Theorem 2. *The function* $\Phi(x) = -(8\pi^2)^{-1}\ln|x|$ *is the fundamental solution of the biharmonic equation in* $\mathbf{R}^4$.

We express our gratitude to Kovalenko O. N., Senior Lecturer of the Department of Foreign Languages of Brest State A. S. Pushkin University, for helping us in translating.

References

1. Zorich, V. A. Matematicheskij analiz. CHast' II / V. A. Zorich. – M. : MCNMO. – 2002. – 794 s.

УДК 519.6+517.983

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ДЛЯ ЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В ПОЛУНОРМЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

М. С. Горбач,
БрГУ имени А.С. Пушкина, Брест
Научный руководитель:
О. В. Матысик, кандидат физико-математических наук, доцент

Как известно, погрешность метода простой итерации Ландвебера $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right)$, $x_{0,\delta} = 0$ [1–2] с постоянным шагом зависит от шага по антиградиенту, и притом так, что для сокращения числа операций желательно, чтобы шаг по антиградиенту был как можно большим. Однако на этот шаг накладывается ограничение сверху [2]: $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$. Возникает идея попытаться ослабить эти ограничения. Это удается сделать, выбирая для шага три значения α, β, γ попеременно, где γ уже не обязано удовлетворять прежним требованиям.

В гильбертовом пространстве H решается уравнение первого рода $Ax = y$ с положительным ограниченным самосопряженным оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако нуль принадлежит спектру оператора A, следовательно, задача некорректна. Предполагая существование единственного точного решения x при точной правой части y, будем искать его приближенное значение x_n, используя метод

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0,$$
$$\alpha_{3n+1} = \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (1)$$

В случае приближенной правой части y_δ, $\|y-y_\delta\|\le\delta$ уравнения $Ax=y$ метод (1) примет вид

$$x_{n+1,\delta}=x_{n,\delta}-\alpha_{n+1}\left(Ax_{n,\delta}-y_\delta\right),\quad x_{0,\delta}=0,$$
$$\alpha_{3n+1}=\alpha,\quad \alpha_{3n+2}=\beta,\quad \alpha_{3n+3}=\gamma,\quad n=0,1,2,\dots . \tag{2}$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (2) понимается утверждение о том, что приближения (2) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения $Ax=y$ при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, метод (2) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_{n}\|x-x_{n,\delta}\|\right)=0$.

Далее, для упрощения считаем $\|A\|=1$. Потребуем, чтобы при $\lambda\in(0,1]$ и положительных α,β,γ выполнялись условия

$$\left.\begin{aligned}&|1-\alpha\lambda|<1,\ (\text{т.е. } 0<\alpha<2),\\ &|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)|<1,\\ &|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)|<1.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Замечание 1. *Условие* $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)|<1$ *равносильно совокупности условий* $\alpha\beta<\alpha+\beta$ *и* $(\alpha+\beta)^2<8\alpha\beta$. *Отсюда* $\alpha+\beta<8$.

Изучим сходимость итерационного метода (2) в случае единственного решения в энергетической норме (полунорме) гильбертова пространства $\|x\|_A=\sqrt{(Ax,x)}$, где $x\in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем, что $x_{0,\delta}=0$ и рассмотрим разность

$$x-x_{n,\delta}=\left(x-x_n\right)+\left(x_n-x_{n,\delta}\right). \tag{4}$$

Нетрудно показать, что $x_n=A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^k(E-\beta A)^l(E-\gamma A)^m\right]y$, где k,l,m – натуральные показатели и $k+l+m=n$. Тогда запишем первое слагаемое из равенства (4) в виде $x-x_n=A^{-1}y-A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^k(E-\beta A)^l(E-\gamma A)^m\right]y=$ $=(E-\alpha A)^k(E-\beta A)^l(E-\gamma A)^m x$. При использовании энергетической нормы нам не потребуется дополнительная информация на гладкость точного решения x – его истокообразная представимость ($x=A^s z$, $s>0$) [3]. В дальнейшем, для простоты, считаем, что $k=l=m=\dfrac{n}{3}$ $(n=3p,\ p\in N)$. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора A имеем

$\|x-x_n\|_A \le \left[\frac{2n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-1/2}\|x\|$ и $\|x_n-x_{n,\delta}\|_A \le \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} n^{1/2}(\alpha+\beta+\gamma)^{1/2}\delta,\ n\ge 1$.

