

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В БЕСШАРНИРНЫХ КРУГОВЫХ АРКАХ, НАГРУЖЕННЫХ ВЕРТИКАЛЬНЫМИ НАГРУЗКАМИ, РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПО ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Рассматриваются бесшарнирные арки кругового очертания постоянной жесткости  $EJ$  пролетом  $l$ , загруженные статическими вертикальными распределенными по параболической зависимости нагрузками (рисунок 1). Получим для рассматриваемых арок зависимости для внутренних сил – изгибающих моментов, поперечных и продольных сил – в произвольном сечении системы, позволяющие построить эпюры усилий и выполнить анализ их изменения.

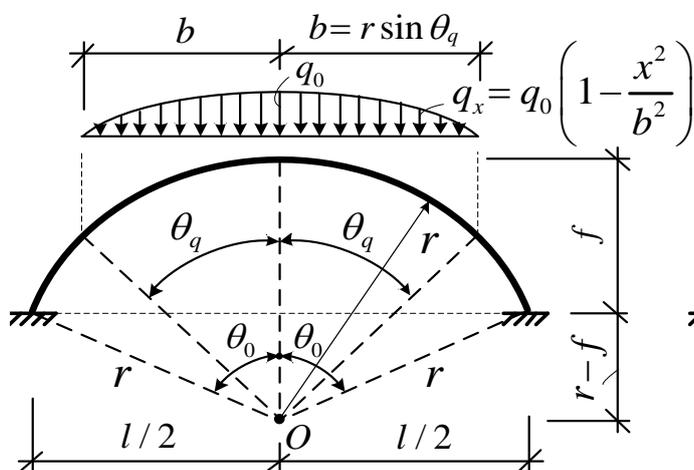


Рисунок 1 – Расчетная схема арки

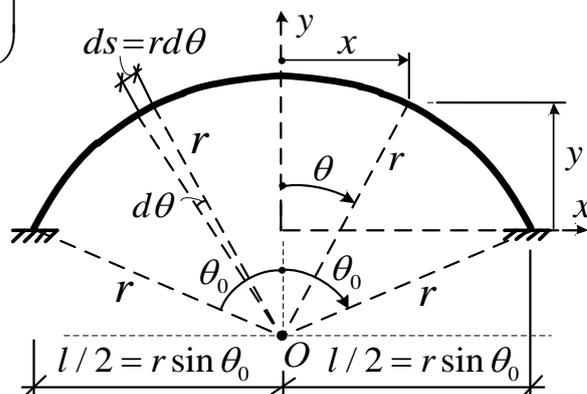


Рисунок 2 – Системы координат

Для арок, оси которых изменяются по окружности, получение и интегрирование зависимостей удобно выполнять в полярной системе координат (рисунок 2). За полюс примем точку  $O$  в центре окружности, а в качестве оси для отсчета угла ( $\theta$ ) (по часовой стрелке) примем вертикальную ось  $y$ . Зависимость между декартовой ( $x, y$ ) и полярной ( $r, \theta$ ) системами координат принимает вид:

$$x = r \sin \theta; \quad y = r(\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (1)$$

Геометрические соотношения здесь определяются зависимостями:

$$r = \frac{l^2/4 + f^2}{2f}; \quad l = 2r \sin \theta_0; \quad f = r(1 - \cos \theta_0); \quad \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{l}{2(r-f)}; \quad s = r d\theta. \quad (2)$$

Бесшарнирные арки – это статически неопределимые системы, имеющие три лишние связи, и выполнять их расчет будем методом сил. Рассматриваемая арка (рисунок 1) является симметричной относительно оси  $y$ , и симметрично нагружена, поэтому выберем симметричную основную систему (О.С.) метода сил, разрезав арку посередине и перенеся дополнительно неизвестные в упругий центр арки с помощью абсолютно жестких консолей ( $EI_k = \infty$ ) [1] (рисунок 3).

При этом в виду симметричности нагружения неизвестное  $X_3$ , как кососимметричное, будет равно нулю.

