НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГИДРОУПРУГИХ АМОРТИЗАТОРОВ

[1]Докукова Н.А., [2]Мартыненко М.Д.,[3] Кафтайкина Е.Н.
[1]Международный институт трудовых и социальных отношений,
[2]Белорусский государственный университет,
[3]ГНУ Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, г. Минск

Актуальность проектирования гидравлических амортизаторов с заданными функциональными свойствами, значительно улучшающими виброзащитные характеристики мобильных машин, обусловлена запросами современного машиностроения. Эта задача связана с решением нелинейных дифференциальных уравнений, неразрешимых в конечном виде. Для исследования подобных механических систем целесообразно воспользоваться приближенными методами, позволяющими на теоретическом уровне установить закономерности между параметрами, в частности общим методом численно-аналитического исследования колебательных процессов для решения нелинейных дифференциальных уравнений, развитый авторами в [1, 2, 3].

Общая система нелинейных дифференциальных уравнений динамики гидроопоры имеет вид [4, 5]:

$$\ddot{x}_1 = 2\,n_1\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)+\omega_1^2\left(x_2-x_1\right)-f_1\left(1-\delta\right)\cos\omega t+\eta\, sign\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)^2,$$

$$\ddot{x}_2 = 2\,n_2\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)+\omega_3^2\left(x_1-x_2\right)-\omega_2^2\,x_2+f_2\cos\nu t-k\,f_1\cos\omega t- \qquad (1)$$

$$-k\,\eta\, sign\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)^2.$$

В общем случае проинтегрировать систему уравнений (1) не представляется возможным. С целью избежания этой особенности воспользуемся методом эквивалентной линеаризации для вывода простых аналитических зависимостей, следуя которому функция $\eta\, sign\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)^2$ линеаризуются путем замены:

$$\eta\, sign\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)^2 \to K_2\left(\dot{\tilde{x}}_2-\dot{\tilde{x}}_2^0-\dot{\tilde{x}}_1+\dot{\tilde{x}}_1^0\right)+K_1\left(\tilde{x}_2-\tilde{x}_1\right) \qquad (2)$$

Здесь $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ означают приближенные решения по отношению к точным x_1 и x_2,

$$K_1=\frac{\eta\,\mathrm{sign}(\dot{x}_2^0-\dot{x}_1^0)(\dot{x}_2^0-\dot{x}_1^0)^2}{x_2^0-x_1^0},\ K_2=K_1 \text{ или же } K_2\equiv 0, \qquad (3)$$

x_1^0, $\dot{x}_1^0$, x_2^0, $\dot{x}_2^0$ суть $x_1(0)$, $\dot{x}_1(0)$, $x_2(0)$, $\dot{x}_2(0)$. Условие $x_2^0-x_1^0\neq 0$ достигается выбором в качестве начальных значений x_1^0 и x_2^0 условий устойчивого стационарного решения системы дифференциальных уравнений (1), следуя которому резонансные колебания динамической системы исследуются методом медленно меняющихся амплитуд.

Положим, что $\dot{x}_2^0-\dot{x}_1^0\neq 0$. Таким образом, решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (1) приводит к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{\tilde{x}}_1=2n_1\left(\dot{\tilde{x}}_2-\dot{\tilde{x}}_1\right)+\omega_1^2\left(\tilde{x}_2-\tilde{x}_1\right)-f_1\left(1-\delta\right)\cos\omega t+K_2\left(\dot{\tilde{x}}_2-\dot{\tilde{x}}_2^0-\dot{\tilde{x}}_1+\dot{\tilde{x}}_1^0\right)+K_1\left(\tilde{x}_2-\tilde{x}_1\right)$$

$$\ddot{\tilde{x}}_2=2n_2\left(\dot{\tilde{x}}_1-\dot{\tilde{x}}_2\right)+\omega_3^2\left(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2\right)-\omega_2^2\,\tilde{x}_2+f_2\cos\nu t-k\,f_1\,\delta\cos\omega t- \qquad (4)$$

$$-k\left(K_2\left(\dot{\tilde{x}}_2-\dot{\tilde{x}}_2^0-\dot{\tilde{x}}_1+\dot{\tilde{x}}_1^0\right)+K_1\left(\tilde{x}_2-\tilde{x}_1\right)\right).$$

