

Выводы.

1. Полученные зависимости для построения температурного поля и графиков влажности позволяют сократить время расчёта величин температур и парциальных давлений в слоях плоских ограждающих конструкций без потери точности.

2. Предложенная работа может быть использована для ознакомления студентов с решением задач строительной теплофизики и выполнения части расчётов в рамках курсовых работ и дипломных проектов без применения сложного программного оборудования.

Список цитированных источников

1. Строительная теплотехника : СП 2.04.01–2020. – Введ. 20.01.2021. – Минск : Минстройархитектуры, 2020. – 73 с.
2. Каталог удельных потерь теплоты (тепловых мостиков) теплотехнически неоднородных узлов ограждающих конструкций жилых и общественных зданий. – Введ. 0.01.2021. – Минск : Минстройархитектуры, 2020. – 211 с.
3. Здания и сооружения. Энергетическая эффективность : СН 2.04.02–2020. – Введ. 30.03.2021. – Минск : Минстройархитектуры, 2020. – 21 с.
4. Строительная климатология : СНБ 2.04.02–2000 – Минск : Минстройархитектуры, 2001. – 37 с.

УДК 563.2

Юркевич Е. В., Шпаковская А. С.

Научный руководитель: старший преподаватель, к. т. н. Глушко К. К.

ПОСТРОЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОГРАЖДАЮЩИХ КОНСТРУКЦИЯХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

В работе рассмотрены вопросы построения одномерного температурного поля в криволинейных ограждающих конструкциях с применением метода конечных разностей для решения уравнения Лапласа стационарной теплопроводности, а также определения влажности в их материалах.

Стационарный процесс теплопередачи через ограждающие конструкции связан с распределением температур внутри их слоев. Математические зависимости, предложенные для проведения теплотехнических расчетов, заложенные в строительных нормах [1], основаны, вообще говоря, на одномерном представлении температурного поля в ограждающих конструкциях [2, 3]. При этом инженеру важно знать не только приведенное сопротивление теплопередаче ограждающих конструкций, но и температуру на их внутренних гранях с целью определения местоположения температур точек росы и оценки влажностного режима их эксплуатации. В существующих нормах, вообще говоря, отсутствуют какие-либо зависимости или рекомендации для проведения теплотехнических расчетов криволинейных ограждающих конструкций.

Представленная работа имеет прежде всего учебную направленность для облегчения проведения вычислений, связанных с построением графиков изменения температур по слоям криволинейных ограждающих конструкций. Из этого следует, что разработка математической модели построения одномерного температурного поля с использованием метода конечных разностей является актуальной задачей.

Теоретические предпосылки расчёта

Температурное поле, возникающее в толще криволинейных ограждающих конструкций, в общем случае может быть представлено законом Фурье в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \left(\lambda_r \cdot r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda_\varphi \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial t}{\partial z} \right) = 0, \quad (1)$$

где λ_r , λ_φ , λ_z – теплопроводности материала по направлениям r , φ , Z соответственно, Вт/(мС).

При принятии равным нулю градиента температур по высоте и углу в ограждающей конструкции, принятии величины теплопроводности материала постоянной величиной уравнение (1) можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{r} \frac{dt}{dr} \left(\lambda_r \cdot r \frac{dt}{dr} \right) = 0, \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} + \frac{d^2 t}{dr^2} = 0, \quad (2)$$

или в упрощённой форме записи с использованием конечных разностей вместо дифференциалов:

$$\frac{\Delta r}{r} \Delta t + \Delta^2 t = 0. \quad (3)$$

Решение дифференциального уравнения (2) существует, однако представление результатов в табличной форме Excel не удобно и связано с вводом длинных, громоздких формул, запись которых изменяется на стыках слоев многослойной ограждающей конструкции и не может быть применена для всего массива данных универсально.

