УДК 514.8

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ЦЕНТРА МАСС КРУГА С ПОВРЕЖДЕННЫМ СЕКТОРОМ

Д. И. Хоха
УО «ГрГУ им. Я. Купалы», Гродно
Научный руководитель: И. В. Трифонова, кандидат физ.-мат. наук

Ставится задача: составить алгоритм расчета центра масс поврежденного круга, где поврежденным является некоторый сектор, где известна начальный и конечный углы поврежденного сектора круга и глубина повреждения, как показано на рисунке 1.

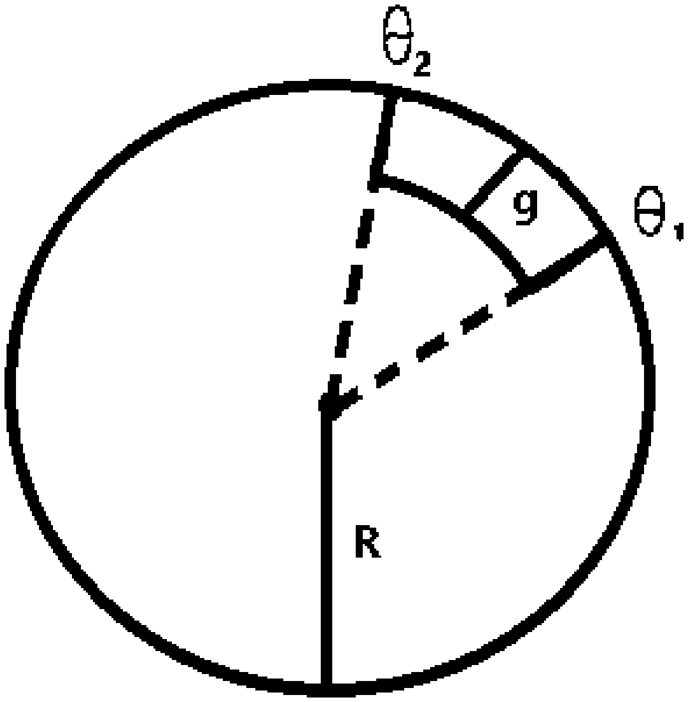

Рисунок 1. Круг с поврежденным сектором

Пусть центр координат совпадает с центром рассматриваемого круга. Тогда вычисление абсциссы центра массы не повреждённой части круга можно осуществить по формуле [1, с. 6-7; 2, с. 35]:

$$x_{цм} = \frac{1}{m}\int x dm,$$

где m – масса рассматриваемой части круга.

Заменим $x = r\cos(\theta)$ из-за проекции на ось Ox, как координату точки конца вектор-радиуса, получим:

$$x_n = \frac{1}{m}\int r\cos(\theta) dm. \quad (1)$$

В соответствии с известной формулой физики о зависимости массы от объема и плотности вещества, в нашем случае рассмотрим площадь вместо объема и введем следующую подстановку [2, с.26]:

$$m = \rho A,$$

где ρ - плотность вещества, кг/м^2,

A – площадь рассматриваемой области круга, м^2.

Таким образом получаем [2, с. 26]

$$dm = \rho dA.$$

Вернувшись к равенству (1) и выполнив описанную выше подстановку, имеем:

$$x_n = \frac{1}{\rho A}\int r\cos(\theta)\rho dA = \frac{1}{A}\int r\cos(\theta)dA. \qquad (2)$$

Теперь с учетом [3, с. 330-332] выражение (2) будет выглядеть как повторный интеграл:

$$x_n = \frac{1}{A}\int\int r\cos(\theta)rdrd\theta = \frac{1}{A}\int\int r^2\cos(\theta)drd\theta.$$

Данный результат соответствующий полученуому в работе [1, с. 9].

Пусть параметры $r\in[0;R_n]$, где $R_n = R - g$ и $\theta\in[\theta_1;\theta_2]$, тогда перейдя к определенным интегралам будем вести интегрирование с учетом этих условий:

$$x_n = \frac{1}{A}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{R_n} r^2\cos(\theta)drd\theta = \frac{R_n^{\ 3}}{3A}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos(\theta)d\theta = \frac{R_n^{\ 3}}{3A}\left[\sin(\theta_2)-\sin(\theta_1)\right], \qquad (3)$$

где θ_1 и θ_2 соответственно начальный и конечный углы рассматриваемого сектора окружности.

