смену будет изготовлено бракованных деталей: а) три; б) от четырех до шести; в) хотя бы одна. (Ответ: а) 0,0613; б) 0,0189; в) 0,6321).
8. Вероятность того, что деталь нестандартная равна 0,1. Сколько деталей нужно отобрать, чтобы с вероятностью 0,9544 можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности $p = 0{,}1$ по абсолютной величине не более чем на 0,03? (Ответ: 400).

Задания для индивидуальной работы

I.

1. Всхожесть семян некоторого растения составляет 80%. Найти вероятность того, что из шести посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трех; в) не более трех. (Ответ: а) 0,0819; б) 0,9832; в) 0,0989).

2. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что событие наступит 50 раз в 243 испытаниях. (Ответ: 0,0167).
3. Вероятность нарушения стандарта при штамповке карболитовых колец равна 0,3. Найти вероятность того, что для 800 заготовок число бракованных колец будет заключено между 225 и 250. (Ответ: 0,6543).
4. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из 1000 взятых на проверку деталей будет 10 бракованных. (Ответ: 0,0993).

II.

1. Вероятность поражения мишени для данного стрелка в среднем составляет 80%. Стрелок произвел 6 выстрелов. Найти вероятность того, что мишень будет поражена: а) пять раз; б) не менее 4 раз; в) не более двух раз. (Ответ: а) 0,3932; б) 0,9011; в) 0,01696).
2. Найти вероятность одновременного останова 30 машин из 100 работающих, если вероятность останова для каждой машины равна 0,2. (Ответ: 0,0044).
3. Вероятность появления события в каждом из 2000 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие наступит от 1350 до 1500 раз. (Ответ: 0,9924).
4. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин. равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 мин. обрыв произойдет на шести веретенах. (Ответ: 0,1041).

III.

1. Вероятность сдачи экзамена для каждого из шести студентов равна 0,8. Найти вероятность того, что экзамен сдадут: а) пять студентов; б) не менее четырех; в) не более трех студентов. (Ответ: а) 0,3932; б) 0,9011; в) 0,0989).
2. Вероятность того, что взято изделие высшего сорта 0,5. Определить вероятность того, что из 1000 изделий 500 – высшего сорта. (Ответ: 0,0252).
3. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,9. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от 84 до 96 раз. (Ответ: 0,9544).
4. Станок состоит из 2000 независимо работающих узлов. Вероятность отказа одного узла в течение года 0,0005. Найти вероятность отказа в течение года от двух до четырех узлов. (Ответ: 0,2606).

IV.

1. Всхожесть семян лимона составляет 80%. Посажено девять семян. Найти вероятность всхожести: а) семи семян; б) не более пяти; в) не менее восьми семян. (Ответ: а) 0,302; б) 0,0853; в) 0,3758).

2. Найти вероятность поражения мишени 75 раз при 90 выстрелах, если вероятность поражения мишени при одном выстреле 0,8. (Ответ: 0,0769).
3. Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие появится от 90 до 180 раз, если вероятность наступления в одном испытании равна 0,4. (Ответ: 0,9793).
4. Промышленная телевизионная установка содержит 2000 транзисторов. Вероятность выхода из строя каждого транзистора 0,0006. Найти вероятность выхода из строя от двух до пяти транзисторов. (Ответ: 0,3359).

II. Случайные величины (СВ)

2.1. Законы распределения и числовые характеристики дискретных случайных величин (ДСВ)

Случайной называется величина, принимающая различные числовые значения, заранее неизвестные.

Дискретной СВ называется величина, множество значений который образует конечную или бесконечную последовательность чисел.

Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и их вероятностями, называется законом распределения СВ.

Для ДСВ закон распределения задается таблично.

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

где $\sum p_i = 1$, или с помощью функции распределения $F(x)$.

Функцией распределения $F(x)$ СВ X называется вероятность того, что СВ X примет значения, меньшие x.

$$F(x) = P(\mathrm{X} < x) = P(-\infty < \mathrm{X} < x).$$

Свойства $F(x)$:

1. $0 \le F(x) \le 1$ для $\forall x \in R$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
3. $F(x_1) \le F(x_2)$, если $x_1 < x_2$.
4. $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Математическим ожиданием СВ X называется число $M(X)$, определяемой формулой

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Свойства $M(X)$:

1. $M(C) = C$.
2. $M(CX) = C\,M(X), \quad C = const$.
3. $M(X+Y) = M(X) + M(Y), \quad X \text{ и } Y - \forall CB$;
4. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y), \quad X \text{ и } Y -$ независимые *СВ*.

Дисперсией D (*X*) случайной величины *X* называют математическое ожидание от квадрата отклонения *СВ X*: $D(X) = M\left((X - M(X))^2\right)$.

Свойства $D(X)$:

1. $D(C) = 0$.
2. $D(CX) = C^2 D(X), \quad C = const$.
3. $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$, где *X* и *У* – независимые *СВ*.
4. $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$.

Для любой *СВ X* $\;D(X) > 0$, $x_{\min} < M(X) < x_{\max}$.

$\sqrt{D(X)} = \sigma(X)$- *среднее квадратическое отклонение*.

Пример. Из урны, содержащей 3 белых и 5 черных шаров, извлекаются 3 шара. Пусть *СВ X* – число вынутых черных шаров. Составить закон распределения, найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. Построить график функции распределения.

Решение. *СВ X* может принять значения: 0, 1, 2, 3.

Вычислим соответствующие вероятности.

$$p_1 = P(X=0) = P(ббб) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{8\cdot 7\cdot 6} = \frac{1}{56}.$$

$$p_2 = P(X=1) = P(чбб + бчб + ббч) = \frac{C_5^1 \cdot C_3^2}{C_8^3} = \frac{5\cdot 3}{56} = \frac{15}{56}.$$

$$p_3 = P(X=2) = P(ччб + чбч + ббч) = \frac{C_5^2 \cdot C_3^1}{C_8^3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{2\cdot 56} = \frac{15\cdot 2}{56} = \frac{30}{56}.$$

$$p_4 = P(X=3) = P(ччч) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{56} = \frac{10}{56}.$$

Закон распределения для данной *СВ X* имеет вид

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = \frac{1+15+30+10}{56} = 1.$$

Находим числовые характеристики данного распределения.

$$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{56} + 1 \cdot \frac{15}{56} + 2 \cdot \frac{30}{56} + 3 \cdot \frac{10}{56} = \frac{15+60+30}{56} = \frac{105}{56} = 1{,}875.$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X). \quad M(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i{}^2 p_i.$$

$$M(X^2) = 1 \cdot \frac{15}{56} + 4 \cdot \frac{30}{56} + 9 \cdot \frac{10}{56} = \frac{15+120+90}{56} = \frac{225}{56} = 4{,}018.$$

$$D(X) = 4{,}018 - 1{,}875^2 = 0{,}5024.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0{,}5024} = 0{,}71.$$

Составим функцию распределения $F(X)$. Значения $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3$ разбивают числовую ось на 5 интервалов.

Если $x \in (-\infty; 0]$, то $F(X) = P(X < x) = 0$, т.к. на этом интервале *СВ* значений не имеет.

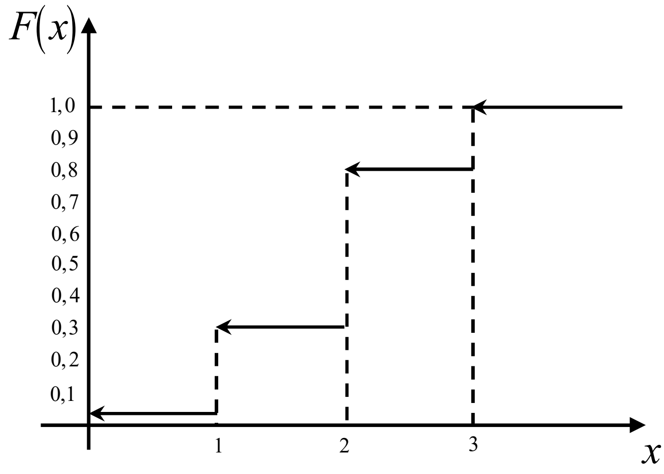
Если $x \in (0;1]$, то $F(x) = P(X = 0) = \frac{1}{56}$.

Если $x \in (1;2]$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{56} + \frac{15}{56} = \frac{16}{56}$.

Если $x \in (2;3]$, то $F(x) = \frac{16}{56} + P(X = 2) = \frac{16}{56} + \frac{30}{56} = \frac{46}{56}$.

При $x \in (3;+\infty]$, $F(x) = \frac{46}{56} + P(X = 3) = \frac{46}{56} + \frac{10}{56} = 1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ \frac{1}{56} = 0{,}018, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ \frac{16}{56} = 0{,}286, & \text{если } 1 < x \le 2, \\ \frac{46}{56} = 0{,}821, & \text{если } 2 < x \le 3, \\ 1, & \text{если } 3 < x < +\infty. \end{cases}$$



Задание для аудиторной работы

1. В партии из 6 деталей 4 стандартные. Наудачу отбирают 2 детали. Составить закон распределения *ДСВ X* – числа стандартных деталей среди отобранных. Найти *M* (*X*).
2. Охотник, имеющий шесть патронов, стреляет в цель до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,5. *СВ X* – число израсходованных патронов. Найти *M* (*X*), *D* (*X*). (Ответ: *M* (*X*) = 1,96875).
3. Вероятности попадания в мишень первого, второго и третьего стрелков соответственно равны 0,4; 0,3 и 0,6. *СВ X* – число попаданий в мишень. Составить закон распределения *СВ X*.
4. Имеется пять ключей, из которых только один подходит к замку. *СВ X* – число попыток при открывании замка (ключ не подошедший к замку, в последующих опробованиях не участвует). Найти *M* (*X*), *D* (*X*). (Ответ: 3; 2).
5. Дан закон распределения *СВ X*

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Найти $M(X)$, $D(X)$, $M(X-1)$, $D(X-1)$, $M(3X+6)$, $D(3X+6)$.

6. Производятся 4 независимых испытания, в каждом из которых $P(A)=0{,}4$. *СВ X* – число появлений события *A* при четырех испытаниях. Составить закон распределения, найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. (Ответ: 1,6; 0,96; 0,98).

Задания для индивидуальной работы

I.

1. Монету подбросили шесть раз. *СВ X* – число выпадений «герба». Составить закон распределения *СВ X*. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.
2.

X	-1	2	3	5
P	0,1	0,3	0,4	0,2

Найти $M(X)$, $D(X)$, $M(2X-4)$, $D(2X-4)$, $F(x)$.

II.

1. Игральный кубик подбросили четыре раза. *СВ X* – число выпадений трех очков. Составить закон распределения *СВ X*. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.
2.

X	-3	-1	2	4
P	0,3	0,2	0,4	0,1

Найти $M(X)$, $D(X)$, $M(3X+2)$, $D(3X+2)$. Составить функцию распределения $F(x)$.

III.

1. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,6. *СВ X* – число поражений цели при 5 выстрелах. Составить закон распределения *СВ X*, найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.
2.

X	-2	0	1	5
P	0,5	0,2	0,1	0,2

Составить функцию распределения $F(x)$. Найти $M(X)$, $D(X)$, $M(-X+3)$, $D(-X+3)$.

IV.

1. Вероятность перевыполнения плана для СУ-1 равна 0,9; для СУ-2 – 0,8; для СУ-3 – 0,7. *СВ X* – число СУ, перевыполнивших план. Составить закон распределения *СВ X*, найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.
2.

X	-1	0	4	6
P	0,3	0,1	0,4	0,2

Составить функцию распределения $F(x)$. Найти $M(X)$, $D(X)$, $M(-2X+4)$, $D(-2X+4)$.

2.2. Функция распределения, плотность вероятности, числовые характеристики непрерывных СВ

Непрерывной случайной величиной называется случайная величина, возможные значения которой сплошь заполняют некоторый конечный или бесконечный промежуток.

Закон распределения НСВ задают аналитически с помощью функции распределения $F(x)$ или плотности вероятности $f(x)$.

В пункте 2.1. дано определение и сформулированы свойства функции распределения: $F(x) = P(X < x)$, $0 \le F(x) \le 1$, эта функция неубывающая.

Если возможны значения СВ $X \in [a; b]$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$, $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Если $F(x)$ и $F'(x)$ - непрерывные функции, то СВ X называется <u>непрерывной</u>.

Для любой СВ $P(X = x_0) = F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0)$, для непрерывной СВ $P(X = x_0) = 0$.

$$P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Пример 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -1, \\ a(x+1)^2, & \text{если } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{если } x \ge 1. \end{cases}$$

Найти коэффициент a и вычислить вероятность того, что СВ $X \in (0; 0{,}5)$.

Решение. Из непрерывности функции $F(x)$ следует, что $F(-1) = \lim\limits_{x \to -1+0} F(x)$ и $F(1) = \lim\limits_{x \to 1-0} F(x)$, т.е. $0 = a(-1+1)^2$ и $1 = a(1+1)^2$, отсюда $4a = 1$, $a = \dfrac{1}{4}$. $F(x) = \dfrac{1}{4}(x+1)^2$, если $-1 < x < 1$.

