УДК: 517.2, 519.7, 531.36, 621.1

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ КРУГОВОЙ АРКИ

Сердар Назаров[1], Мухаметберды Рахимов[2], Шатлык Аннабердиев[3]

[1] кандидат технических наук, ректор Государственного энергетического института Туркменистана (ГЭИТ), г. Мары, Туркменистан

[2]доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой “Общей физики, математики и информатики – ОФМИ” ГЭИТ, г. Мары, Туркменистан e-mail: tdei@tdei.edu.tm

[3]преподаватель кафедры ОФМИ ГЭИТ, г. Мары, Туркменистан

Аннотация

В сооружениях, имеющих достаточно большую высоту или длину, определение параметров устойчивых режимов и изучения модели оптимального конструирования круговой арки является важной задачей современной прикладной науки. Рассматривается задача оптимального моделирования динамики смещений частей выпуклой круговой арки при внешнем давлении. В качестве управляющих функций принимаются функции, характеризующие внешние силы, действующие на арку. Предполагается, что один конец арки закреплен шарнирно, другой защемлен. В качестве критерий оптимальности принимается энергетический функционал. Для решения задачи синтеза оптимального управления применены методы динамического программирования и спектрального разложения. Найдены синтезирующие оптимальные управления и аналитическое решение счетной системы уравнений типа Риккати.

Ключевые слова: уравнения Беллмана, уравнения Риккати, оптимальное управление

ON SOLVING THE PROBLEM OF OPTIMAL DESIGN OF THE CIRCULAR ARCH

Serdar Nazarov[1], Mukhametberdy Rakhimov[2], Shatlyk Annaberdiyev[3],

Abstract

In structures that have a fairly large height or length, determining the parameters of stable modes and studying the model of optimal design of the circular arch are an important task of modern applied science. The task of optimal modeling of the dynamics of displacements of parts of the convex circular arch is considered at external pressure. As control functions, functions characterizing the external forces acting on the arch are accepted. It is assumed that one end of the arch is mounted articulated, the other is pinched. As an optimality criterion, energy functionality is accepted. To solve the problem of the synthesis of optimal controls, dynamic programming and spectral decomposition methods are used. Synthesizing optimal controls and analytical solution of the counting system of Riccati type equations were found.

Keywords: Bellman equations, Riccati equations, optimal controls

Введение. Применение метода динамического программирования в системах с распределенными параметрами имеет особое важное место в решении задач оптимального моделирования физико-технических процессов. С начала первых публикаций [см. библ. в 1–12] по оптимальному управлению системами с распределенными параметрами прошло более шестидесяти лет. В течение этого периода было опубликовано много работ и были изданы монографии (см. библ. в [1–11]), посвященные изучению специальных вопросов этой обширной области прикладной математики. Тем не менее и на сегодняшний день одной из актуальных проблем является обоснованное применение известных методов конечномерных систем к задачам оптимального управления системами с распределенными параметрами. Отметим, что метод динамического программирования нашел широкое применение в решении задач оптимизации технических процессов [см. библ. в 1–5, 7, 8, 11], и оно связано с тем, что этот метод позволяет решить проблему синтеза [см. библ. в 3, 7]. Отсюда вытекает актуальность проблемы применения метода динамического программирования в задачах оптимального управления колебательными системами.

Задачи минимизации квадратичных функционалов занимают важное место в теории управления бесконечномерных систем, что может быть объяснено тем, что квадратичные функционалы выражают энергию рассматриваемой физической системы [7, 9, 10, 12]. Известно, что задача синтеза при минимуме строго выпуклого квадратичного функционала для линейного уравнения управляемого объекта приводит к решению нелинейного уравнения типа Риккати. Необходимость полного исследования этого уравнения продиктовано из практической применимости этого уравнения. Применение спектрального разложения дифференциальных операторов для определения явного решения нелинейного уравнения Риккати имеет большое теоретическое и практическое значения.

В сооружениях, имеющих достаточно большую высоту или длину, определение параметров устойчивых режимов и изучения модели оптимального конструирования круговой арки являются важной задачей современной прикладной науки [12]. Кругу этих проблем посвящена настоящая работа.