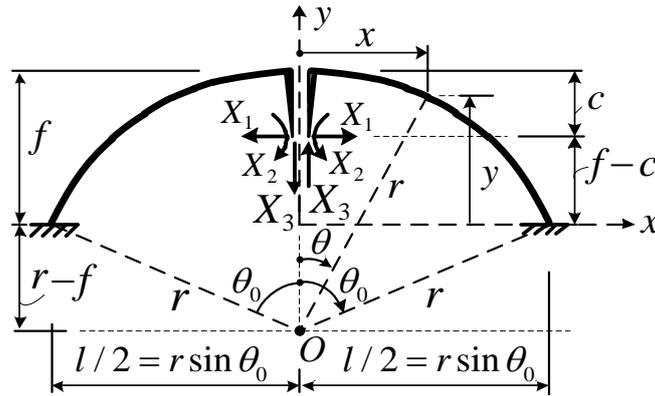


Рисунок 3 – Основная система метода сил

Положение упругого центра согласно [1] будет определяться величиной:

$$c = f - r \left( \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} - \cos \theta_0 \right). \quad (8)$$

Перенесение неизвестных метода сил в упругий позволяет разделить уравнения метода сил на два независимых друг от друга уравнения [1]

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1q} = 0; \quad \delta_{22} X_2 + \Delta_{2q} = 0. \quad (9)$$

Зависимости изменения внутренних сил в произвольном сечении  $x$  основной системы от действия единичных значений неизвестных будут иметь вид

$$\bar{M}_{1x} = 1 \cdot [y - (f - c)] = r \left[ \cos \theta_x + \left( \frac{c}{r} - 1 \right) \right]; \quad \bar{Q}_{1x} = \sin \theta_x; \quad \bar{N}_{1x} = -\cos \theta_x; \quad (10)$$

$$\bar{M}_{2x} = 1; \quad \bar{Q}_{2x} = 0; \quad \bar{N}_{2x} = 0. \quad (11)$$

Единичные перемещения вычислим по формуле Мора вида [1]

$$\delta_{ii} = \int_0^s \frac{\bar{M}_i^2 ds}{EI} + \int_0^s \eta \frac{\bar{Q}_i^2 ds}{GA} + \int_0^s \frac{\bar{N}_i^2 ds}{EA}, \quad (12)$$

где:  $EI$ ,  $GA$ ,  $EA$  – жёсткости сечений арки соответственно на изгиб, сдвиг и растяжение-сжатие;  $\eta$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечений при изгибе.

Подставив выражения (10) и (11) в (12), учитывая, что  $ds = r d\theta$  (рисунок 2), и выполнив интегрирование в полярной системе координат, получим единичные перемещения в виде

$$\delta_{11} = \frac{r^3}{EI} \left[ \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 + 4 \left( \frac{c}{r} - 1 \right) \sin \theta_0 + \left( 3 - 4 \frac{c}{r} + 2 \frac{c^2}{r^2} \right) \theta_0 \right] + \eta \frac{r}{GA} \left[ \theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right] + \frac{r}{EA} \left[ \theta_0 + \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right]; \quad \delta_{22} = \frac{2r}{EI} \theta_0. \quad (13)$$

Для получения выражений усилий в сечениях арки от действия внешней нагрузки рассмотрим правую полуарку, рассматривая равновесие левой кон-

сольной отсеченной части относительно сечений (рисунок 4). При этом по длине полуарки следует различать два участка, в пределах которых зависимости изменения усилий будут разными, учитывая, что на участке  $CD$  (рисунок 4а, участок I) действует нагрузка, а на участке  $DB$  (рисунок 5б, участок II) нагрузки нет.

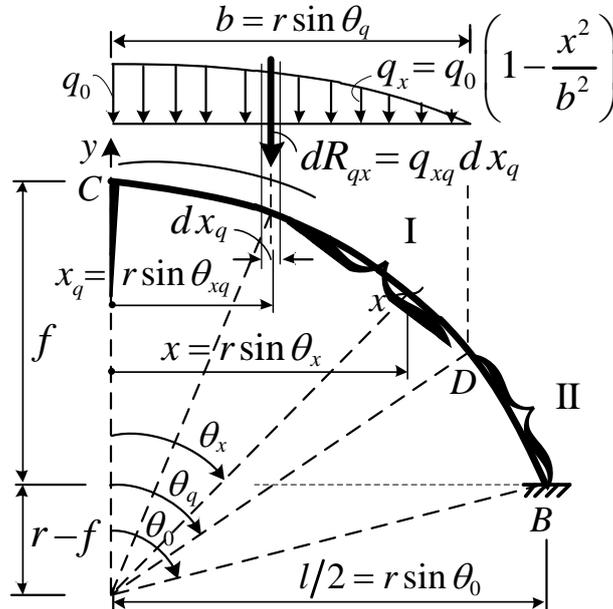


Рисунок 4 – Определение внутренних сил в основной системе метода сил на участке I

Получим зависимости для участка I. Выразим их через элементарную нагрузку на бесконечно малом участке  $dx$ , через ее равнодействующую и через элементарный изгибающий момент этой нагрузки

$$dR_{qx} = q_0 \left( 1 - \frac{x_q^2}{b^2} \right) dx_q; \quad dM_{qx1} = dR_{qx}(x - x_q) = q_0 \left( 1 - \frac{x_q^2}{b^2} \right) (x - x_q) dx_q, \quad (15)$$

где  $x_q$  – текущий параметр координаты  $x$  до рассматриваемой точки действия распределенной нагрузки  $q$ .