Тогда

$$P(0 < X < 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0) = \frac{1}{4}(0{,}5+1)^2 - \frac{1}{4}(0+1)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{4} - \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{9-4}{16} = \frac{5}{16} = 0{,}3125.$$

Плотностью вероятности СВ X или *дифференциальной функцией распределения* называется первая производная от функции распределения.

$$f(x) = F'(x).$$

Ее свойства:

1. $f(x) \ge 0$ для $\forall x \in R$;

2. $P(a<X<b)=\int\limits_a^b f(x)\,dx$;

3. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$;

4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$.

Математическое ожидание непрерывной СВ X определяется по формуле

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx, \text{ если значения СВ } X\in(-\infty,\infty).$$

$$M(X)=\int\limits_a^b x\,f(x)\,dx, \text{ если значения СВ } X\in(a;b).$$

Дисперсия непрерывной СВ X

$$D(X)=M\left((X-M(X))^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x-M(X)\right)^2 f(x)\,dx,$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X),$$

$$M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx, \text{ если } X\in(-\infty,\infty).$$

Модой непрерывной СВ X называется такое ее значение M_0, для которого $f(M_0)=\max f(x)$.

Медианой СВ X называется такое ее значение M_e, что $P(X<M_e)=P(X>M_e)$.

В случае симметричного распределения СВ $M(X)=M_0=M_e$.

Для симметричного распределения характеристикой рассеивания служит *срединное отклонение* E_X:

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<E_X\right)=0{,}5.$$

Пример 2. Случайная величина X задана плотностью распределения (распределение Лапласа)

$$f(x)=a\,e^{-|x|}.$$

Определить коэффициент a, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Решение. По четвертому свойству $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} a\,e^{-|x|}dx = 1,\quad a\int_{-\infty}^{0} e^{x}dx + a\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = 1,$$

$$a\,e^{x}\Big|_{-\infty}^{0} - a\,e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} = a(1-0) - a(0-1) = 2a = 1,\ a = \frac{1}{2}.$$

Математическое ожидание СВ X, значения которой $X \in R$.

$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|}dx = 0$, в силу нечетности подынтегральной функции.

Дисперсия

$$D(X) = M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|}dx = \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x^2, & du = 2x\,dx \\ dv = e^{-x}dx, & v = -e^{-x} \end{vmatrix} =$$

$$= -x^2 e^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x\,e^{-x}dx = 0 + 2\int_0^{\infty} x\,e^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^{-x}dx, & v = -e^{-x} \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(-x\,e^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}dx\right) = 2\left(-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} + 0 - e^{-x}\Big|_0^{\infty}\right) = 2(-0-0+1) = 2.$$

Пример 3. Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 4/x^5, & \text{если}\ \ x \ge 1, \\ 0, & \text{если}\ \ x < 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание $M(X)$, моду M_0 и медиану M_e.

Решение. СВ X принимает свои значения в интервале $[1;+\infty)$. Значит, при $x \le 1$, $F(x) = 0$.

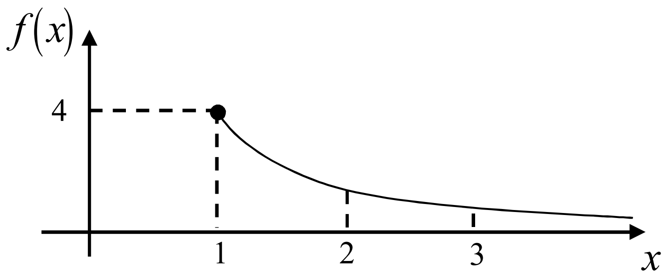
Для $x > 1$.

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{4}{t^5}dt = 4 \cdot \frac{t^{-4}}{-4}\Big|_1^x = \left(-\frac{1}{t^4}\right)\Big|_1^x = 1 - \frac{1}{x^4}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если}\ \ x \le 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x^4}, & \text{если}\ \ x > 1. \end{cases}$$

$$M(X) = \int_1^{\infty} xf(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{4}{x^4}dx = 4 \cdot \frac{x^{-3}}{-3}\Big|_1^{\infty} = -\frac{4}{3x^3}\Big|_1^{\infty} = \frac{4}{3}.$$

График $f(x)$



показывает, что $\max f(x) = f(1) = 4$, т.е. мода $M_0 = 1$.

Медиану распределения M_e найдем из условия
$P(X < M_e) = P(X > M_e)$, т.е.
$P(1 < X < M_e) = P(M_e < X < +\infty)$. Получим уравнение

$$\int_1^{M_e} 4x^{-5}dx = \int_{M_e}^{+\infty} \frac{4}{x^5}dx .$$

$$\frac{4}{-4}x^{-4}\Bigg|_1^{M_e} = \frac{4}{-4}x^{-4}\Bigg|_{M_e}^{\infty}; \quad -\frac{1}{(M_e)^4}+1 = -\frac{1}{x^4}\Bigg|_{M_e}^{\infty}; \; -\frac{1}{(M_e)^4}+1 = \frac{1}{(M_e)^4};$$

$$\frac{2}{(M_e)^4} = 1; \quad (M_e)^4 = 2; \quad M_e = \sqrt[4]{2} = 1{,}1892 .$$

Пример 4. Найти серединное отклонение E_x для распределения Коши

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R .$$

Решение. Данное распределение симметрично оси Oy, значит, $M(X) = 0$. Для нахождения серединного отклонения решаем уравнение $P\big(|\,X - M(X)\,| < E_x\big) = 0{,}5$, т.е.

$P\big(|\,X\,| < E_x\big) = 0{,}5$; $P(-E_x < X < E_x) = 0{,}5$;

$$\frac{1}{\pi}\int_{-E_x}^{E_x}\frac{dx}{1+x^2} = 0{,}5; \qquad \frac{1}{\pi}(arctg\,x)\Bigg|_{-E_x}^{E_x} = 0{,}5;$$

$$\frac{1}{\pi}(arctg\,E_x + arctg\,E_x) = \frac{1}{2}; \quad \frac{2}{\pi}arctg\,E_x = \frac{1}{2}; \quad arctg\,E_x = \frac{\pi}{4}; \; E_x = 1 .$$

Следовательно, $P(-1 < X < 1) = 0{,}5$.

Задания для аудиторной работы

1. Функция распределения СВ X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & \textit{если } x<-1,\\ a+b\arcsin x, & \textit{если } -1\le x\le 1,\\ 1, & \textit{если } x>1.\end{cases}$$

Найти постоянные a и b, плотность вероятности, математическое ожидание СВ X. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$. (Ответ: a = 0,5; $b=\dfrac{1}{\pi}$; $M(X)=0$).

2. Плотность вероятности СВ X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}ax^2, & \textit{если } 0\le x\le 2,\\ 0, & \textit{если } x\,\overline{\in}\,(0;2).\end{cases}$$

Найти коэффициент a, математическое ожидание, дисперсию, моду, медиану СВ X. Определить вероятность того, что в результате опыта СВ X отклонится от своего $M(X)$ не более чем на 0,5. (Ответ: $a=0{,}375$; $p=0{,}875$).

Задания для индивидуальной работы

1. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность вероятности $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и $P(|X-M(X)|<0{,}25)$.
2. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$. Найти $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и моду СВ X.

I.

1. $F(x)=\begin{cases}0, & \textit{если } x<-1,\\ \dfrac{1}{9}(x^3+1), & \textit{если} -1\le x\le 2,\\ 1, & \textit{если } x>2.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}x^2+6x-\dfrac{45}{4}, & \textit{если } x\in(3;5),\\ 0, & \textit{если } x\,\overline{\in}\,(3;5).\end{cases}$

Ответ: 1) $M(X)=1{,}25$; $p=0{,}2639$. 2) $M(X)=M_0(X)=4$; $D(X)=0{,}2$.

II.

1. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ \dfrac{1}{14}(x^3+3x), & \text{если } 0\le x\le 2,\\ 1, & \text{если } x>2.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{5}{4}x-\dfrac{11}{12}, & \text{если } x\in(2;4),\\ 0, & \text{если } x\,\overline{\in}\,(2;4).\end{cases}$

Ответ: 1) $M(X)=1{,}2857$; $p=0{,}2865$.

2) $M(X)=2{,}833$; $M_0(X)=2{,}5$; $D(X)=0{,}263$.

III.

1. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ \dfrac{1}{15}(x^2+2x), & \text{если } 0\le x\le 3,\\ 1, & \text{если } x>3.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{12}, & \text{если } x\in(1;3),\\ 0, & \text{если } x\,\overline{\in}\,(1;3).\end{cases}$

Ответ: 1) $M(X)=1{,}8$; $p=0{,}1876$.

2) $M(X)=1{,}833$; $M_0(X)=1{,}5$; $D(X)=0{,}2621$.

IV.

1. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ \dfrac{1}{10}(x^2+3x), & \text{если } 0\le x\le 2,\\ 1, & \text{если } x>2.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{12}, & \text{если } x\in(0;2),\\ 0, & \text{если } x\,\overline{\in}\,(0;2).\end{cases}$

Ответ: 1) $M(X)=1{,}133$; $p=0{,}2633$.

2) $M(X)=0{,}833$; $M_0(X)=0{,}5$; $D(X)=0{,}262$.

2.3. Классические распределения случайных величин

Биномиальное распределение. Пусть в каждом из n независимых испытаний событие A появляется с вероятностью p. СВ X – число появлений события A при n испытаниях. Возможные значения СВ X: $0, 1, 2, ..., m, ..., n$. Соответствующие вероятности находим по формуле Бернулли $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, $q = 1 - p$.

Составляем таблицу

X	0	1	2	…	n
P	q^n	npq^{n-1}	$\frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2}$	…	p^n

Такое распределение СВ X называется биномиальным. Его числовые характеристики $M(X) = np$, $D(X) = npq$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Распределение Пуассона. Если число n велико, а вероятность p мала, то $P_n(m)$ считаем по формуле Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np.$$

X	0	1	2	…	n
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

Для распределения Пуассона $M(X) = D(X) = \lambda$.

Закону Пуассона подчинена СВ, задающая простейший поток событий (число вызовов скорой помощи, число заказов на предприятиях бытовых услуг и т.д.).

Если интенсивность потока λ выражает число появлений события в единицу времени, то вероятность наступления m событий за время t определяется формулой

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}.$$

Равномерное распределение имеет СВ X, если плотность ее вероятности определяется функцией

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & если \quad x \in [a; b], \\ 0, & если \quad x \bar{\in} [a; b]. \end{cases}$$

Для этого распределения $M(X)=\dfrac{a+b}{2}, \quad D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Показательное распределение СВ X задает плотность вероятности вида

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{если} \quad x\ge 0,\\ 0, & \text{если} \quad x<0.\end{cases}$$

$$\lambda>0, \quad M(X)=\frac{1}{\lambda}, \quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Функция надежности. Если СВ Т – время безотказной работы механизма, то $F(t)=P(T<t)$ выражает вероятность выхода из строя механизма за время t. $R(t)=1-F(t)=R(T>t)$ - вероятность безотказной работы механизма за время t. Функция $R(t)$ называется функцией надежности.

Если СВ T подчиняется показательному закону распределения, то $R(t)=e^{-\lambda t}$, где λ - число отказов в единицу времени (интенсивность отказов).

Нормальный закон распределения.

Его плотность распределения определяет функция

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad a=M(X), \quad \sigma^2=D(X).$$

Для нормального распределения справедливы формулы:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ - функция Лапласа, ее значения в таблице 2.

$$P\big(|X-M(X)|<\delta\big)=P\big(|X-a|<\delta\big)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Если $\delta=3\sigma$, то получаем *«правило трех сигм»*:

$$P\big(|X-a|<3\sigma\big)=2\Phi(3)=0{,}9973.$$

С вероятностью, практически равной единице, можно определить интервал наиболее вероятных значений нормально распределенной СВ X: $(a-3\sigma;\; a+3\sigma)$.

Пример 1. Время T безотказной работы радиотехнической системы распределено по показательному закону. Интенсивность отказов системы $\lambda = 0{,}02$. Найти среднее время безотказной работы и вероятность безотказной работы за 80 часов.

Решение. Плотность вероятности данного распределения имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}02\, e^{-0{,}02\, t}, & \textit{если} \quad t \geq 0, \\ 0, & \textit{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

Математическое ожидание $M(T)$ определяет среднее время безотказной работы системы.

$$M(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}02} = \frac{100}{2} = 50 \text{ (часов)}.$$

Вероятность безотказной работы за 80 часов определим с помощью функции надежности $R(t) = e^{-\lambda t}$.

$$R(80) = e^{-0{,}02 \cdot 80} = e^{-1{,}6} = 0{,}2019.$$

Пример 2. Определить среднеквадратическую ошибку радиодальномера, если систематических ошибок он не имеет, а случайные ошибки X распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,95 не выходят за пределы ± 20 метров.