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (4) не представляет трудностей. Оценим погрешность между точным и приближенным решениями

$$z_1(t) = x_1(t) - \tilde{x}_1(t),\ z_2(t) = x_2(t) - \tilde{x}_2(t). \quad (5)$$

Для этого вычтем соответственно из системы уравнений (1) уравнения (4), получим:

$$\ddot{z}_1(t) = 2n_1\left(\dot{z}_2 - \dot{z}_1\right) + \omega_1^2\left(z_2 - z_1\right) - Q_1(t),$$

$$\ddot{z}_2(t) = 2n_2\left(\dot{z}_1 - \dot{z}_2\right) + \omega_3^2\left(z_1 - z_2\right) - \omega_2^2 z_2 - k\,Q_1(t), \quad (6)$$

где $Q_1(t) = K_2\left(\Delta\dot{\tilde{x}}_2 - \Delta\dot{\tilde{x}}_1\right) + K_1\left(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1\right) - r(t)$, $\Delta\tilde{x}_i = \tilde{x}_i - x_i^0$, $i = \overline{1,2}$. Проинтегрируем (6) дважды по t, получим:

$$z_1(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)\left\{2n_1\left(\dot{z}_2 - \dot{z}_1\right) + \omega_1^2\left(z_2 - z_1\right) - Q_1(t)\right\}dt,$$

$$z_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)\left\{2n_2\left(\dot{z}_1 - \dot{z}_2\right) + \omega_3^2\left(z_1 - z_2\right) - \omega_2^2 z_2 - k\,Q_1(t)\right\}dt. \quad (7)$$

Введем следующую норму:

$$\left\|z_i\right\|_\lambda = \max_t\left\{\exp(-\lambda t)(\left|z_i(t)\right| + \left|\dot{z}_i(t)\right|)\right\},\ \lambda > 0,\ i = \overline{1,2}. \quad (8)$$

Оценим по модулю полученные выражения, учитывая, что $r(t)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0,T]$

$$\left|r(\dot{x}_1, \dot{x}_2) - r(\dot{x}_1^0, \dot{x}_2^0)\right| \le M\left(\left|\dot{x}_1 - \dot{x}_1^0\right| + \left|\dot{x}_2 - \dot{x}_2^0\right|\right),$$

а постоянные A_*, B_*, G_*, H_* выберем из следующих условий

$$A_* = \max_{t,x_1^0,x_2^0,\dot{x}_1^0,\dot{x}_2^0}\left\{2n_1 + \left|K_2\right|, \omega_1^2 + \left|K_2\right|\right\},\quad B_* = \max_{t,x_1^0,x_2^0,\dot{x}_1^0,\dot{x}_2^0}\left\{M + \left|K_2\right|, \left|K_2\right|\right\} = M + \left|K_2\right|,$$

$$G_* = \max_{t,x_1^0,x_2^0,\dot{x}_1^0,\dot{x}_2^0}\left\{k\left(2n_1 + \left|K_2\right|\right), k\left(\omega_1^2 + \left|K_2\right|\right) + \omega_2^2\right\},$$

$$H_* = \max_{t,x_1^0,x_2^0,\dot{x}_1^0,\dot{x}_2^0}\left\{k\left(M + \left|K_2\right|\right), k\left|K_2\right|\right\} = k\left(M + \left|K_2\right|\right). \quad (9)$$