Для решения уравнения (3) в конечно-разностной форме необходимо представить запись отдельных входящих величин в следующем виде:

$$r = r_0 + i \frac{r_n - r_0}{n}, \quad (4)$$

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{r_n - r_0}{r_0 (n-i) + i r_n}, \quad (5)$$

$$dt = \Delta t = t_{i+1} - t_i, \quad (6)$$

$$d^2t = \Delta^2t = t_{i-1} - 2t_i + t_{i+1}, \quad (7)$$

где r_0, r_n – меньший и больший радиус кривизны цилиндрических поверхностей ограждающей конструкции, м;

i – порядковый номер точки, в которой решается уравнение (1).

Уравнение (3) с учётом записей (4) – (7) и приведением подобных запишется следующим образом:

$$t_{i-1} - \left(\frac{r_n - r_0}{r_0(n-i) + i \cdot r_n} + 2 \right) t_i + \left(\frac{r_n - r_0}{r_0(n-i) + i \cdot r_n} + 1 \right) t_{i+1} = 0, \quad (8)$$

Следует рассмотреть формирование системы линейных алгебраических уравнений, используя рисунок 1. Слои 1 – N (в качестве иллюстрации N = 3) наружной ограждающей конструкции разделены на равное количество промежуточных слоёв, при этом толщины их в пределах каждого слоя одинаковы, но неодинаковы в разноимённых слоях.

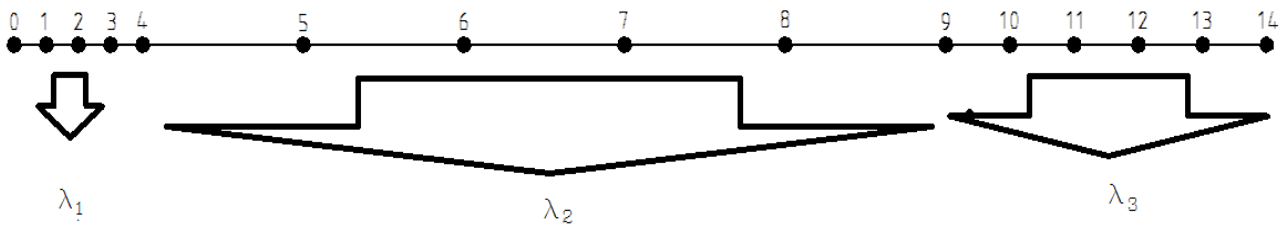


Рисунок 1 – Схема расстановки точек

При решении данной задачи принято, что температуры внутренней и наружной поверхностей вычислены при помощи следующих зависимостей:

$$t_0 = t_e - \frac{t_e - t_n}{R_T \cdot \alpha_e}, \quad (9)$$

$$t_n = t_e - \frac{t_e - t_n}{R_T} \left(R_T - \frac{r_0}{r_n} \cdot \frac{1}{\alpha_n} \right), \quad (10)$$

где t_e, t_n – расчётные температуры внутреннего и наружного воздуха, °С,

R_T – сопротивление теплопередаче ограждающей конструкции, м²°С/Вт:

$$R_T = \frac{1}{\alpha_в} + r_0 \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \ln \left(\frac{r_j}{r_{j-1}} \right) + \frac{r_0}{r_n} \cdot \frac{1}{\alpha_n}, \quad (11)$$

$\alpha_в, \alpha_n$ – коэффициенты теплоотдачи с внутренней и наружной поверхностей, Вт/м²С,

j – порядковый номер слоя.

Таким образом, требуется вычислить величины температур в $n-1$ точках.

При составлении уравнений типа (8) следует рассмотреть следующие случаи:

1) температура в точке 1:

$$-\left(\frac{r_n - r_0}{r_0(n-1) + r_n} + 2 \right) t_1 + \left(\frac{r_n - r_0}{r_0(n-1) + r_n} + 1 \right) t_2 = -t_0, \quad (12)$$

2) температура в точке $n-1$ (предпоследней):

$$t_{n-2} - \left(\frac{r_n - r_0}{r_0 + (n-1) \cdot r_n} + 2 \right) t_{n-1} = - \left(\frac{r_n - r_0}{r_0 + (n-1) \cdot r_n} + 1 \right) t_n, \quad (13)$$