Решение. СВ X – ошибка радиодальномера подчиняется нормальному закону распределения. Отсутствие систематических ошибок означает, что $a = M(X) = 0$, второй параметр $\sigma(X) = \sigma$ надо определить. Из условия задачи следует, что $P\big(|X - a| < 20\big) = 0{,}95$, т.е. $P\big(|X| < 20\big) = 0{,}95$.

Применим формулу $P\big(|X - a| < \delta\big) = 2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$, получим $2\Phi\left(\dfrac{20}{\sigma}\right) = 0{,}95$;

$\Phi\left(\dfrac{20}{\sigma}\right) = 0{,}475$.

По таблице значений функции Лапласа находим, что $\dfrac{20}{\sigma} = 1{,}96$;

отсюда $\sigma\ \dfrac{20}{1{,}96} = 10{,}2041$ (м).

Задания для аудиторной работы

1. Производится 5 независимых опытов, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью 0,6. Составить закон распределения СВ X – числа появлений события A при пяти испытаниях. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.
2. Определить постоянную вероятность p попадания в цель при каждом выстреле и число произведенных выстрелов, если среднее число

попаданий равно 240, а среднее квадратическое отклонение числа попаданий равно 12.

3. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,0004. Найти вероятность того, что из 1000 изделий испытание не выдержат не менее двух изделий.
4. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в 1 минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит: а) пять вызовов; б) не менее трех; в) хотя бы один вызов.
5. СВ X имеет равномерное распределение с $M(X)=4$ и $D(X)=12$. Найти функцию распределения $F(X)$, плотность вероятности $f(x)$ и $P(0<X<2)$.
6. Радиоаппаратура за 1000 часов работы выходит из строя в среднем один раз. Определить вероятность выхода из строя радиоаппаратуры за 200 часов работы, если срок безотказной работы – случайная величина, распределенная по показательному закону. (Ответ: 0,1813).
7. Определить время работы радиолампы с вероятностью 0,8 (вероятность безотказной работы радиолампы), если среднее время ее работы равно 700 часов. (Ответ: 156 часов).
8. СВ X распределена нормально с $M(X)=2,\ D(X)=9$. Написать выражения для плотности вероятности, функции распределения. Найти интервал наиболее вероятных значений СВ *X*. Что вероятнее: $X\in(-2;\,2)$ или $X\in(1;\,5)$?

Задания для индивидуальной работы

1. Найти закон распределения указанной СВ *X*. Вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.
2. СВ T подчиняется показательному закону с известным λ. Записать $f(t),\ F(t)$. Найти $M(T),\ D(T),\ \sigma(T),\ P(\alpha<T<\beta)$.
3. СВ X нормально распределена с известными параметрами a и σ. Записать плотность вероятности, функцию распределения. Построить их графики. Что вероятнее: $X\in(\alpha,\beta)$ или $X\in(\gamma,\delta)$?

I.

1. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. СВ X – число поражений цели при шести выстрелах.
2. $\lambda=1{,}2;\quad \alpha=0{,}98;\quad \beta=2{,}43$.
3. $a=4;\ \ \sigma^2=25;\ \ \alpha=-1;\ \ \beta=3;\ \ \gamma=4;\ \ \delta=6$.

II.

1. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 1/8. СВ X – число выигрышных билетов из трех.

2. $\lambda = 2{,}4$; $\alpha = 1{,}45$; $\beta = 3{,}62$.

3. $a = -3$; $\sigma^2 = 9$; $\alpha = -6$; $\beta = 0$; $\gamma = 0$; $\delta = 5$.

III.

1. Вероятность сдачи данного экзамена для каждого из шести студентов равна 0,8. СВ X – число студентов, сдавших экзамен.
2. $\lambda = 1{,}8$; $\alpha = 0{,}42$; $\beta = 2{,}53$.
3. $a = 6$; $\sigma^2 = 16$; $\alpha = -4$; $\beta = 2$; $\gamma = 4$; $\delta = 9$.

IV.

1. Из 30 приборов, проверяемых на надежность, пять высшей категории. Наугад взяли 4 прибора. СВ X – число приборов высшей категории среди отобранных.
2. $\lambda = 3{,}2$; $\alpha = 2{,}41$; $\beta = 3{,}45$.
3. $a = 0$; $\sigma^2 = 4$; $\alpha = -5$; $\beta = 1$; $\gamma = 2$; $\delta = 8$.

2.4. Закон больших чисел. Теоремы Бернулли, Чебышева. Понятие о предельных теоремах.

Неравенство Маркова. Если все значения СВ X положительны и A – некоторое положительное число, то

$$P(X \ge A) \le \frac{M(X)}{A}. \qquad (1)$$

Неравенство Чебышева. Если СВ X имеет конечную дисперсию $D(X)$ и $M(X)$, то при $\forall \varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P\left(\left| X - M(X) \right| < \varepsilon \right) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (2)$$

или $$P\left(\left| X - M(X) \right| \ge \varepsilon \right) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (3)$$

Теорема Чебышева. Если последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n$ попарно независимых СВ, дисперсии которых ограничены одним и тем же числом, то при $n \to \infty$ среднее арифметическое СВ X_i $(i = \overline{1,n})$ сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{\sum X_i}{n} - \frac{\sum M(X_i)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Из теоремы следует оценка

$$P\left(\left| \frac{1}{n}\sum X_i - \frac{1}{n}\sum M(X_i) \right| < \varepsilon \right) \ge 1 - \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}, \qquad (4)$$

где ε - любое сколь угодно малое положительное число.

<u>Теорема Бернулли</u> устанавливает связь между частотой события и его вероятностью.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

При доказательстве получаем неравенство

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = P\left(\left| m - np \right| < \varepsilon \cdot n \right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (5)$$

<u>Теорема Ляпунова.</u> Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ - независимые СВ с одним и тем же законом распределения, то при $n \to \infty$ СВ $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ имеет распределение, близкое к нормальному.

$$f(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma y^2}}, \quad m_y = \sum_{i=1}^{n} M(X_i), \quad \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} D(X_i).$$

Тогда

$$P(\alpha < Y < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_y}{\sigma_y} \right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_y}{\sigma_y} \right). \qquad (6)$$

Частным случаем теоремы Ляпунова является

<u>Интегральная теорема Лапласа.</u> Если в каждом из n независимых испытаний событие A появляется с одной и той же вероятностью $p = P(A)$, то

$$P(k_1 \leq m \leq k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \right), \qquad (7)$$

где СВ $X = m$ – число появлений A в n испытаниях, $M(X) = np$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Частота события A $W(A) = \frac{m}{n}$ является СВ, ее математическое ожидание $M\left[\frac{m}{n} \right] = p$, а дисперсия $D\left[\frac{m}{n} \right] = \frac{pq}{n}$, тогда

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right), \qquad (8)$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Пример 1. Вероятность наступления некоторого события A в каждом из 1500 испытаний равна 0,2. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что отклонение числа наступлений события A от математического ожидания будет более 40.

Решение. $n=1500$, СВ X – число наступлений события A при n испытаниях подчиняется биномиальному закону. Поэтому $M(X)=np=1500\cdot 0{,}2=300,$ $D(X)=npq=300\cdot 0{,}8=240$. Подставляем данные в неравенство (3) при $\varepsilon=40$, получим

$$P\left(\left|X-300\right|>40\right)\le\frac{240}{40^2}=\frac{240}{1600}=0{,}15.$$

Пример 2. В рассматриваемом технологическом процессе в среднем 75 % изделий имеют допуск $\pm 5\%$. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что среди 2000 изделий имеют допуск $\pm 5\%$ от 1450 до 1550 изделий.

Решение. Число изделий, имеющих допуск $\pm 5\%$, среди 2000 изделий, является СВ с биномиальным распределением.

$$M(X)=n\cdot p=2000\cdot 0{,}75=1500,\quad D(X)=npq=2000\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25=375.$$

$$1450\le X\le 1550,\quad -50\le X-M(X)\le 50.$$

По неравенству (2) получим $P\left(\left|X-1500\right|\le 50\right)\ge 1-\dfrac{375}{50^2}=0{,}85.$

Вероятность такого события не меньше 0,85.

Вычислим вероятность такого события, используя интегральную теорему Лапласа (7):

$$P(1450\le X\le 1550)\approx\Phi\left(\frac{1550-1500}{\sqrt{375}}\right)-\Phi\left(\frac{1450-1500}{\sqrt{375}}\right)=2\Phi\left(\frac{50}{\sqrt{375}}\right)=$$

$$=2\Phi(2{,}58)=2\cdot 0{,}495060=0{,}99012.$$

Пример 3. Сколько деталей следует проверить, чтобы с вероятностью не менее 0,95, можно было утверждать, что абсолютная величина отклонения частоты годных деталей от вероятности детали быть годной, равной 0,9, не превысит 0,01?

Решение. Используем неравенство (5).

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

$$n=?\quad p=0{,}9,\quad q=0{,}1,\quad \varepsilon=0{,}01,\quad 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}\ge 0{,}95.$$

$$\frac{pq}{n\varepsilon^2}\le 0{,}05,\quad 0{,}9\cdot 0{,}1\le 0{,}05\cdot n\cdot 0{,}01^2,\quad n\ge\frac{0{,}9\cdot 0{,}1}{0{,}05\cdot 0{,}01^2}=18000.$$

Наименьшее число деталей, которые следует проверить, равно 18000.

Задания для аудиторной работы

1. Математическое ожидание количества выпадающих в течение года осадков в данной местности составляет 60 см. Определить вероятность того, что в этой местности осадков выпадает не менее 180 см. (Ответ: не более 0,3333).
2. Суточный расход воды в населенном пункте является СВ X, для которой $\sigma(X) = 10000$ л. Оценить вероятность того, что расход воды в этом пункте в течение дня отклоняется от математического ожидания по абсолютной величине более чем на 25000л. (Ответ: не более 0,16).
3. Стрелок стреляет по мишени 300 раз, причем вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 2/3. Определить вероятность того, что стрелок попадет в мишень от 185 до 215 раз. (Ответ: 0,9342).
4. В результате медицинского осмотра 900 призывников установлено, что их средний вес на 1,2 кг больше среднего веса призывников за один из предшествующих периодов. Какова вероятность этого отклонения, если среднее квадратическое отклонение веса призывников равно 8 кг? (Ответ: 0,000003).
5. Дисперсия каждой из 2500 независимых СВ не превышает пяти. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих СВ от среднего арифметического их математических ожиданий не превысит 0,4. (Ответ: не менее 0,9875).
6. Вероятность появления события A в отдельном испытании равна 0,6. Применив теорему Бернулли, определить число независимых испытаний, начиная с которого вероятность отклонения частоты события от его вероятности по абсолютной величине меньше 0,1, будет больше 0,97. (Ответ: 801).
7. По данным ОТК, брак при выпуске деталей составляет 2,5 %. Пользуясь теоремой Бернулли, оценить вероятность того, что при просмотре партии из 800 деталей будет установлено отклонение от средней доли брака менее 0,005. (Ответ: более 0,878125).

Задания для индивидуальной работы

I.

1. Среднее значение скорости ветра у земли в данном пункте равно 16 км/час. Оценить вероятность того, что в этом пункте скорость ветра не будет превышать 80 км/час. (Ответ: не менее 0,8).
2. Среднее квадратическое отклонение каждой из 2134 независимых СВ не превосходит 4. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих СВ от среднего арифметического их математических ожиданий не превзойдет 0,5. (Ответ: не менее 0,97).

II.

1. Число солнечных дней в году для данной местности является СВ X, $M(X) = 75$ дням. Оценить вероятность того, что в течение года в данной местности будет более 200 солнечных дней. (Ответ: не более 0,75).
2. Принимая вероятность вызревания кукурузного стебля с тремя початками равной 0,75, оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что среди 3000 стеблей опытного участка таких стеблей будет от 2190 до 2310 включительно. (Ответ: более 0,84375).

III.

1. Среднее значение расхода воды в населенном пункте составляет 50000 л/дн. Оценить вероятность того, что в этом населенном пункте расход воды не будет превышать 150000 л/дн. (Ответ: не менее 0,667).
2. Вероятность появления события в одном опыте равна 0,5. Можно ли с вероятностью, большей 0,97 утверждать, что число появлений события в 1000 опытах находится в пределах от 400 до 600? (Ответ: 0,975, можно).

IV.

1. Вероятность наличия зазубрин на металлических брусках, изготовленных для обточки, равна 0,2. Оценить вероятность того, что в партии из 1000 брусков отклонение числа пригодных брусков от 800 не превышает 5 %. (Ответ: более 0,936).
2. Среднесуточное потребление электроэнергии в населенном пункте равно 12000 квт.ч. Оценить вероятность того, что потребление электроэнергии в этом населенном пункте в течение данных суток превзойдет 50000 квт.ч. (Ответ: не более 0,24).

