3. Matysik, O.V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O.V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr. 416. – P. 1-12.

УДК 519.6+517.983

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

М. С. Горбач,
БрГУ имени А. С. Пушкина, Брест
Научный руководитель:
О. В. Матысик, кандидат физико-математических наук, доцент

В гильбертовом пространстве H решается уравнение первого рода $Ax = y$ с положительным ограниченным самосопряженным оператором A. Будем искать его приближенное значение x_n, используя явный метод итераций

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0,$$
$$\alpha_{3n+1} = \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Далее, для упрощения считаем $\|A\| = 1$. Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0,1]$ и положительных α, β, γ выполнялись условия

$$|1-\alpha\lambda| < 1, \; |(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)| < 1, \; |(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)| < 1. \tag{2}$$

Покажем, что метод (1) пригоден и тогда, когда $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A (в этом случае уравнение $Ax = y$ имеет неединственное решение, следовательно, задача некорректна).

Обозначим через $N(A) = \{x \in H \,|\, Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема [1–2]. *Пусть* $A \geq 0$, $y \in H$ *и выполняются условия* (2). *Тогда для итерационного процесса* (1) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\quad \|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf\limits_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) метод (1) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* *– минимальное решение уравнения.*

Доказательство.

Применим оператор A к формуле (1), получим $Ax_n = A(E-\alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n Ay$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то $Ax_n = A(E-\alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n A\Pi(A)y$. Отсюда $Ax_n - \Pi(A)y = A(E-\alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n A\Pi(A)y - \Pi(A)y = A(E-\alpha_n A)x_{n-1} - (E-\alpha_n A)\Pi(A)y = (E-\alpha_n A)(Ax_{n-1} - \Pi(A)y) = (E-\alpha_n A)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_1 A)(Ax_0 - \Pi(A)y)$. Обозначим $\nu_n = Ax_n - \Pi(A)y$, тогда $\nu_n = (E-\alpha_n A)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_1 A)\nu_0$. Имеем $A \ge 0$ и A – положительно определен в $M(A)$, т.е. $(Ax, x) > 0$ для любого $x \in M(A)$. Так как выполняются условия (2), то воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора A, получим

$$\|\nu_n\| = \left\|\int_0^1 (1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\ldots(1-\alpha_n\lambda)dE_\lambda \nu_0\right\| = \left\|\int_0^1 (1-\alpha\lambda)^k(1-\beta\lambda)^l(1-\gamma\lambda)^m dE_\lambda \nu_0\right\|.$$

Здесь l, m, k – натуральные показатели, где $l + m + k = n$. Считаем, что $k = l = m = n/3$. Справедлива цепочка неравенств

$$\|\nu_n\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon_0} (1-\alpha\lambda)^k(1-\beta\lambda)^l(1-\gamma\lambda)^m dE_\lambda \nu_0\right\| +$$

$$+\left\|\int_{\varepsilon_0}^1 (1-\alpha\lambda)^k(1-\beta\lambda)^l(1-\gamma\lambda)^m dE_\lambda \nu_0\right\| \le \|E_{\varepsilon_0}\nu_0\| + q^{n/3}(\varepsilon_0)\|\nu_0 - E_{\varepsilon_0}\nu_0\| < \varepsilon,$$

при $\varepsilon_0 \to 0$, $n \to \infty$. Здесь $q = \max\limits_{\lambda\in[\varepsilon_0,1]} |(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)| < 1$. Следовательно, $\nu_n \to 0$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Таким образом, $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y)$ [2]. Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (1) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$, и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (1) примет вид

$$x_n = (E-\alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n y = (E-\alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n \Pi(A)y =$$

$$= (E-\alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n Ax^* = x_{n-1} + \alpha_n A(x^* - x_{n-1}).$$

Разобьем последнее равенство на два, так как $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n$. Тогда $P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \alpha_n P(A)A\left(x^* - x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0$, так как $AP(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = 0$.

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha_n \Pi(A)A\left(x^* - x_{n-1}\right) = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha_n A\big(\Pi(A)x^* -$$
$$- \Pi(A)x_{n-1}\big) = \Pi(A)x_{n-1} - \alpha_n A\left(\Pi(A)x_{n-1} - x^*\right),$$

так как $x^* \in M(A)$ и, следовательно, $\Pi(A)x^* = x^*$. Обозначим $\omega_n = \Pi(A)x_{n-1} - x^*$, тогда $\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* - \alpha_n A\left(\Pi(A)x_{n-1} - x^*\right)$. Отсюда $\omega_n = \omega_{n-1} - \alpha_n A\omega_{n-1} = (E - \alpha_n A)\omega_{n-1} = (E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A)\ldots(E - \alpha_1 A)\omega_0$

и, аналогично v_n, можно показать, что $\omega_n \to 0,\ n \to \infty$. Тогда $\Pi(A)x_n \to x^*$.

Следовательно, $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема доказана.

Замечание. *Так как у нас* $x_0 = 0$, *то* $x_n \to x^*$, *т.е. процесс* (1) *сходится к нормальному решению, т.е. к решению с минимальной нормой.*

Список литературы

1. Матысик, О.В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О.В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.

2. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166-176.