Проинтегрировав эти выражения от 0 до  $x$ , перейдя к полярной системе координат с учетом (5) и спроектировав равнодействующую на нормаль и касательную к оси арки, получим выражения для внутренних сил в виде

$$M_{q\theta 1} = \frac{q_0 r^2}{2} \sin^2 \theta_x \left( 1 - \frac{r^2}{6b^2} \sin^2 \theta_x \right); \quad (16)$$

$$Q_{q\theta 1} = -q_0 r \left( \frac{1}{2} \sin 2\theta_x - \frac{r^2}{3b^2} \sin^3 \theta_x \cos \theta_x \right); \quad N_{q\theta 1} = -q_0 r \left( \sin^2 \theta_x - \frac{r^2}{3b^2} \sin^4 \theta_x \right). \quad (17)$$

Для получения зависимостей на участке II необходимо знать равнодействующую всей распределенной нагрузки на правую полуарку и точку ее приложения (центр тяжести половины параболы) (рисунок 5).

Проинтегрировав выражение (15) по длине действия нагрузки, получим значение равнодействующей распределенной нагрузки:  $R_q = 2q_0b/3$ .

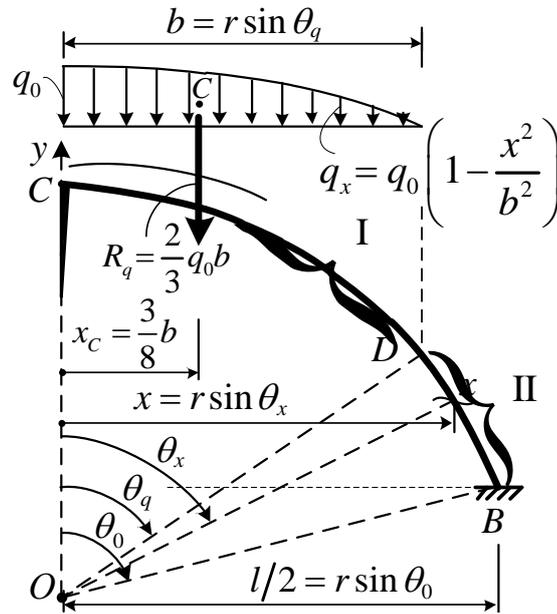


Рисунок 5 – Определение внутренних сил в основной системе метода сил на участке II

Статический момент нагрузки относительно оси  $y$  определится выражением

$$S_{qy} = \int_0^b dR_{qxI} \cdot x_q = q_0 \int_0^b \left(1 - \frac{x_q^2}{b^2}\right) dx_q = \frac{1}{4} q_0 b^2. \quad (18)$$

Положение центра тяжести нагрузки будет равно:  $x_c = \frac{S_{qy}}{R_q} = \frac{3}{8} b$ .

Тогда внутренние силы на участке II будут определяться выражениями

$$M_{q\theta II} = R_q(x - x_c) = \frac{2q_0b}{3}(x - x_c) = \frac{2}{3} q_0 b r \left(\sin \theta_x - \frac{x_c}{r}\right); \quad (19)$$

$$Q_{q\theta II} = -R_q \cos \theta_x = -\frac{2}{3} q_0 b \cos \theta_x; \quad N_{q\theta II} = -R_q \sin \theta_x = -\frac{2}{3} q_0 b \sin \theta_x; \quad (20)$$

Грузовые перемещения найдём по формуле Мора вида [1]

$$\Delta_{iq} = \Delta_{iq}^M + \Delta_{iq}^Q + \Delta_{iq}^N = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_q ds}{EI} + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_i Q_q ds}{GA} + \sum \int \frac{\bar{N}_i N_q ds}{EA}, \quad (21)$$

выполняя интегрирование отдельно по участкам I (с учетом (16)–(17)) и II (с учетом (19)–(20)) и удваивая полученные результаты (представлены отдельно от действия изгибающих моментов, поперечных и продольных сил)