III. Системы случайных величин

3.1. Законы распределения, числовые характеристики двумерных дискретных и непрерывных случайных величин

Распределение системы двух дискретных СВ (X, $У$) может быть задано таблицей

$У$ \ X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}
y_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}
…	…	…	…	…
y_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}

где $P(X=x_i,\ Y=y_i)=p_{ij}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}p_{ij}=1$.

Зная закон распределения двумерной СВ (*X*, *У*), можно найти закон распределения каждой составляющей

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{m}p_{ij},\ i=\overline{1,n}; \qquad P(Y=y_i)=\sum_{i=1}^{n}p_{ij},\ j=\overline{1,m}.$$

Математическим ожиданием системы СВ (*X*, *У*) называется точка $\big(M(X);M(Y)\big)=(m_x,m_y)$, $m_x=M(X)$, $m_y=M(Y)$.

$$m_x=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p_{ij}, \quad m_y=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_i p_{ij}.$$

Дисперсия системы (*X*, *У*) $\big(D(X),D(Y)\big)$, где $D(X)=M\Big((X-m_x)^2\Big)$, $D(Y)=M\Big((Y-m_y)^2\Big)$.

Ковариацией или *корреляционным моментом* системы (*X*, *У*) называется величина $\mu_{xy}=M\big((X-m_x)(Y-m_y)\big)=M(XY)-m_x\cdot m_y$, для дискретной системы $M(XY)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}x_i\,y_j\,p_{ij}$; для непрерывной –

$$M(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\,f(x,y)\,dx\,dy.$$

Свойства ковариации:

1. $\mu_{xy}=\mu_{yx}$.
2. $\mu_{xx}={\sigma_x}^2$; $\mu_{yy}={\sigma_y}^2$.
3. Если *X* и *У* независимые СВ, то $\mu_{xy}=0$.

Число $r_{xy}=\dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$ называется коэффициентом корреляции СВ *X* и *У*.

Его свойства:

1. $r_{xx}=r_{yy}=1$.
2. $\left|r_{xy}\right|\le 1$.
3. Если *X* и *У* независимые СВ, то $r_{xy}=0$.

Если $r_{xy}=0$, то СВ *X* и *У* называются *некоррелированными*.

Непрерывная система СВ (*X* , *У*) обычно определяется плотностью распределения вероятности $f(x,y)$ или функцией распределения $F(x,y)$.

$$F(x,y)=P(X<x,\ Y<y),$$
$$f(x,y)=F''_{xy}(x,y).$$

Свойства $f(x,y)$:

1. $f(x,y) \ge 0$, для $\forall x$ и $y \in R$.
2. $P\big((X,Y) \in D\big) = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$.
3. $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$.
4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$; $f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$ - плотности вероятности составляющих системы.

Если $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, то СВ *X* и *У* независимые.

Задания для аудиторной работы

1. Закон распределения системы двух СВ (*X* , *У*) имеет вид

У \ *X*	0	1	2	3
- 1	0,01	0,06	0,05	0,04
0	0,04	0,24	0,05	0,17
1	0,05	0,10	0,10	0,09

Найти одномерные законы распределения СВ *X* и *У*, их математические ожидания и дисперсии, коэффициент корреляции между *X* и *У*. (Ответ: $m_x = 1{,}9$; $\sigma_x = 0{,}83$; $m_y = 0{,}18$; $\sigma_y = 0{,}63$; $r_{xy} = -0{,}092$).

2. Плотность распределения вероятностей системы СВ (*X* , *У*)

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0,\ y < 0, \\ 6e^{-(3x+2y)}, & \text{если } x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

Найти математические ожидания и средние квадратические отклонения составляющих *X* и *У*, их ковариацию. (Ответ: $\mu_{xy} = 0$).

3. Независимые СВ распределены нормально с параметрами $m_x = 2,\ m_y = -3,\ \sigma_x = 1,\ \sigma_y = 2$. Вычислить вероятность того, что $|X| \le 1$ и $|Y| \le 2$. (Ответ: 0,0476).
4. Система двух СВ (*X* , *У*) равномерно распределена в треугольнике, ограниченном линиями $y = x,\ y = 0,\ x = 2$. Найти $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y$. Вычислить коэффициент корреляции системы. (Ответ: $m_x = 4/3,\ m_y = 2/3,\ \sigma_x = \sigma_y = 0{,}471,\ r_{xy} = 0{,}5$).

Задания для индивидуальной работы

1. Закон распределения системы СВ (X, $У$) задан таблицей

$У$ \ X	2	4	6	8
- 1	0,08	0,05	0,02	0,05
2	0,15	0,25	0,03	0,07
3	0,07	0,09	0,12	0,02

Найти законы распределения СВ X и $У$, входящих в систему. Составить условный закон распределения СВ X при условии $Y = 2$. Найти $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y$ и коэффициент корреляции системы. (Ответ: $m_x = 4{,}3$; $m_y = 1{,}7$; $\sigma_x = 2{,}01$; $\sigma_y = 1{,}42$; $r_{xy} = 0{,}0105$).

2. Плотность распределения вероятностей системы равна

$$f(x, y) = \begin{cases} 36x\,y\,e^{-3(x^2+y^2)}, & \text{если} \quad x \ge 0,\ y \ge 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Найти $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y$. (Ответ: $m_x = m_y = \sqrt{\pi/12}$; $\sigma_x = \sigma_y = 0{,}2675$).

3. Дана таблица

$У$ \ X	- 1	0	1
0	1/12	1/2	1/12
2	1/12	1/6	1/12

Найти законы распределения составляющих, вычислить корреляционный момент и выяснить, будут ли СВ X и $У$ независимы. (Ответ: $\mu_{xy} = 0$, X и $У$ – зависимы).

Замечание. Введем понятие условного распределения СВ X при $Y = y_j$.

X	x_1	x_2	…	x_n
$P\left(x_i/y_j\right)$	$P\left(x_1/y_j\right)$	$P\left(x_2/y_j\right)$	…	$P\left(x_n/y_j\right)$

где условные вероятности определяются по формулам

$$P\left(x_i/y_j\right) = \frac{Pij}{P(y_j)}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = const.$$

Если $P\left(x_i/y_j\right) \ne P(X = x_i)$, то X и $У$ – зависимые СВ.

IV. Элементы математической статистики

4.1. Основные понятия математической статистики. Эмпирические законы распределения. Числовые характеристики выборки.

К основным понятиям математической статистики относятся: генеральная и выборочная совокупности, объем совокупности, варианта, вариационный ряд, частота варианты (определите каждое понятие).

Дискретное статистическое распределение частот выборки определяется таблицей (1)

Таблица 1

Варианты x_i	x_1	x_2	…	x_k
Частоты m_i	m_1	m_2	…	m_k

где $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ - объему выборки.

Частостью или *относительной частотой* варианты x_i называют число $w_i = \frac{m_i}{n}$. Геометрическое изображение таблицы (1) называется *полигоном* частот.

Дана выборка достаточно большого объема, среди вариант которой мало одинаковых. Составляется интервальное распределение частот (таблица 2)

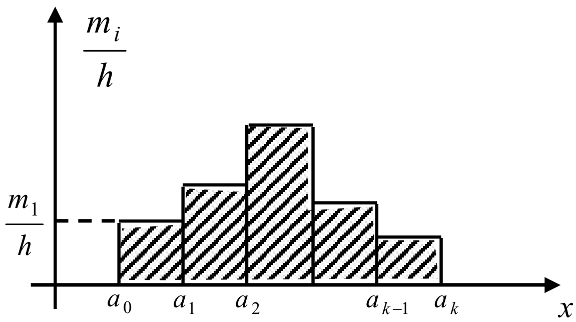
Таблица 2

Интервалы	$a_0 - a_1$	$a_1 - a_2$	…	$a_{k-1} - a_k$
Частоты m_i	m_1	m_2	…	m_k

где $\sum_{i=1}^{k} m_i = 1$. Число интервалов k обычно выбирают не менее 5 и не более 15. Оптимальное число интервалов равно $k = 1 + \log_2 n = 1 + 3{,}322\lg n$.

Тогда длина интервала $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$ (формула Стерджеса), $a_0 = x_{\min}$, $a_1 = a_0 + h, \ldots, a_k = a_0 + kh$.

Геометрическим изображением интервального распределения частот служит гистограмма частот

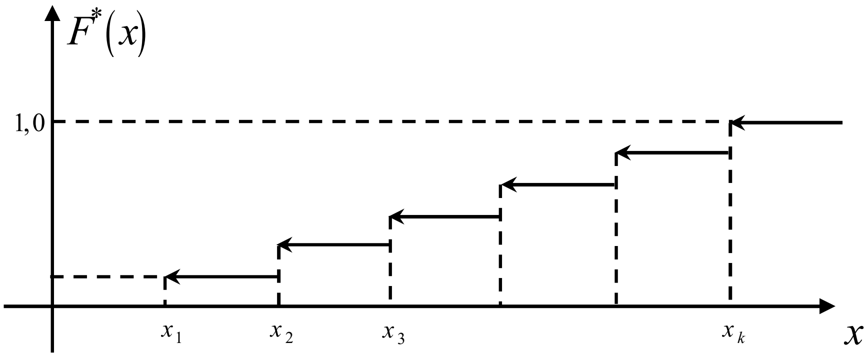


где $\frac{m_i}{h}$ - плотность частоты, h – длина интервалов.

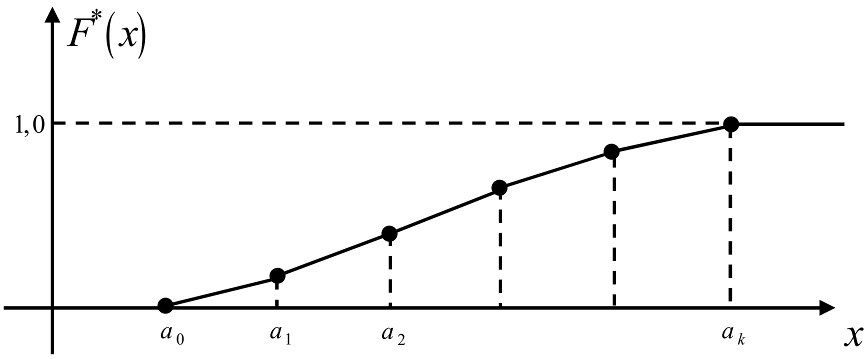
Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ определяет для $\forall x \in R$ относительную частоту события $X < x$. $F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x - число вариант, меньших x, n – объем выборки.

Графики $F^*(x)$:

для дискретного распределения (1):



для интервального распределения (2):



Числовые характеристики выборки: $\overline{x}_B$ - выборочное среднее, D_B - выборочная дисперсия, σ_B - выборочное среднее квадратическое отклонение.

Для распределения (1)

$$\overline{x}_B = \frac{\sum x_i m_i}{n}, \quad D_B = \frac{\sum \left(x_i - \overline{x}_B\right)^2 m_i}{n}, \quad D_B = \overline{x^2} - \overline{x}_B^{\,2},$$

$$\text{где } \overline{x^2} = \frac{\sum x_i^{\,2} m_i}{n}, \quad \sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

Если x_i - числа большие, то вводят так называемые условные варианты $u_i = \frac{x_i - C}{h}$, где $const\,h$ и C определяются по выборке. Считают

$\overline{u}_B$, $D_B(u)$, $\sigma_B(u)$, затем $\overline{x}_B = h \cdot \overline{u}_B + C$, $D_B(x) = h^2 D_B(u)$, $\sigma_B(x) = h\sigma_B(u)$.

Если x_i - числа малые, то $u_i = h x_i$, $h = const$, $\overline{x}_B = \frac{1}{h}\overline{u}_B$, $D_B(x) = \frac{1}{h^2} D_B(u)$.

Для интервального распределения $x_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}$, $i = \overline{1,k}$.

Задания для аудиторной работы

1. В результате проверки партии деталей по сортам получены значения: 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 2, 2, 2, 3. Составить вариационный ряд, статистическое распределение частот (относительных частот), полигон частот, эмпирическую функцию распределения. Найти $\overline{x}_B$, D_B, σ_B. (Ответ: $\overline{x}_B$=1,88; σ_B=0,95).
2. Дана выборка объема 50.

38	60	41	51	33	42	45	21	53	60
68	52	47	46	42	43	57	44	54	59
77	47	28	27	49	49	14	28	61	30
61	35	47	46	58	45	42	21	30	40
67	65	39	35	41	60	54	42	59	60

Составить вариационный ряд, интервальное распределение частот, гистограмму относительных частот. Найти $\overline{x}_B$, D_B, σ_B.

(Ответ: $\overline{x}_B = 46{,}4$; $\sigma_B = 13{,}14$).

Задания для индивидуальной работы

1. Свой вариант аттестационной работы, задание № 1. Составить вариационный ряд, интервальное распределение частот, взяв число интервалов $k = 9$.
2. Построить полигон частот, график эмпирической функции, найти $\overline{x}_B$, D_B, σ_B.
3. Построить гистограмму относительных частот, график эмпирической функции $F^*(x)$. Найти $\overline{x}_B$, D_B, σ_B.