Найдем площадь А рассматриваемого сегмента окружности:

$$A_n = \frac{\theta_{пг}\pi R_n^{\ 2}}{360^\circ} = \frac{\theta_{пг}\pi}{180^\circ}\cdot\frac{R_n^{\ 2}}{2} = \theta_{пр}\frac{R_n^{\ 2}}{2},$$

где $\theta_{пг} = \theta_2 - \theta_1$ – угол в градусах, $\theta_{пр} = \dfrac{\theta_{пг}\pi}{180^\circ}$ – угол в радианах.

Подставляем полученное выражение в (3):

$$x_n = \frac{R_n^{\ 3}}{3}\cdot\frac{2}{\theta_{пр}R_n^{\ 2}}\left[\sin(\theta_2)-\sin(\theta_1)\right] = \frac{2R_n}{3\theta_{пр}}\left[\sin(\theta_2)-\sin(\theta_1)\right].$$

Вычисление центра массы повреждённой части для ординаты можно осуществить по аналогии:

$$y_n = \frac{1}{m}\int r\sin(\theta)dm.$$

Используя те же рассуждения получим

$$y_n = \frac{2R_n}{3\theta_{пр}}\left[-\cos(\theta_2)-\left(-\cos(\theta_1)\right)\right] = \frac{2R_n}{3\theta_{пр}}\left[\cos(\theta_1)-\cos(\theta_2)\right].$$

Теперь можно записать координаты точки центра масс поврежденного сектора окружности:

$$\left(x_п, y_п\right) = \left(\frac{2R_п}{3\theta_{пр}}\left[\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)\right]; \frac{2R_п}{3\theta_{пр}}\left[\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)\right]\right). \quad (4)$$

Далее найдем центр массы неповреждённой части круга действуя по тому же принципу, но в данном случае интегрируем по параметру θ в направлении от θ_2 до θ_1, а по параметру $r \in [0; R]$:

$$x_н = \frac{1}{A}\int_{\theta_2}^{\theta_1}\int_0^R r^2 \cos(\theta) dr d\theta = \frac{R^3}{3A}\int_{\theta_2}^{\theta_1}\cos(\theta)d\theta = \frac{R^3}{3A}\left[\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)\right]. \quad (5)$$

Теперь найдем площадь неповреждённой части круга:

$$A_н = \frac{\theta_{нг}\pi R^2}{360°} = \frac{\theta_{нг}\pi}{180°}\cdot\frac{R^2}{2} = \theta_{нр}\frac{R^2}{2},$$

где $\theta_{нг} = 360° - (\theta_2 - \theta_1)$ – угол в градусах, $\theta_{нр} = \dfrac{\theta_{нг}\pi}{180°}$ – угол в радианах.

Подставляем полученное выражение в (5):

$$x_н = \frac{2R^3}{3\theta_{нр}R^2}\left[\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)\right] = \frac{2R}{3\theta_{нр}}\left[\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)\right].$$

По аналогии находим ординату центра масс неповрежденного сектора круга

$$y_н = \frac{2R}{3\theta_{нр}}\left[-\cos(\theta_1) - \left(-\cos(\theta_2)\right)\right] = \frac{2R}{3\theta_{нр}}\left[\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\right].$$

Координаты точки центра массы неповрежденного сектора окружности:

$$\left(x_н, y_н\right) = \left(\frac{2R}{3\theta_{нр}}\left[\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)\right]; \frac{2R}{3\theta_{нр}}\left[\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\right]\right). \quad (6)$$

Общий центр массы может быть найден по формуле [4, с. 45]:

$$\left(x_{цм}; y_{цм}\right) = \left(\frac{A_п x_п + A_н x_н}{A_п + A_н}; \frac{A_п y_п + A_н y_н}{A_п + A_н}\right). \quad (7)$$

Далее имея координаты центра масс, может быть вычислен эксцентриситет, который представляет собой длину вектора смещения и рассчитывается по формуле

$$e = \sqrt{x_{цм}^2 + y_{цм}^2}. \quad (8)$$

Необходимость подобных расчетов обосновывается тем, что эксцентриситет используется в прикладных задачах, например, вычислении амплитуды вибрации вызванной неравновесностью вращающейся массы

Пример 1. Пусть имеется круг с выкрашиванием как представлено на рисунке 1. Причем радиус R=1, глубина выкрашивания g=0.5, начальный и конечный углы поврежденного сектора соответственно $\theta_1 = 30°$ и $\theta_2 = 60°$.