$$\begin{aligned} \Delta_{1q} = & \frac{2}{EI} \left[ \int_0^{\theta_q} (M_{qxI} \cdot \bar{M}_{1x}) + \int_{\theta_q}^{\theta_0} (M_{qxII} \cdot \bar{M}_{1x}) \right] r d\theta + \frac{2}{GA} \left[ \int_0^{\theta_q} (Q_{qxI} \bar{Q}_{1x}) + \int_{\theta_q}^{\theta_0} (Q_{qxII} \bar{Q}_{1x}) \right] r d\theta + \\ & + \frac{2}{EA} \left[ \int_0^{\theta_q} (N_{qxI} \bar{N}_{1x}) + \int_{\theta_q}^{\theta_0} (N_{qxII} \bar{N}_{1x}) \right] r d\theta = \frac{q_0 r^4}{EI} \left\{ \frac{1}{3} \sin^3 \theta_q - \frac{r^2}{30b^2} \sin^5 \theta_q + \left(\frac{c}{r} - 1\right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{r^2}{8b^2} \right) \theta_q - \frac{r^2}{24b^2} \sin 2\theta_q + \frac{r^2}{192b^2} \sin 4\theta_q \right] + \frac{4q_0br^3}{3EI} \left\{ \frac{1}{2} (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_q) - \right. \\
& \left. - \frac{x_C}{r} (\sin \theta_0 - \sin \theta_q) - \left( \frac{c}{r} - 1 \right) \left[ (\cos \theta_0 - \cos \theta_q) + \frac{x_C}{r} (\theta_0 - \theta_q) \right] \right\} - \\
& - \frac{2q_0r^2}{GA} \left( \frac{1}{3} \sin^3 \theta_q - \frac{r^2}{15b^2} \sin^5 \theta_q \right) - \frac{2q_0br}{3GA} (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_q) + \\
& + \frac{2q_0r^2}{3EA} \left( \sin^3 \theta_q - \frac{r^2}{5b^2} \sin^5 \theta_q \right) - \frac{2q_0br}{3EA} (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_q); \tag{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{2q} = \frac{2}{EI} \left[ \int_0^{\theta_q} (M_{qxI} \bar{M}_{2x}) + \int_{\theta_q}^{\theta_0} (M_{qxII} \bar{M}_{2x}) \right] r d\theta = \frac{q_0r^3}{EI} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{r^2}{32b^2} \right) \theta_q + \left( \frac{r^2}{24b^2} - \frac{1}{4} \right) \sin 2\theta_q - \right. \\
\left. - \frac{r^2}{192b^2} \sin 4\theta_q \right] - \frac{4q_0br^2}{3EI} \left[ (\cos \theta_0 - \cos \theta_q) + \frac{x_C}{r} (\theta_0 - \theta_q) \right]. \tag{23}
\end{aligned}$$

Подставляем полученные единичные и грузовые перемещения в уравнения (9) и решая их, найдем неизвестные метода сил  $X_1$  и  $X_2$ , зная которые, получим зависимости для внутренних сил  $S$  ( $M$ ,  $Q$ ,  $N$ ) в сечениях арки по формуле

$$S_\theta = \bar{S}_{1\theta} \cdot X_1 + \bar{S}_{2\theta} \cdot X_2 + S_{q\theta};$$

В результате усилия в бесшарнирной арке будут определяться выражениями:

а) на участке I ( $CD$ ) (рисунок 4)

$$M_{\theta(I)} = r \left[ \cos \theta_x + \left( \frac{c}{r} - 1 \right) \right] \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + \left[ \frac{q_0r^2}{2} \sin^2 \theta_x \left( 1 - \frac{r^2}{6b^2} \sin^2 \theta_x \right) \right]; \tag{24}$$

$$Q_{\theta(I)} = \sin \theta_x \cdot X_1 - q_0 r \left( \frac{1}{2} \sin 2\theta_x - \frac{r^2}{3b^2} \sin^3 \theta_x \cos \theta_x \right); \tag{25}$$

$$N_{\theta(I)} = -\cos \theta_x \cdot X_1 - q_0 r \left( \sin^2 \theta_x - \frac{r^2}{3b^2} \sin^4 \theta_x \right). \tag{26}$$

б) на участке II ( $DB$ ) (рисунок 5)

$$M_{\theta(II)} = r \left[ \cos \theta_x + \left( \frac{c}{r} - 1 \right) \right] \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + \left[ \frac{2}{3} q_0br \left( \sin \theta_x - \frac{x_C}{r} \right) \right]; \tag{27}$$

$$Q_{\theta(II)} = \sin \theta_x \cdot X_1 - \frac{2}{3} q_0b \cos \theta_x; \quad N_{\theta(II)} = -\cos \theta_x \cdot X_1 - \frac{2}{3} q_0b \sin \theta_x. \tag{28}$$

На основе полученных зависимостей составлены алгоритм и MathCad-программа расчета внутренних сил в сечениях арки, с использованием которой можно выполнять расчеты усилий для различных параметров арки и нагрузки.

#### Список цитированных источников

1. Дарков, А. В. Строительная механика : учебник / А. В. Дарков. – М. : Высшая школа, 1976. – 600 с.