I.

2.

x_i	2	4	5	7	10
m_i	15	20	10	10	45

(Ответ: $\overline{x}_B = 6{,}8$; $\sigma_B = 3{,}16$).

3.

Интервалы	1-5	5-9	9-13	13-17	17-21
Частоты	10	20	50	12	8

(Ответ: $\bar{x}_B = 10{,}52$; $\sigma_B = 4{,}05$).

II.

2.

x_i	2	5	7	10
m_i	5	25	15	5

(Ответ: $\bar{x}_B = 5{,}8$; $\sigma_B = 1{,}99$).

3.

Интервалы	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
Частоты	2	4	8	4	2

(Ответ: $\bar{x}_B = 22{,}5$; $\sigma_B = 5{,}48$).

III.

2.

x_i	2	3	5	6
m_i	10	15	5	20

(Ответ: $\bar{x}_B = 4{,}2$; $\sigma_B = 1{,}66$).

3.

Интервалы	2-7	7-12	12-17	17-22	22-27
Частоты	5	10	25	6	4

(Ответ: $\bar{x}_B = 13{,}9$; $\sigma_B = 5{,}11$).

IV.

2.

x_i	15	20	25	30	10
m_i	10	15	30	20	7

(Ответ: $\bar{x}_B = 22{,}8$; $\sigma_B = 6{,}12$).

3.

Интервалы	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17
Частоты	4	6	20	40	25	10	5

(Ответ: $\bar{x}_B = 6{,}82$; $\sigma_B = 2{,}61$).

4.2. Точечные и интервальные оценки для неизвестных параметров генеральной совокупности

Любой параметр $\widetilde{\theta}$, найденный по выборке, извлеченной из генеральной совокупности СВ *X*, является подходящей оценкой (подходящим приближенным значением) параметра θ этой совокупности, если:

1. $M(\widetilde{\theta}) = \theta$;
2. при данном объеме выборки n имеет минимальную дисперсию, $D(\widetilde{\theta}) = \min$;
3. при $n \to \infty$ $\quad P\left(\left|\widetilde{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right) \to 1$.

Такой параметр $\widetilde{\theta}$ является соответственно *несмещенной, эффективной* и *состоятельной* оценкой параметра θ из генеральной совокупности.

Точечная оценка определяется одним числом, при этом выборка должна быть достаточно большого объема.

Выборочное среднее $\bar{x}_B$ является *несмещенной* и *состоятельной* оценкой генеральной средней $\bar{x}_Г$: $\bar{x}_Г \approx \bar{x}_B$, причем $M(\bar{x}_B) = \bar{x}_Г$ и $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\bar{x}_B - \bar{x}_Г\right| < \varepsilon\right) = 1$.

Несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности является исправленная дисперсия S^2.

$D_Г \approx S^2$, где $S^2 = \dfrac{n}{n-1} \cdot D_B$, $\quad M(S^2) = D_Г$.

Генеральное среднее квадратическое отклонение не имеет несмещенных оценок.

$\sigma_Г \approx \sigma_B$ или $\sigma_г \approx S$, но $M(\sigma_B) \neq \sigma_г$ и $M(S) \neq \sigma_г$.

При $n < 30$ применяются интервальные оценки.

Интервал $\left(\widetilde{\theta} - \delta, \widetilde{\theta} + \delta\right)$, покрывающий параметр θ с заданной вероятностью (надежностью) γ, называется доверительным.

$P\left(\widetilde{\theta} - \delta < \theta < \widetilde{\theta} + \delta\right) = P\left(\left|\theta - \widetilde{\theta}\right| < \delta\right) = \gamma$, где δ - точность оценки.

Пусть СВ *X* подчиняется нормальному распределению с параметрами $a = M(X)$ и $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, т.е. $X \in N(a;\sigma)$.

а) Доверительный интервал для *a* при *известном* σ:

$$\bar{x}_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ где } 2\Phi(t) = \gamma$$

$$\text{или } P\left(\left|a - \bar{x}_B\right| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

б) Доверительный интервал для a при *неизвестном* σ:

$$\bar{x}_B - \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}},$$

где число $t_\gamma = t(\gamma, n)$ находим по таблице 3 распределения Стьюдента (стр. 74), S – исправленное среднее квадратическое отклонение, n – объем выборки, γ - надежность.

в) Доверительный интервал для σ :

$S(1-q) < \sigma < S(1+q)$, если $q < 1$, $0 < \sigma < S(1+q)$, если $q > 1$.

Число $q = q(\gamma, n)$ находим по таблице 6 (стр. 77).

Задания для аудиторной работы

1. Найти несмещенные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии по выборке

x_i	1250	1275	1280	1300
m_i	20	25	50	5

(Ответ: $\overline{x_Г} \approx 1274{,}5$; $D_Г \approx 168{,}88$).

2. В результате пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены значения (в мм): 92, 94, 103, 105, 106. Найти $\bar{x}_B, D_B, \sigma_B, S^2, S$. (Ответ: $\bar{x}_B = 100$, $D_B = 34$, $S^2 = 42{,}5$).
3. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$, $\bar{x}_B = 10{,}2$, объем выборки $n = 16$. (Ответ: $7{,}64 < a < 12{,}76$).
4. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности по $\bar{x}_B$ будет равна 0,2, если $\sigma = \sigma(X) = 1{,}5$. (Ответ: 179).
5. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	-0,5	-0,4	-0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
m_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение нормально распределенного признака X при помощи доверительных интервалов. (Ответ: $-0{,}04 < a < 0{,}88$; $0{,}32 < \sigma < 1{,}04$).

6. Из генеральной совокупности нормально распределенного признака X извлечена выборка объема n, найдено исправленное среднее квадратическое отклонение S. Определить доверительный интервал, покрывающий $\sigma_Г$ с надежностью $\gamma = 0{,}999$, если:

   а) $n = 10,\ S = 5{,}1$; б) $n = 50,\ S = 14$. (Ответ: а) (0; 14,28); б) (7,98; 20,02)).

Задания для индивидуальной работы

1. По заданному распределению найти несмещенные оценки для $x_Г$ и $D_Г$.
2. $X \in N(a, \sigma)$. Составить доверительный интервал для a, если известны $\gamma,\ \overline{x}_B,\ n$ и σ.
3. $X \in N(a, \sigma)$. Составить доверительный интервал для σ, если известны γ, n и S.
4. $X \in N(a, \sigma)$. Составить доверительные интервалы для a и σ с надежностью 0,95 для данной выборки.

I.

1.

x_i	2560	2600	2620	2650	1700
m_i	7	8	15	9	6

2. $\gamma = 0{,}99,\ \ \sigma = 5,\ \ \overline{x}_B = 16{,}8,\ \ n = 25$.
3. $\gamma = 0{,}95,\ \ n = 16,\ \ s = 1$.
4.

x_i	-2	1	2	3	4	5
m_i	2	1	2	2	2	1

II.

1.

x_i	340	360	375	380	390
m_i	10	20	30	12	8

2. $\gamma = 0{,}95,\ \ \sigma = 5,\ \ \overline{x}_B = 14,\ \ n = 25$.
3. $\gamma = 0{,}999,\ \ n = 50,\ \ s = 16$.
4.

x_i	-3	-1	1	2	3	4
m_i	1	2	2	1	2	2

III.

1.

x_i	184	189	193	196	199
m_i	8	10	20	15	7

2. $\gamma = 0{,}99,\ \sigma = 6,\ \bar{x}_B = 30{,}1,\ n = 9$.

3. $\gamma = 0{,}999,\ n = 12,\ s = 0{,}6$.

4.

x_i	-2	0	1	2	3	4
m_i	2	1	2	2	2	1

IV.

1.

x_i	235	261	282	304	317
m_i	6	8	18	13	5

2. $\gamma = 0{,}999,\ \sigma = 8,\ \bar{x}_B = 42{,}8,\ n = 16$.

3. $\gamma = 0{,}99,\ n = 10,\ s = 0{,}8$.

4.

x_i	0	1	2	4	5	6
m_i	2	2	2	1	2	1

4.3. Статистическая проверка гипотез. Критерии Пирсона и Колмогорова.

Из некоторой генеральной совокупности взята выборка достаточно большого объема n и составлено или дискретное (1), или интервальное (2) распределение частот:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
m_i	m_1	m_2	$\dots$	m_k

(1)

Интервалы	$a_0 - a_1$	$a_1 - a_2$	$a_2 - a_3$	$\dots$	$a_{k-1} - a_k$
m_i	m_1	m_2	m_3	$\dots$	m_k

(2)

где $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i = n$, m_i - эмпирические частоты, $i = \overline{1,k}$.

Теоретические (*выравнивающие*) частоты m_i' определяются по формуле: $m_i' = n \cdot P_i,\ i = \overline{1,k}$,

где $P_i = P(X = x_i)$ для распределения (1) и $P_i = P(a_{i-1} < X < a_i)$ - для распределения (2).

Если $X \in N(a, \sigma)$, где $a \approx \bar{x}_B$, $\sigma \approx \sigma_B$, то $P_i = \dfrac{h}{\sigma_B} \cdot \varphi\left(\dfrac{a_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right)$, где

$h = x_i - x_{i-1}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ или

$$P_i = P\ \ (a_{i-1} < X < a_i) = \Phi\ \left(\frac{a_i - \overline{x_B}}{\sigma_B}\right) - \Phi\ \left(\frac{a_{i-1} - \overline{x_B}}{\sigma_B}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt$.

Плотность вероятности для СВ X равна $f(x) = \frac{1}{\sigma_B \sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x - \bar{x}_B)^2}{2\sigma_B^2}}$.

Если СВ X имеет показательное распределение, то плотность вероятности $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$ и $\lambda = \frac{1}{\bar{x}_B}$,

$P_i = P(a_{i-1} < X < a_i) = e^{-\frac{a_{i-1}}{\bar{x}_B}} - e^{-\frac{a_i}{\bar{x}_B}}$.

<u>Критерий Пирсона.</u> При уровне значимости $\alpha = 1 - \gamma$ выдвигаем нулевую гипотезу H_0 и ей альтернативную гипотезу H_1.

H_0: в генеральной совокупности признака X есть нормальное (показательное) распределение,

H_1: в генеральной совокупности признака X нет выбранного распределения.

Составляем выборочную статистику $\chi^2_{набл.} = \sum \frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'}$.

По таблице 4 «Критические точки распределения «хи-квадрат» (стр. 75) находим $\chi^2_{крит.}(\alpha,\ k - r - 1)$, где k – число пар значений в таблице (1) или число интервалов в таблице (2), $r = 2$ для нормального распределения, $r = 1$ - для показательного распределения.

Если $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{крит.}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу H_0, эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо.

Если $\chi^2_{набл.} > \chi^2_{крит.}$, то гипотезу H_0 отвергают, различие в частотах m_i и m_i' значимо.

<u>Критерий Колмогорова</u> применяется только для проверки гипотез о непрерывном распределении.

При уровне значимости α проверяются гипотезы

H_0: в генеральной совокупности действует теоретическая функция $F(x)$ выбранного распределения.

H_1: выбранное распределение не имеет такой функции распределения.

Составляем выборочную статистику

$$\lambda_{опытн.} = \sqrt{n} \cdot \max_{1 \le i \le k} \left| F^*(x_i) - F(x_i) \right|,$$

где $F^*(x)$ - эмпирическая функция распределения, $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$.

$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right)$ для нормального распределения.

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$, $\lambda = \frac{1}{\bar{x}_B}$ для показательного распределения.

По таблице значений функции Колмогорова находим $\lambda_{крит.}$. Если $\lambda_{опытн.} < \lambda_{крит.}$, то принимаем гипотезу H_0, если $\lambda_{опытн.} > \lambda_{крит.}$, то H_0 отвергается.

Пример. В результате испытания 200 элементов на длительность работы получено распределение

Время, t (час)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
Частота, m_i	133	45	15	4	2	1

Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о том, что время работы элементов распределено по показательному закону.

Известно, что плотность показательного распределения имеет вид

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0, \quad \lambda = \frac{1}{t_B}. \;\; P\;\; (a < t < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Время, t	m_i	t_i	$t_i \cdot m_i$	P_i	200 P_i	$\frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'}$
0-5	133	2,5	332,5	$1 - 0{,}3734 = 0{,}6266$	125,3	0,473
5-10	45	7,5	337,5	$0{,}3734 - 0{,}1395 = 0{,}2339$	46,78	0,068
10-15	15	12,5	187,5	$0{,}1395 - 0{,}0521 = 0{,}0874$	17,48	0,352
15-30	7	22,5	157,5	$0{,}0521 - 0{,}0027 = 0{,}0494$	9,88	0,840
$\sum$	200		1015		199,44	1,733

Интервалы, где $m_i < 5$, объединили в один от 15 до 30.

$$t_B = \frac{1015}{200} = 5{,}075; \quad \lambda = 0{,}197.$$

Плотность распределения имеет вид $f(t) = 0{,}197 e^{-0{,}197t} \quad t \ge 0$.