3) граница слоёв (использован закон Фурье):

$$q = \frac{t_{i-1} - t_i}{\frac{r_i}{\lambda_j} \ln \left(\frac{r_i}{r_{i-1}} \right)}; \quad q = \frac{t_i - t_{i+1}}{\frac{r_i}{\lambda_{j+1}} \ln \left(\frac{r_{i+1}}{r_i} \right)}, \quad (14)$$

приравнивая друг к другу выражения (14) можно получить

$$t_{i-1} \frac{1}{\frac{r_i}{\lambda_j} \ln \left(\frac{r_i}{r_{i-1}} \right)} - t_i \left(\frac{1}{\frac{r_i}{\lambda_j} \ln \left(\frac{r_i}{r_{i-1}} \right)} + \frac{1}{\frac{r_i}{\lambda_{j+1}} \ln \left(\frac{r_{i+1}}{r_i} \right)} \right) + t_{i+1} \frac{1}{\frac{r_i}{\lambda_{j+1}} \ln \left(\frac{r_{i+1}}{r_i} \right)} = 0, \quad (15)$$

t_n – температура в точке n температура наружной поверхности стены, С.

На основе выражений (4) – (15) можно составить систему линейных уравнений для каждой внутренней точки ограждающей конструкции в порядке её разбиения по толщине слоёв. Решение этой системы уравнений можно произвести матричным методом:

$$[\Lambda] \cdot [t] = [S], \quad (16)$$

где $[\Lambda]$ – матрица из коэффициентов из неизвестных величинах температур,

$[t]$ – вектор неизвестных температур,

$[S]$ – вектор свободных членов.

Формирование матриц и векторов можно представить в следующем виде:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_j \ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right)} - \left(\frac{1}{\lambda_j \ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right)} + \frac{1}{\lambda_{j+1} \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)} \right) \frac{1}{\lambda_{j+1} \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$[S] = \left[-t_0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -t_n \left(\frac{r_n - r_0}{r_0 + (n-1) \cdot r_n} + 1 \right) \right]^T. \quad (18)$$

Решение уравнения (16) можно представить в следующем виде:

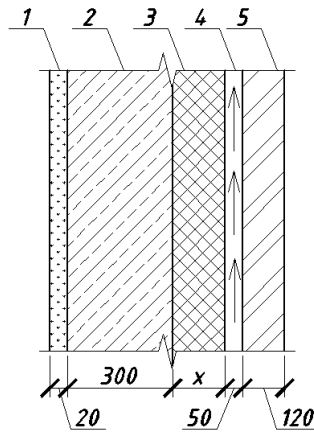
$$[t] = [\Lambda]^{-1} \cdot [S], \quad (19)$$

результатом которого является вектор температур в каждой расчётной точке.

Предложенный вариант построения одномерного температурного поля в криволинейных ограждающих конструкциях реализован в табличной форме Excel для наружной стены, конструкция которой представлена на рисунке 2, характеристики материалов которой сведены в таблицу 1.

Таблица 1 – Параметры материалов наружной стены

№ п/п	Наименование материала	Плотность, кг/м ³	Толщина, мм	Теплопроводность, Вт/мС
1	Известково-песчаная штукатурка	1600	20	0,81
2	Блок ячеистобетонный	500	300	0,17
3	Плиты минераловатные	75	140	0,0419
4	Вентилируемая воздушная прослойка	–	50	
5	Кирпич силикатный утолщенный	1600	120	1,28



1 – известково-песчаная штукатурка, 2 – блок ячеистобетонный, 3 – плиты минераловатные, 4 – вентилируемая воздушная прослойка, 5 – лицевая кладка
Рисунок 2 – Конструкция наружной стены

Результаты расчета представлены на рисунке 3.