Найдем координаты точки центра масс по полученным формулам (4), причем при указанных исходных данных радиус поврежденной части сектора круга

$$R_n = R - g = 1 - 0.5 = 0.5.$$

Для вычисления площади поврежденого сектора круга найдем угол θ_{np}:

$$\theta_{np} = \pi / 6.$$

Подставляем данные в (4) найдем поочередно значения координат:

$$x_n \approx 0.233 \text{ и } y_n \approx 0.233.$$

Таким образом нашли центр массы для поврежденного сектора круга

$$(x_n, y_n) = (0.233; 0.233).$$

Далее применим формулу (6) для определения центра массы неповрежденного сектора круга. Предварительно рассчитывается угол $\theta_{нр}$, необходимый для расчета площади неповрежденного сектора

$$\theta_{нр} = 11\pi / 6.$$

Теперь находятся поочередно координатыцентра массы неповрежденой части круга:

$$x_н \approx -0.0423 \text{ и } y_н \approx -0.0423.$$

Прежде чем подставлять данные в итоговое выражение выполним промежуточные вычисления, а менно найдем площади обоих секторов

$$A_n \approx 0.06545 \text{ и } A_н \approx 2.87979.$$

Воспользуемся итоговой формулой (7) для нахождения результирующего центра масс полученной фигуры

$$(x_{цм}; y_{цм}) \approx (-0.036; -0.036).$$

Теперь вычислим эксцентриситет

$$e = \sqrt{x_{цм}^2 + y_{цм}^2} = \sqrt{(-0.036)^2 + (-0.036)^2} = 0.036 \cdot \sqrt{2} \approx 0{,}051.$$

Пример 2. Пусть имеется круг с выкрашиванием как представлено на рисунке 1. Причем радиус R=7, глубина выкрашивания g=7, начальный и конечный углы поврежденного сектора соответственно $\theta_1 = 90°$ и $\theta_2 = 270°$. Согласно условиям
задачи остается лишь полукруг, то есть нет необходимости рассчитывать координаты центра массы поврежденного сектора, он в данном примере полностью отсутствует. Поэтому остается вычислить только центр массы уцелевшей части, он и будет совпадать с общим центром масс $(x_н, y_н) = (x_{цм}, y_{цм})$.

Согласно выражению (6) необходимо предварительно найти

$$\theta_{нр} = \pi \text{ и } A_н = 24.5\pi.$$

Тогда центр масс будет располагаться в точке

$$\left(x_н; y_н\right) = \left(x_{цм}; y_{цм}\right) = (2.97; 0).$$

Полученный результат никоим образом не противоречит результатам, представленным в работе [1, с.15].

Имея координаты центра масс, вычислим эксцентриситет по формуле (8)

$$e = \sqrt{x_{цм}^2 + y_{цм}^2} = 2.97$$

Таким образом, построен алгоритм расчета центра масс для частного случая выкрашивания, когда скол имеет форму показанную на рисунке 1. Данные рассуждения могут быть продолжены для большего числа подобных повреждений, простым рассмотрением большего числа секторов круга. В остальном вычисления будут выполняться по аналогии.

Список литературы

1. Прядко, Ю.Г. Теоретическая механика. Геометрия масс: Курс лекций / Ю.Г. Прядко, В.Г. Караваев. − Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2006. – 106 с.

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика : учебное пособие. В 2 ч. Ч. 1 : Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм / И. И. Ташлыкова-Бушкевич. – Минск : БГУИР, 2006. – 232 с.

3. Лаптев, Г.Ф. Элементы векторного исчисления. / Г.Ф. Лаптев. – М. : Наука, 1975. – 336 с.

4. Балк, М.Б. Геометрия масс. / М.Б. Балк, В.Г. Болтянский. – М : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 160 с.