По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверяем, значимо или нет различие в частотах m_i и m_i'.

$$\chi^2_{набл.} = \sum \frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'} = 1{,}733;$$

$$\chi^2_{крит.}(0{,}05;\, 4-1-1) = \chi^2_{крит.}(0{,}05;2) = 6{,}00.$$

Так как $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{крит.}$, то различие в m_i и m_i' незначимо, нет оснований отвергать гипотезу о показательном распределении в генеральной совокупности.

Проверим эту гипотезу по критерию Колмогорова. Находим эмпирическую функцию распределения $F^*(a_i)$ и теоретическую функцию распределения $F(a_i) = 1 - e^{-0{,}197 a_i}$.

a_i	m_i	$F^*(a_i)$	$F(a_i)$	$\lvert F^*(a_i) - F(a_i)\rvert$
0		0	0	0
	133			
5		0,665	$1-0{,}3734=0{,}6266$	0,0384
	45			
10		0,890	$1-0{,}1395=0{,}8605$	0,0295
	15			
15		0,965	$1-0{,}0521=0{,}9479$	0,0171
	7			
30		1,000	$1-0{,}0027=0{,}9973$	0,0027

$$\lambda_{опытн.} = \sqrt{200}\cdot \max\left| F^*(a_i) - F(a_i)\right| = \sqrt{200}\cdot 0{,}0384 = 0{,}543.$$

$$\lambda_{крит.}(0{,}05) = 1{,}358; \quad 0{,}543 < 1{,}358.$$

Следовательно, гипотеза о показательном распределении не отвергается.

Задания для аудиторной работы

1. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты.

m_i	6	12	16	40	13	8	5
m_i'	4	11	15	43	15	6	6

(Ответ: H_0 принимается).

2. Используя критерий Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, проверить гипотезу о виде распределения в генеральной совокупности, выдвинув ее для заданного распределения частот.

x_i	15	20	25	30	35
m_i	7	10	17	13	8

(Ответ: $\overline{x}_B = 25{,}45$; $s = 6{,}18$; $\chi^2_{набл.} = 3{,}7$).

3. Используя критерии Пирсона и Колмогорова при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности χ с заданным эмпирическим распределением, если:

Интервал	(-20;-10)	(-10; 0)	(0; 10)	(10; 20)	(20;30)	(30;40)	(40;50)
Частота	20	47	80	89	40	16	8

(Ответ: $\overline{x}_B = 10{,}4$; $s = 13{,}67$; $\chi^2_{íàáë.} = 4{,}82$; $\lambda_{îïûò} = 0{,}497$).

4. Используя критерии Пирсона и Колмогорова при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, проверить, согласуется ли гипотеза о показательном распределении с заданным эмпирическим распределением, если:

Интервал	0-90	90-180	180-270	270-360	360-450	450-540	540-630
Частота	50	33	21	8	4	2	2

(Ответ: $\lambda = 0{,}0057$; $\chi^2_{набл.} = 0{,}94$; $\lambda_{опытн.} = 1{,}135$).

Задания для индивидуальной работы

1. Используя критерий Пирсона при $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности признака X с эмпирическим распределением выборки.
2. Используя критерии Пирсона и Колмогорова при $\alpha = 0{,}05$, проверить, согласуется ли гипотеза о: а) нормальном распределении; б) показательном распределении генеральной совокупности с заданным эмпирическим распределением.
3. Свое задание № 2 из АР.

I.

1

x_i	m_i
5	15
7	26
9	30
11	40
13	36
15	25
17	18

2 а)

Интервалы	m_i
3-8	6
8-13	8
13-18	15
18-23	20
23-28	16
28-33	8
33-38	7

2 б)

Интервалы	m_i
0-80	48
80-160	30
160-240	21
240-320	9
320-400	7
400-480	3
480-560	2

II.

1

x_i	m_i
0,5	8
0,9	26
1,3	30
1,7	24
2,1	20
2,5	7

2 а)

Интервалы	m_i
6-16	8
16-26	9
26-36	17
36-46	35
46-56	16
56-66	8
66-76	7

2 б)

Интервалы	m_i
0-60	45
60-120	32
120-180	20
180-240	10
240-300	8
300-360	2
360-420	1

III.

1

x_i	m_i
4	7
6	14
8	23
10	35
12	25
14	12
16	6

2 а)

Интервалы	m_i
4-12	9
12-20	12
20-28	15
28-36	22
36-44	18
44-52	14
52-60	10

2 б)

Интервалы	m_i
0-50	50
50-100	45
100-150	32
150-200	20
200-250	11
250-300	4
300-350	1

IV.

1

x_i	m_i
2,1	11
2,4	20
2,7	32
3,0	35
3,3	30
3,6	18
3,9	9

2 а)

Интервалы	m_i
5-15	13
15-25	25
25-35	33
35-45	40
45-55	32
55-65	20
65-75	7

2 б)

Интервалы	m_i
0-70	47
70-140	33
140-210	20
210-280	12
280-350	8
350-420	3
420-490	2

4.4. Линейная корреляционная зависимость. Прямые регрессии Y на X и X на Y. Значимость r_B.

Между СВ X и Y существует корреляционная зависимость, если с изменением одной переменной меняется условная средняя другой переменной, т.е. $\overline{y}_x = f(x)$ или $\overline{x}_y = \varphi(y)$.

Условной средней $\overline{y}_x$ называется среднее арифметическое всех значений y, соответствующих данному значению *x*.

Уравнение прямой регрессии Y на X имеет вид

$$\overline{y}_x - \overline{y}_B = r_B \frac{\sigma_B(y)}{\sigma_B(x)} \cdot (x - \overline{x}_B) \qquad (1)$$

Уравнение прямой регрессии X на Y имеет вид

$$\overline{x}_y - \overline{x}_B = r_B \frac{\sigma_B(x)}{\sigma_B(y)} \cdot (y - \overline{y}_B), \qquad (2)$$

где $r_B = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x}_B \cdot \overline{y}_B}{\sigma_B(x) \cdot \sigma_B(y)}$ - *выборочный коэффициент корреляции*, причем $|r_B| \le 1$.

В случае несгруппированных данных $\overline{x}_B = \dfrac{\sum x_i}{n}$, $\overline{x^2} = \dfrac{\sum x^2}{n}$, $\sigma_B{}^2(x) = \overline{x^2} - (\overline{x}_B)^2$, $\overline{y}_B = \dfrac{\sum y_i}{n}$, $\overline{y^2} = \dfrac{\sum y^2}{n}$, $\sigma_B{}^2(y) = \sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}_B{}^2}$, $\overline{xy} = \dfrac{\sum x_i y_i}{n}$.

Если рассматривается случай сгруппированных данных, то получаем корреляционную таблицу. Формулы (1) и (2) остаются, меняются лишь расчетные формулы для числовых характеристик.

$$\overline{x}_B = \frac{\sum x_i m_x}{n}, \ \overline{x^2} = \frac{\sum x_i{}^2 m_x}{n}, \ \sigma_B{}^2(x) = \overline{x^2} - (\overline{x}_B)^2,$$

$$\overline{y}_B = \frac{\sum y_j m_y}{n}, \ \overline{y^2} = \frac{\sum y_j{}^2 m_y}{n}, \ \overline{xy} = \frac{\sum \sum x_i y_j m_{xy}}{n}.$$

Прямые регрессии (1) и (2) разные, они проходят через точку $(\overline{x}_B, \overline{y}_B)$. Чем меньше угол между ними, тем теснее линейная зависимость между X и Y.

Значимость выборочного коэффициента корреляции.

При уровне значимости α выдвигаем гипотезы:

H_0: $r_Г = 0$ (в генеральной совокупности нет линейной зависимости или r_B - незначимый коэффициент),

H_0: $r_Г \ne 0$ (линейная зависимость между X и Y в генеральной совокупности есть, т.е. r_B - значимый коэффициент).

Составляем выборочную статистику $t_{набл.} = \dfrac{r_B \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_B{}^2}}$, n – объем выборки.

По таблице 4 «Критические точки распределения Стьюдента» (стр. 75) находим $t_{крит.}(\alpha; n-2)$.

Если $|t_{набл.}| < t_{крит.}$, то гипотезу H_0 принимаем.

Если $|t_{набл.}| > t_{крит.}$, то гипотезу H_0 отвергаем и принимаем гипотезу H_1.

Число $r_B{}^2$ называется *коэффициентом детерминации,* который определяет долю рассеивания наблюдаемых значений зависимой СВ y_i относительно значений, полученных из эмпирического уравнения регрессии Y на X**.** Остальная доля отклонений может быть вызвана либо случайными ошибками, либо тем, что линейная регрессионная модель плохо согласуется с экспериментальными данными.

Пример. По 10 предприятиям собраны данные о затратах на ремонт оборудования y (млн. руб.) в зависимости от времени его использования x (годы). Требуется:

1. Найти $\overline{x}_B$, $\overline{y}_B$, $\sigma_B(x)$, $\sigma_B(y)$;
2. коэффициент корреляции r_B и записать уравнения прямых регрессии; оценить значимость r_B;
3. построить корреляционное поле и графики прямых;
4. вычислить коэффициент детерминации, пояснить его смысл;
5. какие средние затраты на ремонт оборудования можно ожидать при девятилетнем его использовании?

x, годы	4	5	5	6	8	10	8	7	11	6
y, ден. ед.	1,5	2,0	1,4	2,3	2,7	4,0	2,3	2,5	6,6	1,7

Составим расчетную таблицу.

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
4	1,5	16	2,25	6,0
5	2,0	25	4,0	10,0
5	1,4	25	1,96	7,0
6	2,3	36	5,29	13,8
8	2,7	64	7,29	21,6
10	4,0	100	16,00	40,0
8	2,3	64	5,29	18,4
7	2,5	49	6,25	17,5
11	6,6	121	43,56	72,6
6	1,7	36	2,89	10,2
$\sum$ 70	27,0	536	94,78	217,1

$$\overline{x}_B = \frac{70}{10} = 7; \quad \overline{x^2} = \frac{536}{10} = 53{,}6; \quad \sigma_B^2(x) = 53{,}6 - 49 = 4{,}6;$$

$$\sigma_B(x) = 2{,}145; \quad \overline{y_B} = \frac{27}{10} = 2{,}7; \quad \overline{y^2} = \frac{94{,}78}{10} = 9{,}478;$$

$$\sigma_B^2(y) = 9{,}478 - 7{,}29 = 2{,}188; \quad \sigma_B(y) = 1{,}479.$$

$$\overline{xy} = \frac{217{,}1}{10} = 21{,}71; \quad r_B = \frac{21{,}71 - 7 \cdot 2{,}7}{2{,}145 \cdot 1{,}479} = 0{,}886.$$

Величина коэффициента r_B говорит о достаточно тесной линейной зависимости между СВ X и Y в выборке.

Составляем уравнение прямой регрессии Y на X:

$$\overline{y_x} - 2{,}7 = 0{,}886 \cdot \frac{1{,}479}{2{,}145} \cdot (x - 7) \text{ или } \overline{y_x} = 0{,}61x - 1{,}58.$$

Уравнение прямой регрессии X на Y:

$$\overline{x_y} - 7 = 0{,}886 \cdot \frac{2{,}145}{1{,}479} \cdot (y - 2{,}7) \text{ или } \overline{x_y} = 1{,}28y + 3{,}53.$$

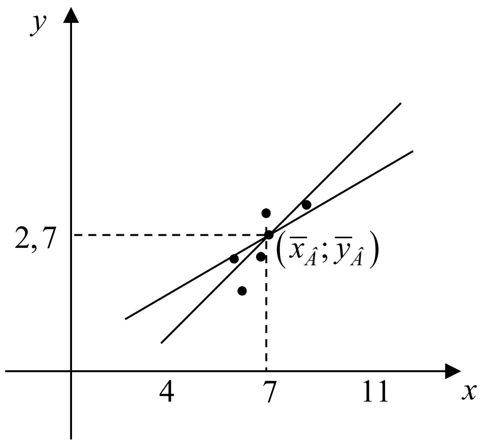
Построим прямые регрессии и данные таблицы (x_i, y_i).

$\overline{y_x} = 0{,}61x - 1{,}58$.

x	4	11
$\overline{y_x}$	0,86	5,13

$\overline{x_y} = 1{,}28y + 3{,}53$.

y	1,44	6,6
$\overline{x_y}$	5,32	11,98



Проверим $r_B = 0{,}886$ на значимость при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

$H_0: r_{ген.} = 0,$

$H_1: r_{ген.} \neq 0.$

$$t_{набл.} = \frac{0{,}886\sqrt{10-2}}{\sqrt{1 - 0{,}886^2}} = 5{,}404,$$

$t_{крит.}(0{,}05;\ 8) = 2{,}31;$

т.к. 5,404 > 2,31, то гипотеза H_1 принимается, в генеральной совокупности между случайными величинами X и Y есть линейная зависимость.