Учитывая, что $n_2 = k\,n_1$, получим

$$\left\|z_1\right\|_\lambda \le \frac{1}{2}\left(A_*\left(\left\|z_1\right\|_\lambda + \left\|z_2\right\|_\lambda\right) + B_*\left(\left\|\Delta x_1\right\|_\lambda + \left\|\Delta x_2\right\|_\lambda\right)\right)C(\lambda, t),$$

$$\left\|z_2\right\|_\lambda \le \frac{1}{2}\left(G_*\left(\left\|z_1\right\|_\lambda + \left\|z_2\right\|_\lambda\right) + H_*\left(\left\|\Delta x_1\right\|_\lambda + \left\|\Delta x_2\right\|_\lambda\right)\right)C(\lambda, t),$$

где

$$C(\lambda, t) = \left(\lambda^{-1} + \lambda^{-2}\right)\left(1 - \exp(-\lambda t)\right) - T\,\lambda^{-1}\exp(-\lambda t). \quad (10)$$

Функциональная зависимость $C(\lambda,t)$ имеет горизонтальную асимптоту $C_*(\lambda,t)=\frac{\lambda+1}{\lambda^2}$ при $t\to\infty$. Из (10) следует, что погрешность между точным решением (1) и приближенным (3) не превышает величины

$$\|z_1\|_\lambda \le \frac{B_* C(\lambda,T)}{2-A_*(k+1)C(\lambda,T)}\left(\| x_1-x_1^0\|_\lambda + \| x_2-x_2^0\|_\lambda\right),$$

$$\|z_2\|_\lambda \le \frac{kB_* C(\lambda,T)}{2-A_*(k+1)C(\lambda,T)}\left(\| x_1-x_1^0\|_\lambda + \| x_2-x_2^0\|_\lambda\right). \qquad (11)$$

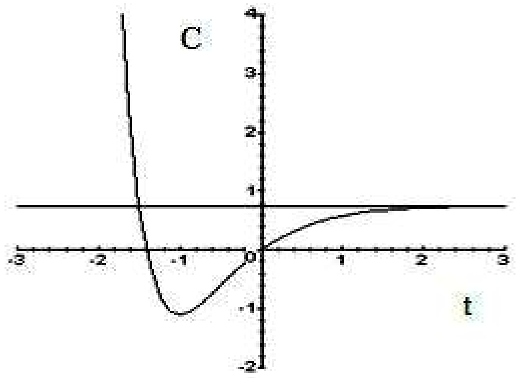

Рисунок 1. График зависимости $C(\lambda,t)$ ***и*** $C_*(\lambda,t)$ ***при*** λ ***= 2,0***

Произвольный параметр λ зафиксируем условием:

$$C(\lambda,T) < \frac{2}{(k+1)A_* + k\,B_*}. \qquad (12)$$

Представлен метод эквивалентной линеаризации, позволяющий исследовать колебательные процессы в нелинейных механических системах общего вида. Выписанные явные уравнения (7) для линеаризованного решения и оценки (11) доказывают его близость к искомому точному решению при соответствующем выборе параметра λ. Поэтому предложенная линеаризация (3) позволяет представить нелинейные дифференциальные уравнения колебаний гидроупругого амортизатора в удобном для анализа виде с целью выяснения влияния нелинейных факторов на механическую систему в целом.

Литература

1. Докукова Н.А., Мартыненко М.Д. Метод линеаризации и его применение для анализа нелинейных колебательных систем// Известия НАН Беларуси. 1999. Сер. физ.-техн. наук, № 3. С. 108-111.

2. Мартыненко М.Д., Докукова Н.А., Бойко Л.И. О колебательных процессах в механических системах// Инженерно-физический журнал. 1999. Т. 72, № 3. С. 491-494.

3. Докукова Н.А., Мартыненко М.Д. Линеаризация в нестационарных задачах изгиба балок при нелинейном законе упругости// Известия НАН Беларуси. 1988. Сер. физ.-техн. наук, № 1. С. 38-43.

4. Левитский Н.И. Колебания в механизмах. - М., 1988.

5. Тондл А. Нелинейные колебания механических систем. - М.: Мир, 1973.- 336 с.