# НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ УРАВНЕНИЕМ НАВЬЕ-СТОКСА

***Курлович А.А, Кожух И.Г.***

*Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест*

Турбулентность сопровождает нас везде, где есть машины и аппараты, двигатели и энергоустановки, где используются рабочие тела в виде трех известных фазовых состояний: жидкости, газа и плазмы. Многие известные подходы к ее исследованию в настоящее время являются приближенными, и в большей своей части основаны на эмпирических моделях. С теоретической точки зрения весьма полезны расчетные методы, которые базируются на решении уравнений математической физики. И главным для газодинамики сплошных сред является фундаментальное векторное уравнение Навье-Стокса, которое описывает широкий класс вязких, сжимаемых течений жидкости, газа и плазмы. Нет оснований сомневаться, что это уравнение справедливо для ламинарных и турбулентных течений. Существует большое число частных газодинамических задач, которые подтверждают соответствие экспериментальных результатов и решений этого уравнения.

Уравнение является весьма сложным, и в настоящее время аналитически оно не решено, хотя существует много методов, при помощи которых оно решается численно. Но все же желанием исследователей всегда было получение конечных математических соотношений, позволяющих проводить наглядный анализ и определять области допустимых значений. Поэтому решение уравнения Навье-Стокса максимально преобразовывалось или упрощалось. Так, для стационарного течения жидкости и газа уравнение приобретало вид уравнения Пуассона.

Хотя уравнение Эйлера появилось гораздо раньше уравнения Навье-Стокса, можно считать, что оно является неким упрощением. В практических расчетах используется комбинированный подход - ядро потока рассчитывается по уравнению Эйлера, а поток у стенок - по уравнению Навье-Стокса. Если учесть, что все реальные рабочие тела являются вязкими, то уравнение Эйлера всегда является приближенным.

Очень часто при расчетах течений используют симметрию. Обтекание осесимметричных тел и течение в осесимметричных соплах наталкивают на искушение использовать этот факт и из трех дифференциальных уравнений векторного уравнения Навье-Стокса оставить два [3]. При этом свести трехмерную постановку задачи к двумерной, считая, что симметричные координаты можно опустить. В этом случае сильно упрощается расчетный процесс. Для отдельных случаев создаются условия получения аналитического решения. Расчеты с осесимметричным допущением никогда не дают подобных конфигураций.

Иногда избавляются не от координат, а от нелинейных членов. Ведь векторное уравнение Навье-Стокса или, что то же самое, система трех дифференциальных уравнений Навье-Стокса состоит из нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Это уравнения колебательного типа или волновые. Решения этих уравнений могут быть либо периодическими, либо солитоновыми. Если из уравнений Навье-Стокса удалить нелинейный конвективный член, то система станет линейной, а локализованные стационарные решения, характеризующие турбулентность, будут утрачены.

Одним из способов решения уравнения Навье-Стокса является способ выделения вязкой пристенной области и области условно потенциального течения. При этом область, расположенная далеко от стенки, может считаться невязкой. Газодинамические решения для этой области находятся из уравнения Эйлера. В области, находящейся непосредственно около стенки, эффекты вязкости проявляются наиболее сильно. Приближение Эйлера здесь несправедливо.

Особенности данной системы позволяют упростить эллиптические уравнения Навье-Стокса и в дальнейшем свести их к параболическим.

Наиболее строгое упрощение сделал Людвиг Прандтль, который для абстрактной плоской задачи, предусматривающей обтекание пластины полубесконечным потоком, ввел понятие толщины пограничного слоя. При этом Прандтль использовал свойство профиля скорости, имеющего вид кривой насыщения.

Упрощение Рейнольдса основывается на статистическом определении турбулентного течения. В отличие от волновой концепции, статистическая теория предполагает наличие в потоке большого количества отдельных невзаимосвязанных мелких вихрей различной интенсивности, непрерывно меняющих свое положение, при которых происходит перенос масс жидкости между ее соседними слоями. Эти умозрительные допущения легли в основу нового представления Рейнольдсом уравнений Навье-Стокса. Он получил из трех уравнений Навье-Стокса свои шесть уравнений. Немедленно возникла проблема замыкания этих уравнений - потребовалось дополнительно три граничных условия. До сих пор эта проблема в общем виде не решена.

Запись этих уравнений повлекла за собой целый ряд новшеств. Появились правила осреднения параметров по Рейнольдсу. Было введено понятие кажущегося касательного напряжения (Рейнольдсово напряжение).

Замыкание уравнений необходимых для решения, осуществляется с помощью специально разработанных моделей турбулентности. В настоящее время в литературе представлено около двух десятков аналогичных моделей. Они все, как правило, основываются на гипотезах (гипотеза о пути перемешивания Прандтля, гипотеза Тейлора о переносе завихренности и т.п.) и результатах экспериментов на плосковоздушных "холодных" моделях.

Система состоит из двух уравнений:

1) уравнения движения,
2) уравнения непрерывности.