Коэффициент корреляции $r_B^2 = (0{,}886)^2 = 0{,}78$. Поэтому 78 % рассеивания зависимой переменной Y объясняется линейной регрессией Y на X, а 22 % рассеивания Y остаются необъяснимыми (или случайные ошибки эксперимента или линейная регрессионная модель не очень хорошо согласуется с экспериментальными данными).

Если $x = 9$, то $\overline{y_x} = 0{,}61 \cdot 9 - 1{,}58 = 3{,}91$(млн. руб.) – такие расходы на ремонт можно ожидать при девятилетнем использовании оборудования.

Задания для аудиторной работы

Для данных таблиц 1-3 значений двух СВ X и Y , между которыми существует линейная корреляционная зависимость, определить:

1. числовые характеристики СВ X и Y;
2. коэффициент корреляции r_B , составить уравнение прямых регрессии;
3. построить их графики, корреляционное поле;
4. оценить тесноту корреляционной зависимости и значимость r_B .

1.

x_i	4	4,5	5,5	6	6,5	7	7,2	7,8	8	10
y_i	2	3	3	4	4	5	5	4	5	6

$\overline{y_x}(9) = ?$ (Ответ: $r_B = 0{,}916$, $\overline{y_x} = 0{,}62x - 0{,}03$.).

2.

У / X	0	1	2	3	4	5	6	7	m_x
25	2	1							3
35		5	3						8
45			4	2	4				10
55					2	3	1	5	11
65							6	2	8
m_y	2	6	7	2	6	3	7	7	40

(Ответ: $r_B = 0{,}90$, $\overline{y_x} = 0{,}17x - 4{,}3$, $\overline{x_y} = 4{,}8y + 29{,}4$).

3.

У / X	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	m_y
120-140				3	4	7
140-160			2	5	2	9
160-180		6	10	4	2	22
180-200	1	4	7			12
m_x	1	10	19	12	8	50

$\overline{y_x}(46) = ?$

(Ответ: $r_B = -0{,}675$, $\overline{y_x} = -1{,}27x + 214$, $\overline{y_x}(46) = 155{,}6$).

Задания для индивидуальной работы

1. Решите задание № 3 из аттестационной работы.
2. Компания контролирует 10 фабрик, выпускающих однородную продукцию. В таблице приведены данные о производительности труда y_i (тысячи изделий в год на одного работающего) и энерговооруженности фабрики x_i (тыс. квт.ч. в год на одного работающего) $i = \overline{1,10}$. Составить уравнения прямых регрессии, вычислить r_B и коэффициент детерминации (пояснить их смысл), найти среднюю производительность труда $\overline{y_x}$, если $x = l$.

I.

x_i	10	12	12,5	13	14	14,5	15,2	15,8	16	16,5
y_i	7	6	7	8	7	8	10	11	11	12

$l = 15{,}5$. (Ответ: $\overline{y_x} = 0{,}88x - 3{,}51$).

II.

x_i	7	7,3	8	8,3	9	9,7	10	11	11,7	12
y_i	2	2	3	2	4	4	5	5	6	6

$l = 9{,}5$. (Ответ: $\overline{y_x} = 0{,}86x - 4{,}18$).

III.

x_i	6	6,3	7	7,3	8	8,7	9	9,5	10,7	11
y_i	12	12	12	11	13	13	14	14	15	16

$l = 8{,}3$. (Ответ: $\overline{y_x} = 0{,}82x + 6{,}36$).

IV.

x_i	2	2,5	3	3,4	3,6	4	4,5	5	5,2	6,8
y_i	3	2	2	3	3	4	4	4,5	4,5	5

$l = 6$. (Ответ: $\overline{y_x} = 0{,}65x + 0{,}90$).

V. Понятие о цепях Маркова. Матрица переходов, предельные вероятности состояний.

Пусть некоторая система S может находиться в одном из состояний $S_1, S_2, ..., S_n$ и в дискретные моменты времени $t_1, t_2, ..., t_k$ может переходить из состояния в состояние. Обозначим через $S(t_k)$ состояния системы в момент времени t_k, $S(t_k) \in \{S_1, S_2, ..., S_n\}$ и через $p_{ij}(k)$ условную вероятность перехода системы из состояния S_i, в котором она находилась в момент времени t_{k-1}, в состояние S_j в момент времени t_k:

$$p_{ij}(k) = P\Big(\big(S\ \ (t_k) = S_j\big) \big/ \big(S\ \ (t_{k-1}) = S_i\big)\Big).$$

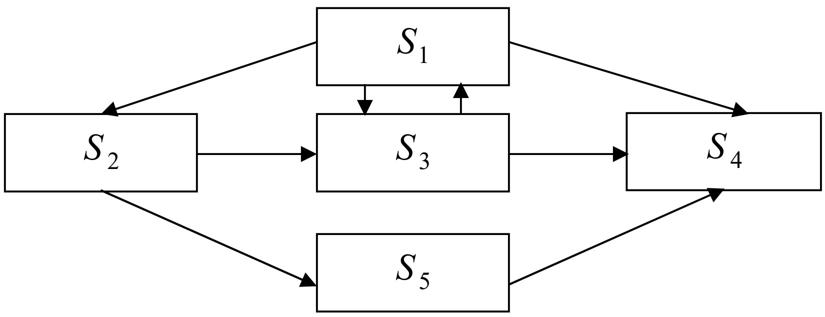
Последовательность переходов $S(0),\ S(1),\ S(2),...,\ S(k),...$ называется марковской цепью, вероятности $p_{ij}(k)$ - переходными вероятностями. Если переходные вероятности не зависят от номера шага, то марковская цепь называется однородной, в противном случае – неоднородной.

Матрица, элементами которой являются вероятности перехода для каждого состояния за один шаг, называется *матрицей вероятностей перехода*

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

При анализе марковских процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться так называемым графом состояний. Каждое состояние S изображаем прямоугольником, а возможные переходы из состояния в состояние – стрелками, соединяющими эти прямоугольники.

Например, граф системы, имеющий пять различных фазовых состояний, может иметь вид



Для каждой строки матрицы (1) имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \qquad \left(i = \overline{1,n}\right)$$

Вероятность p_{ii} того, что система не выйдет из состояния S_i, определяется равенством

$$p_{ii} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} p_{ij}$$

Матрица (1) задает условные вероятности перехода из состояния в состояние за один шаг: $P = P(1)$.

Матрица $P(m)$ условных вероятностей перехода из состояния в состояние за m шагов находится по формуле $P(m) = P^m$.

Для описания марковского процесса, протекающего в системе с дискретными состояниями $S_1, S_2, ..., S_n$ и дискретным временем, пользуются вероятностями состояний $p_1(k), p_2(k), ..., p_n(k)$ того, что система S через k шагов находится в состоянии $S_j^{(k)}$ $(j = 1, 2, ..., n)$.

Вероятности состояний удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(k) = 1.$$

Если задана матрица-строка $\overrightarrow{v_0}$ вероятностей состояний системы в начальный момент, то вектор

$$\overrightarrow{v_m} = \overrightarrow{v_0}\, P(m) = \overrightarrow{v_0}\, P^m$$

задает вероятности состояний системы через m шагов.

Марковский процесс называется регулярным, если система может перейти в любое состояние за конечное число шагов.

Если марковская цепь регулярна, то при $m \to +\infty$ она независимо от начального состояния будет функционировать в установленном режиме. Такие вероятности $\overrightarrow{v_ф} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ называются предельными или финальными и могут быть найдены из системы уравнений

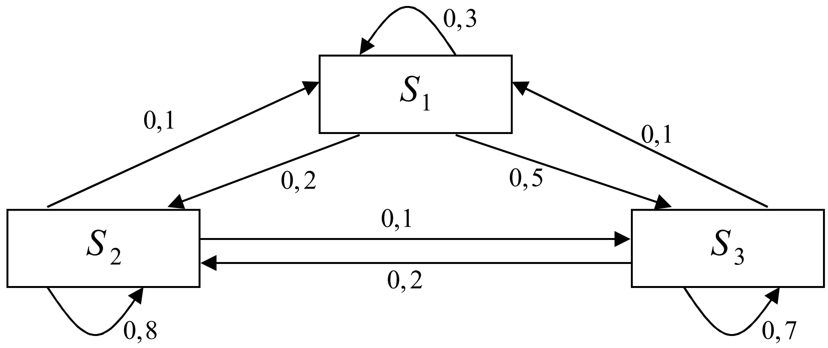
$$\begin{cases} (p_1, p_2, ..., p_n) \cdot P = (p_1, p_2, ..., p_n), \\ p_1 + p_2 + ... + p_n = 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Пример. Заданы матрица вероятностного перехода цепи Маркова и вектор $\overrightarrow{v_0}$ начального распределения вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_0} = (0{,}5;\, 0{,}3;\, 0{,}2).$$

Требуется: 1) построить граф состояний системы; 2) найти вектор $\overrightarrow{v_2}$ распределения вероятностей состояний системы через 2 шага; 3) найти предельные вероятности.

Решение. 1) Система может находиться в одном из трех состояний: S_1, S_2, S_3, при этом элемент p_{ij} матрицы P задает вероятность перехода из состояния S_i в S_j за один шаг. Поэтому граф состояний системы имеет вид



2) Вектор $\overrightarrow{v_2}$ распределения вероятностей состояний системы через 2 шага находится по формуле $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_0} \cdot P^2$.

$$\overrightarrow{v_2} = \left((0{,}5; 0{,}3;\ 0{,}2) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} = (0{,}2;\ 0{,}38;\ 0{,}42) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} = (0{,}14;\ 0{,}428;\ 0{,}432).$$

3) Для нахождения предельных вероятностей p_1, p_2, p_3 решим систему уравнений

$$\begin{cases} (p_1, p_2,\ \ldots\ , p_n) \cdot (P - E) = 0, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \qquad (3)$$

$$(p_1,\ p_2, p_3) \cdot \left(\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (0,\ 0,\ 0)$$

$$(p_1,\ p_2, p_3) \cdot \begin{pmatrix} -0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}3 \end{pmatrix} = (0,\ 0,\ 0)$$

После умножения матриц получим систему

$$\begin{cases} -0{,}7p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}1p_3 = 0, \\ 0{,}2p_1 - 0{,}2p_2 + 0{,}2p_3 = 0, \\ 0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 - 0{,}3p_3 = 0. \end{cases}$$

Отбросим первое уравнение (сумма второго и третьего уравнений даст первое, умноженное на (-1)).

Система (3) примет вид

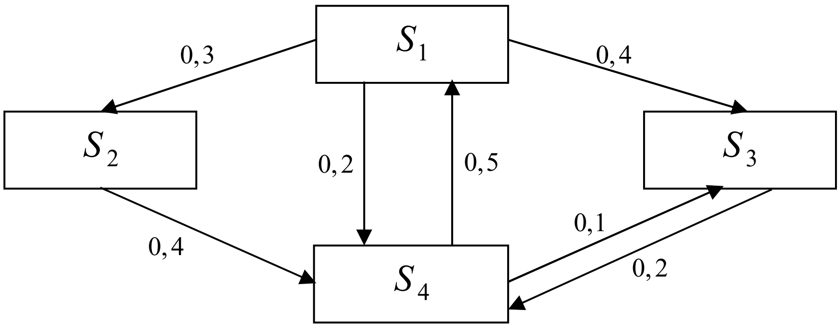
$$\begin{cases} 0,2p_1 - 0,2p_2 + 0,2p_3 = 0, \\ 0,5p_1 + \ \ 0,1p_2 - \ \ 0,3p_3 = 0, \\ \quad p_1 + \quad\ \ p_2 \ + \quad\ \ p_3 \ = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 - p_2 + p_3 = 0, \\ 5p_1 + p_2 - 3p_3 = 0, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -8 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -8 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 1 - 0,5 - 0,375 = 0,125, \\ p_2 = 1/2 = 0,5, \\ p_3 = 3/8 = 0,375. \end{cases}$$

Вектор предельных вероятностей $\overrightarrow{\nu_{\phi}} = (0{,}125; 0{,}5;\ 0{,}375)$.

Задания для аудиторной работы

1. Изучаемая система может находиться в состояниях S_1, S_2, S_3, S_4. Переход из состояния в состояние происходит по схеме однородной цепи Маркова. Граф состояний показан на рисунке. Составить матрицу перехода.



2. По некоторой цели произведено три выстрела в моменты времени t_1, t_2, t_3. Возможные состояния цели: S_1 - цель невредима; S_2 - цель незначительно повреждена; S_3 - цель получила существенные повреждения; S_4 - цель повреждена полностью. В начальный момент цель находилась в состоянии S_1. Определить вероятности состояний цели после трех выстрелов, если переходные вероятности задаются матрицей перехода

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Ответ: $p_1(3) = 0{,}008$; $p_2(3) = 0{,}112$; $p_3(3) = 0{,}164$; $p_4(3) = 0{,}716$.).