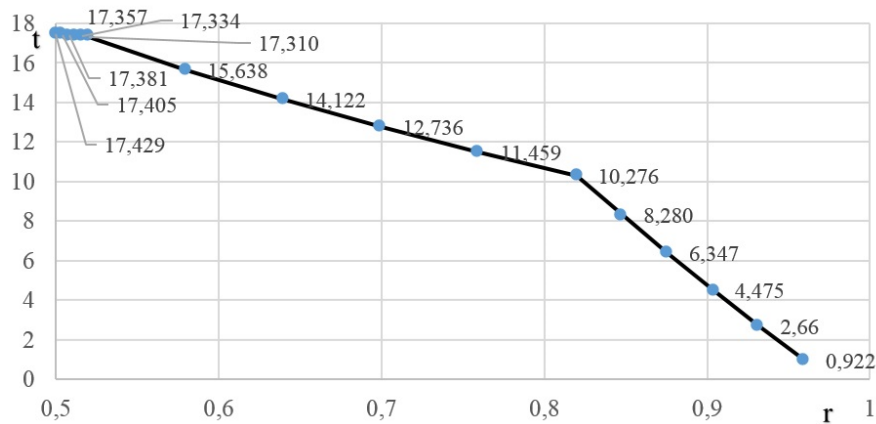


Рисунок 3 – График изменения температуры по слоям наружной стены с внутренним радиусом кривизны 0,5 м

Для сравнения на рисунке 4 приведены результаты расчёта величин температур в тех же точках без учёта криволинейности ограждающих конструкций.

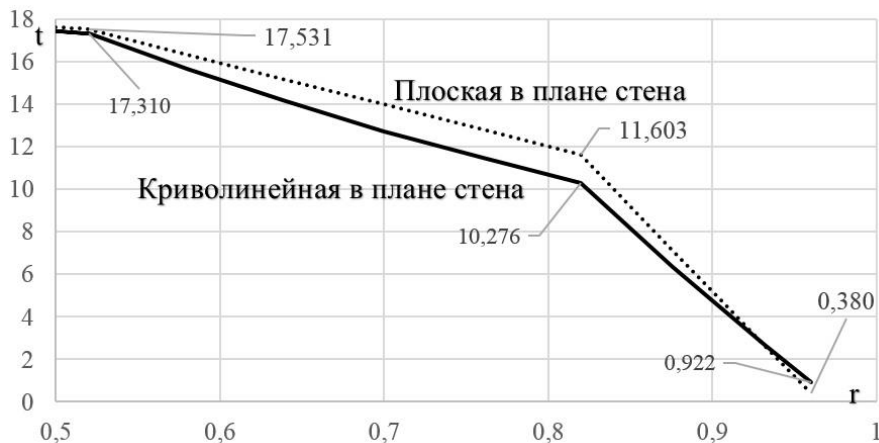


Рисунок 4 – Сравнение графиков изменения температур в толще криволинейной в плане и плоской наружной стены одинакового состава

Несовпадение результатов расчета составляет до 1,4 °С. В связи с этим нельзя достоверно утверждать, что применение методов теплотехнического расчета для плоских ограждающих конструкций применимо для криволинейных, а также разница в результатах может значительно сказаться на расчетном местоположении точки росы в подобном ограждении.

Выводы.

1. Полученные зависимости для построения температурного поля позволяют сократить время расчета величин температур в слоях цилиндрических в плане ограждающих конструкций без потери точности.

2. Предложенная работа может быть использована для ознакомления студентов с решением задач строительной теплофизики и выполнения части расчетов в рамках курсовых работ и дипломных проектов без применения сложного программного оборудования.

Список цитированных источников

1. Строительная теплотехника СП 2.04.01–2020. – Введ. 20.01.2021. – Минск : Минстройархитектуры, 2020. – 73 с.

2. Каталог удельных потерь теплоты (тепловых мостиков) теплотехнически неоднородных узлов ограждающих конструкций жилых и общественных зданий. – Введ. 0.01.2021. – Минск : Минстройархитектуры, 2020. – 211 с.

3. Здания и сооружения. Энергетическая эффективность : СН 2.04.02–2020. – Введ. 30.03.2021. – Минск : Минстройархитектуры, 2020. – 21 с.