Поскольку

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A \le \|x-x_n\|_A + \|x_n-x_{n,\delta}\|_A \le \left[\frac{2n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-1/2}\|x\| + \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} n^{1/2}(\alpha+\beta+\gamma)^{1/2}\delta,$$

и при $n\to\infty$ $\|x-x_n\|_A \to 0$, то для сходимости $\|x-x_{n,\delta}\|_A \to 0$, $n\to\infty$, достаточно, чтобы $\sqrt{n}\,\delta\to 0$, $n\to\infty$, $\delta\to 0$. Таким образом, если в процедуре (2) выбрать число итераций $n=n(\delta)$, зависящих от δ так, чтобы $\sqrt{n}\,\delta\to 0$, $n\to\infty$, $\delta\to 0$, то получим регуляризующий метод, обеспечивающий сходимость к точному решению уравнения $Ax=y$ в энергетической норме гильбертова пространства. Итак, доказана

Теорема 1. *Итерационная процедура* (2) *при условии* (3) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций* n *выбирать так, чтобы* $\sqrt{n}\,\delta\to 0$, $n\to\infty$, $\delta\to 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (2)

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A \le \left[\frac{2n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-1/2}\|x\| + \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} n^{1/2}(\alpha+\beta+\gamma)^{1/2}\delta,\ n\ge 1. \qquad (5)$$

Оптимизируем полученную оценку (5) по *n*, т.е. при заданном δ найдем такое значение числа итераций *n*, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по *n* от правой части равенства (5), получим $3^{1/2}(\alpha+\beta+\gamma)^{-1/2}e^{-1/2}\|x\| = 3^{-1/2}2(\alpha+\beta+\gamma)^{1/2}\delta n$, отсюда

$$n_{\text{опт}} = 3(\alpha+\beta+\gamma)^{-1} e^{-1/2}(2\delta)^{-1}\|x\|. \qquad (6)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (5), найдем ее оптимальное значение

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le 2e^{-1/4}\delta^{1/2}\|x\|^{1/2}. \qquad (7)$$

Из (7) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметров α,β,γ. Но $n_{\text{опт}}$ зависит от α,β,γ и поэтому для уменьшения числа итераций с целью получения оптимального по точности приближенного решения следует брать α,β,γ возможно большими, удовлетворяющими условию (3), и так, чтобы $n_{\text{опт}}\in Z$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *При условии* (3) *оптимальная оценка погрешности для итерационного процесса* (2) *в энергетической норме гильбертова пространства имеет вид* (7) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (6).

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства *H*. Эти условия дает

Теорема 3. *Если выполнены условия*: 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, 2) $E_\varepsilon x = 0$, *где* $E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda$, ε *– фиксированное положительное число* $(0 < \varepsilon < 1)$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к решению* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.*

Доказательство.

Из 1) и 2) имеем $\int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) = 0$. Отсюда получим

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|^2 = \int_0^1 d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), x - x_{n,\delta}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) =$$

$$= \int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) =$$

$$= \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) \le \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^1 d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) = \frac{1}{\varepsilon} \left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A^2.$$

Поэтому из $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \to 0$, $n \to \infty$ следует $\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \to 0$, $n \to \infty$.
Теорема 3 доказана.

Замечание 2. *Так как* $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{n/3}(E - \beta A)^{n/3}(E - \gamma A)^{n/3}\right] y_\delta$, *то для того, чтобы* $x_{n,\delta}$ *удовлетворяло условию* $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, *достаточно потребовать, чтобы* $E_\varepsilon y_\delta = 0$. *Таким образом, если решение x и приближенная правая часть* y_δ *таковы, что* $E_\varepsilon x = 0$ *и* $E_\varepsilon y_\delta = 0$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства и, следовательно, для сходимости приближений* (2) *в норме пространства H не требуется предположения истокопредставимости точного решения.*

Список литературы

1. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615-624.

2. Константинова, Я.В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I-го рода / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. – 1973. – № 1. – С. 9-15.

3. Matysik, O.V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O.V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr. 416. – P. 1-12.

УДК 519.6+517.983

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

М. С. Горбач,
БрГУ имени А. С. Пушкина, Брест
Научный руководитель:
О. В. Матысик, кандидат физико-математических наук, доцент

В гильбертовом пространстве H решается уравнение первого рода $Ax = y$ с положительным ограниченным самосопряженным оператором A. Будем искать его приближенное значение x_n, используя явный метод итераций

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0,$$
$$\alpha_{3n+1} = \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad n = 0,1,2,\dots . \tag{1}$$

Далее, для упрощения считаем $\|A\| = 1$. Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0,1]$ и положительных α, β, γ выполнялись условия

$$|1-\alpha\lambda| < 1, \ |(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)| < 1, \ |(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)| < 1. \tag{2}$$

Покажем, что метод (1) пригоден и тогда, когда $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A (в этом случае уравнение $Ax = y$ имеет неединственное решение, следовательно, задача некорректна).

Обозначим через $N(A) = \{x \in H \,|\, Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема [1–2]. *Пусть* $A \geq 0$, $y \in H$ *и выполняются условия* (2). *Тогда для итерационного процесса* (1) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y, \quad \|Ax_n - y\| \to I(A,y) = \inf\limits_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) метод (1) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* *– минимальное решение уравнения.*