В векторном виде для несжимаемой жидкости они записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\left(\vec{V} \cdot \nabla\right)\vec{V} + \nu\Delta\vec{V} - \dfrac{1}{\rho}\nabla P + \vec{f} \\ \nabla \cdot \vec{V} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

где $\Delta$ – оператор Лапласа, $\nabla$ – оператор Гамильтона, $\vec{V}$ – вектор скорости, $t$ – время, $\nu$ – коэффициент кинематической вязкости, $\rho$ – плотность, $P$ – давление, $\vec{f}$ – вектор плотности массовых сил.

Именно этот вид системы разработан в наибольшей степени, так как позволяет избежать получение нестационарных решений, а также турбулентных завихрений, являясь, однако, грубым упрощением исходной системы.

Достаточно часто выбирают специальные потоки для решения данной системы с ограничениями, но даже в таких случаях применение аналитического решения может быть достаточно разнообразным.

Например, рассмотрим движение жидкости между параллельными пластинами (рис. 1):

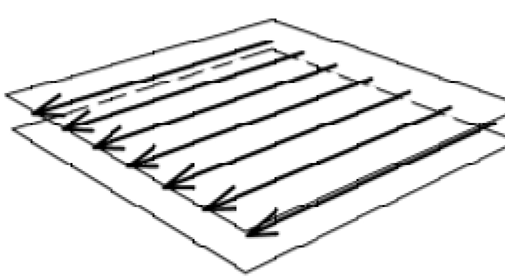

рис. 1

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -1; \quad u(0) = u(1) = 0 \tag{2}$$

Данная граничная задача имеет решение [4]:

$$u(y) = \frac{1}{2}\left(y - y^2\right) \tag{3}$$

Отталкиваясь от данного решения, для вязких несжимаемых жидкостей был получен достаточно большой класс частных решений задачи.

Сложности появляются при радиальном движении между параллельными пластинами (при возникновении турбулентности на параллельном потоке, рис. 2). Это незначительное изменение влечет за собой конвекцию – вследствие чего получаем нелинейность [2, 3].

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + Rf^2 = -1; \quad f(0) = f(1) = 0$$

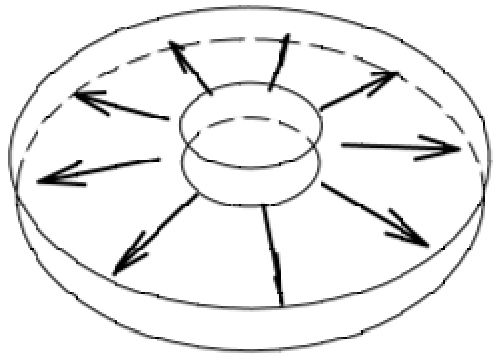

рис. 2

При достаточно больших числах Рейнольдса получим нестационарное решение. Данная проблема по сей день не решена.

Зона применений системы обширна. Примером может служить работа по исследованию фильтрационных характеристик пластов. Решение задачи позволяет построить модель порового пространства и дает возможность оценки характеристик горных пород с помощью продольных волн. В основу такой оценки положен следующий физический механизм.

При распространении упругой волны на ее фронте происходят фильтрационные перетоки порового флюида, приводящие к изменению упругих свойств среды. Модули упругости сухой и насыщенной пористых сред могут отличаться более чем на четверть. Следствием существования эффекта фильтрационных перетоков на фронте упругой волны является возможность получить изменение ее кинематических и динамических параметров, зависящих от проницаемости среды и свойств жидкости, через изменение входных параметров волны (амплитуды и частоты). Использование идеализированных моделей деформации скелета пористой среды и фильтрационных течений в порах дает возможность учесть взаимодействие указанных процессов [1].

Для описания многих динамических процессов используют уравнение Навье-Стокса. Для того чтобы решить это уравнение, можно воспользоваться высокоточным численным анализом. Но и на этом пути исследователей встречают многочисленные трудности. Если же эту систему решить аналитически, то многие проблемы могут быть сняты.

**Литература**


**1.** Пат. 2132560 РФ., Способ оценки проницаемости горных пород /В.Ш. Халилов, Р.Р. Гафуров, К.В. Антонов и др. - № 97104988; Заявлено 24.03 97.

**2.** Князев Д.В. Вращательно-симметричные движения вязкой жидкости с пространственным ускорением. - Пермь. 2007.

**3.** D. Razafinralandy, A. Hamdouni, Consequences of Symmetries on the Analysis and Construction of Turbulence Models, 2006.

**4.** Лажыженская О.А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. - М: Наука, 1970.


## ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БИОХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ


***Чухутина О.В.***

*Белорусский государственный университет, г. Минск*


*1. Введение*

Исследование систем высокой сложности является одной из главных целей на современном этапе развития науки. Без него немыслимо развитие таких естественнонаучных областей, как физика, химия, биология. Поскольку, как правило, нет простых формул, описывающих поведение модели, а стало быть, и объекта, который описывается моделью, то единственный путь – свести дело к вычислениям, применению численных методов решения задач.