Задания для индивидуальной работы

Заданы матрица P вероятностного перехода цепи Маркова и вектор $\overrightarrow{v_0}$ начального распределения вероятностей.

Требуется: 1) построить граф состояний системы; 2) найти вектор $\overrightarrow{v_2}$ распределения вероятностей состояния системы через 2 шага; 3) найти предельные вероятности состояний системы.

I. $P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_0} = (0{,}4;\, 0{,}5;\, 0{,}1)$.

(Ответ: $\overrightarrow{v_2} = (0{,}529;\, 0{,}225;\; 0{,}246)$; $\overrightarrow{v_ф} = (0{,}537;\; 0{,}222;\; 0{,}241)$.).

II. $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_0} = (0{,}1;\, 0{,}3;\, 0{,}6)$.

(Ответ: $\overrightarrow{v_2} = (0{,}429;\, 0{,}292;\; 0{,}279)$; $\overrightarrow{v_ф} = (0{,}552;\; 0{,}207;\; 0{,}241)$.).

III. $P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_0} = (0{,}5;\, 0{,}3;\, 0{,}2)$.

(Ответ: $\overrightarrow{v_2} = (0{,}334;\, 0{,}494;\; 0{,}172)$; $\overrightarrow{v_ф} = (0{,}229;\; 0{,}604;\; 0{,}167)$.).

IV. $P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_0} = (0{,}5;\, 0{,}4;\, 0{,}1)$.

(Ответ: $\overrightarrow{v_2} = (0{,}377;\, 0{,}340;\; 0{,}283)$; $\overrightarrow{v_ф} = (0{,}319;\; 0{,}298;\; 0{,}383)$.).

Статистические таблицы.

1. Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Сотые доли

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2331	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001	0001

При $x > 4$ принимают $\varphi(x) = 0$.

2. Таблица значений функции $\Phi\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.45	0.1736	0.90	0.3159	1.35	0.4115	1.80	0.4641	2.50	0.4938
0.01	0.0040	0.46	0.1772	0.91	0.3186	1.36	0.4131	1.81	0.4649	2.52	0.4941
0.02	0.0080	0.47	0.1808	0.92	0.3212	1.37	0.4147	1.82	0.4656	2.54	0.4945
0.03	0.0120	0.48	0.1844	0.93	0.3238	1.38	0.4162	1.83	0.4664	2.56	0.4948
0.04	0.0160	0.49	0.1879	0.94	0.3264	1.39	0.4177	1.84	0.4671	2.58	0.4951
0.05	0.0199	0.50	0.1915	0.95	0.3289	1.40	0.4192	1.85	0.4678	2.60	0.4953
0.06	0.0239	0.51	0.1950	0.96	0.3315	1.41	0.4207	1.86	0.4686	2.62	0.4956
0.07	0.0279	0.52	0.1985	0.97	0.3340	1.42	0.4222	1.87	0.4693	2.64	0.4959
0.08	0.0319	0.53	0.2019	0.98	0.3365	1.43	0.4236	1.88	0.4699	2.66	0.4961
0.09	0.0359	0.54	0.2054	0.99	0.3389	1.44	0.4251	1.89	0.4706	2.68	0.4963
0.10	0.0398	0.55	0.2088	1.00	0.3413	1.45	0.4265	1.90	0.4713	2.70	0.4965
0.11	0.0438	0.56	0.2123	1.01	0.3438	1.46	0.4279	1.91	0.4719	2.72	0.4967
0.12	0.0478	0.57	0.2157	1.02	0.3461	1.47	0.4292	1.92	0.4726	2.74	0.4969
0.13	0.0517	0.58	0.2190	1.03	0.3485	1.48	0.4306	1.93	0.4732	2.76	0.4971
0.14	0.0557	0.59	0.2224	1.04	0.3508	1.49	0.4319	1.94	0.4738	2.78	0.4973
0.15	0.0596	0.60	0.2257	1.05	0.3531	1.50	0.4332	1.95	0.4744	2.80	0.4974
0.16	0.0636	0.61	0.2291	1.06	0.3554	1.51	0.4345	1.96	0.4750	2.82	0.4976
0.17	0.0675	0.62	0.2324	1.07	0.3577	1.52	0.4357	1.97	0.4756	2.84	0.4977
0.18	0.0714	0.63	0.2357	1.08	0.3599	1.53	0.4370	1.98	0.4761	2.86	0.4979
0.19	0.0753	0.64	0.2389	1.09	0.3621	1.54	0.4382	1.99	0.4767	2.88	0.4980
0.20	0.0793	0.65	0.2422	1.10	0.3643	1.55	0.4394	2.00	0.4772	2.90	0.4981
0.21	0.0832	0.66	0.2454	1.11	0.3665	1.56	0.4406	2.02	0.4783	2.92	0.4982
0.22	0.0871	0.67	0.2486	1.12	0.3686	1.57	0.4418	2.04	0.4793	2.94	0.4984
0.23	0.0910	0.68	0.2517	1.13	0.3708	1.58	0.4429	2.06	0.4803	2.96	0.4985
0.24	0.0948	0.69	0.2549	1.14	0.3729	1.59	0.4441	2.08	0.4812	2.98	0.4986
0.25	0.0987	0.70	0.2580	1.15	0.3749	1.60	0.4452	2.10	0.4821	3.00	0.4987
0.26	0.1026	0.71	0.2611	1.16	0.3770	1.61	0.4463	2.12	0.4830	3.20	0.4993
0.27	0.1064	0.72	0.2642	1.17	0.3790	1.62	0.4474	2.14	0.4838	3.40	0.4997
0.28	0.1103	0.73	0.2673	1.18	0.3810	1.63	0.4484	2.16	0.4846	3.60	0.4998
0.29	0.1141	0.74	0.2703	1.19	0.3830	1.64	0.4495	2.18	0.4854	3.80	0.4999
0.30	0.1179	0.75	0.2734	1.20	0.3849	1.65	0.4515	2.20	0.4861	4.00	0.4999
0.31	0.1217	0.76	0.2764	1.21	0.3869	1.66	0.4505	2.22	0.4868	4.50	0.5000
0.32	0.1255	0.77	0.2794	1.22	0.3883	1.67	0.4525	2.24	0.4875	5.00	0.5000
0.33	0.1293	0.78	0.2823	1.23	0.3907	1.68	0.4535	2.26	0.4881		
0.34	0.1331	0.79	0.2852	1.24	0.3925	1.69	0.4545	2.28	0.4887	$\downarrow$	$\downarrow$
0.35	0.1368	0.80	0.2881	1.25	0.3944	1.70	0.4554	2.30	0.4893	$+\infty$	0.5
0.36	0.1406	0.81	0.2910	1.26	0.3962	1.71	0.4564	2.32	0.4898		
0.37	0.1443	0.82	0.2939	1.27	0.3980	1.72	0.4573	2.34	0.4904		
0.38	0.1480	0.83	0.2967	1.28	0.3997	1.73	0.4582	2.36	0.4909		
0.39	0.1517	0.84	0.2995	1.29	0.4015	1.74	0.4591	2.38	0.4913		
0.40	0.1554	0.85	0.3023	1.30	0.4032	1.75	0.4599	2.40	0.4918		
0.41	0.1591	0.86	0.3051	1.31	0.4049	1.76	0.4608	2.42	0.4922		
0.42	0.1628	0.87	0.3078	1.32	0.4066	1.77	0.4616	2.44	0.4927		
0.43	0.1654	0.88	0.3106	1.33	0.4082	1.78	0.4625	2.46	0.4931		
0.44	0.1700	0.89	0.3133	1.34	0.4099	1.79	0.4633	2.48	0.4934		

3. Распределение Стьюдента (двусторонняя критическая область) .

α - уровень значимости, γ = 1 - α - доверительная вероятность,
ν - число степеней свободы, n = ν +1 –объем выборки.

α γ ν ↓	0,10 0,90	0,05 0,95	0,02 0,98	0,01 0,99	0,002 0,998	0,001 0,999
1	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,365	5,032	5,893	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,562	3,850
21	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
300	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

4. χ^2 – распределение.

ν - число степеней свободы, α - уровень значимости.

ν \ α	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,237	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,795	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	24,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,783	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	32,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,678	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,566	42,314	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

5. Критические значения коэффициентов корреляции для уровней значимости 0,05 и 0,01.

d. f.	α = 0,05	α = 0,01
1	0,996717	0,9998766
2	0,995000	0,990000
3	0,8783	0,95873
4	0,8114	0,91720
5	0,7545	0,8745
6	0,7067	0,8343
7	0,6664	0,7977
8	0,6319	0,7646
9	0,6021	0,7348
10	0,5760	0,7079
11	0,5529	0,6835
12	0,5324	0,6614
13	0,5139	0,6411
14	0,4973	0,6226
15	0,4821	0,6055
16	0,4683	0,5897

d. f.	α = 0,05	α = 0,01
17	0,4555	0,5751
18	0,4438	0,5614
19	0,4329	0,5487
20	0,4227	0,5368
25	0,3809	0,4869
30	0,3494	0,4487
35	0,3246	0,4182
40	0,3044	0,3932
45	0,2875	0,3721
50	0,2732	0,3541
60	0,2500	0,3248
70	0,2919	0,3017
80	0,2172	0,2830
90	0,2050	0,2673
100	0,1946	0,2540

Число степеней свободы $d.f. = n - 2$ для парной корреляции, и $d.f. = n - 2 - k$ для множественной. n – объем выборки совокупности, k – число исключаемых переменных.

6. Таблица значений $q = q(\gamma, n)$.

$(1 - q)\, s < \sigma < (1+ q)\, s$, если $q < 1$,

$0 < \sigma < (1+ q)\, s$, если $q > 1$.

$$\left(s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \right).$$

n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64
6	1,09	2,01	3,88
7	0,92	1,62	2,98
8	0,80	1,38	2,42
9	0,71	1,20	2,06
10	0,65	1,08	1,80
11	0,59	0,98	1,60
12	0,55	0,90	1,45
13	0,52	0,83	1,33
14	0,48	0,78	1,23
15	0,46	0,73	1,15
16	0,44	0,70	1,07
17	0,42	0,66	1,01
18	0,40	0,63	0,96
19	0,39	0,60	0,92

n \ γ	0,95	0,99	0,999
20	0,37	0,58	0,88
25	0,32	0,49	0,73
30	0,28	0,43	0,63
35	0,26	0,38	0,56
40	0,24	0,35	0,50
45	0, 22	0,32	0,46
50	0,21	0,30	0,43
60	0,188	0,269	0,38
70	0,174	0,245	0,34
80	0,161	0,226	0,31
90	0,151	0,211	0,29
100	0,143	0,198	0,27
150	0,115	0,160	0,211
200	0,099	0,136	0,185
250	0,089	0,120	0,162

ЛИТЕРАТУРА

1. Высшая математика для инженеров. Т.2/ С.А. Минюк, Н.С. Березкина, А.В. Метельский; Под ред. Н.А. Микулика. – Мн.: «Элайда», 2004. – 592с.

2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1998. – 479с.

3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1998. – 400с.

4. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высш. шк., 1971. – 328с.

5. Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1984. – 223с.

6. Годунов Б.А., Рубанов В.С., Тузик Т.А. Математическая статистика. Задания, методические указания, статистические таблицы. – Брест: БГТУ, 2002. – 59с.

7. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Часть V. – Мн.: Выш. шк., 1988. – 253с.

8. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2000. – 543с.

9. Математическая статистика / В.Б. Горяинов, И.В. Павлов др.; Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 424с.

10. Мацкевич И.П., Свирид Г.П. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика. -Мн.: Выш. шк., 1993. – 269с.

11. Мацкевич И.П. Свирид Г.П., Булдык Г.М. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Теория вероятностей и математическая статистика / Под ред. Г.П. Свирида. – Мн.: Выш. шк., 1996. – 318с.

12. Микулик Н.А., Рейзина Г.Н. Решение технических задач по теории вероятностей и математической статистике. – Мн.: Выш. шк., 1991. – 164с.

13. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике / Под ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 1992. – 191с.

14. Теория вероятностей / А.В. Печинкин, О.И. Тескин и др.; Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 456с.

15. Тузик Т.А., Гладкий И.И. Теория вероятностей. Математическая статистика. Методические рекомендации и варианты заданий. – Брест: БГТУ, 2002. – 52с.

Учебное издание

Составители: Тузик Татьяна Александровна,
Тузик Альфред Иванович,
Журавель Мария Григорьевна.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Ответственный за выпуск *А.И. Тузик*
Редактор *Т.В. Строкач*
Корректор *Е.В. Никитчик*
Компьютерный набор *Д.Н. Мищирук*
Компьютерная графика *И.И. Гладкий*

Подписано к печати 1.07.2005 г. Формат 60 x 84 $^1/_{16}$. Бумага писчая. Усл. п. л. 4,6. Уч. изд. л. 5. Тираж 200 экз. Заказ № 706. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.