1. Постановка задачи оптимального управления

Рассмотрим изогнутый тонкий стержень постоянного сечения, ось которого является дугой с радиусом a. Стержень подвержен действию равномерного одностороннего внешнего давления p; α – жесткость стерженья на изгиб [12]. Тогда динамику смещений $u = u(t,x)$ частицы изогнутого тонкого стерженья (выпуклой круговой арки) при наличии дополнительной внешной силы $F(t,x)$ можно представить в виде:

$$u_{tt} - Au = q_1(x)p_1(t) + q_2(x)p_2(t) + f(t,x) \equiv F(t,x), \qquad (1)$$

где A – дифференциальный оператор шестого порядка:

$$Au \equiv u^{VI} + \alpha_1 u^{IV} + \alpha_2 u'', \ \alpha_1 = \frac{2}{a^2} + \frac{pa}{\alpha}\ ; \ \alpha_2 = \frac{1}{a^4} + \frac{p}{\alpha a}.$$

В качестве управляющих функций примем $p_1(t)$, $p_2(t)$, $f(t,x)$. Функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ в правой части (12) считаются заданными и характеризуют форму (геометрическую) внешных сил, действующих на арку по оси Ox. Функция $f(t,x)$ выражает произвольную внешную силу. Заметим, что во многих задачах управлений по границе (неоднородные граничные условия) с помощью специальной подстановки задача приводится к однородной, но с правой частью типа $F(t,x)$, таким образам можно считать, что рассматривается и тот случай, когда управление осуществляется с границы.

Начально-граничные условия:

$$\begin{cases} u(0,x)=\varphi_1(x),\ \ u_t'(0,x)=\varphi_2(x), \\ u(t,0)=u_x(t,0)=u_{xxx}(t,0)=0,\ \ x=0, \text{(шарнирное закрепление)}. \\ u(t,l)=u_x(t,l)=u_{xx}(t,l)=0,\ \ x=l\ \text{(защемление)} \end{cases} \quad (2)$$

В качестве критерий оптимальности принимается интеграл:

$$I[t_0,p_1(t),p_2(t),f(t,\cdot)]=\int_{t_0}^{T}\int_0^l[\alpha_1u^2+\alpha_2u_t^2+\beta_0f^2(t,x)]dxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{T}[\beta_1p_1^2(t)+\beta_2p_2^2(t)]\,dt+\int_0^l[a_0u^2(T,x)+a_1u_t^2(T,x)]dx, \qquad (3)$$

$$a_0^2+a_1^2\neq 0, \qquad \alpha_1\geq 0, \qquad \alpha_2\geq 0, \qquad \beta_0^2+\beta_1^2+\beta_2^2\neq 0.$$

Требуется найти управляющие функции $f(t,x)=f(t,w)$, $p_1(t)=p_1(t,w)$, $p_2(t)=p_2(t,w)$ как вектор-функции состояния $w=w(t,x)=\{u(t,x),u_t(t,x)\}-$ решения задачи (1), (2) и такие, чтобы функционал (3) принимал минимальное возможное значение ($T-$ фиксирован).

2. Применение метода динамического программирования

Для решения задачи синтеза оптимального управления (1)-(3) применяем метод динамического программирования и метод спектрального разложения. Введем функционал Беллмана ($t_0\leq t\leq \tau<T$):

$$S=S[t,w(t,.)]=\min_{p_1,p_2,f}I[t,p_1,p_2,f],\ \ w=w(t,x)=\{u(t,x),u_t(t,x)\}.$$

При $t=t_0$ значения функционала $S[t,w(t,.)]$ выражает минимум интеграла (3), т.е. $S[T,w(T,\cdot)]=\int_0^l[a_0u^2(T,x)+a_1u_t^2(T,x)]dx$,

$$S[t_0,w(t_0,\cdot)]=\min_{p_1(t),p_2(t),f(t,\cdot),t\in[t_0,T]}I[t_0,p_1(t),p_2(t),f(t,\ \cdot)].$$

Предположим, что функционал $S=S[t,w(t,.)]$, $t_0\leq t\leq T$ непрерывно дифференцируем по $t\in[t_0,T]$ и имеет функциональную производную Фреше $\Phi(t,w;\Delta w)$ в $L_2(0,l)\oplus L_2(0,l)$, то есть имеет частные функциональные производные по компонентам вектор-функции $w=w(t,x)=\big(u(t,x),u_t(t,x)\big)$ в $L_2(0,l)$. Тогда эту функциональную производную по Δw можно представить в виде:

$$\Phi(t,w;\Delta w)=\int_0^l[\Delta u(t,x)v_1(t,x)+\Delta u_t(t,x)v_2(t,x)]\,dx, \qquad (4)$$

где $v=v(t,x)=\big(v_1(t,x),v_2(t,x)\big)$ определяется единственном образом согласно теореме Рисса о непрерывном функционале. Для определения функционала $S=S[t,w(t,.)]$, $t_0\leq t\leq T$ с учётом (1) и (4), получим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Беллмана в частных функциональных производных [7]:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{p_1(t),p_2(t),f(t,\cdot),t\in[t_0,T]} \{(u_t, v_1) + (Au, v_2) + p_1(t)(q_1, v_2) +$$
$$+p_2(t)(q_2, v_2) + (f, v_2) + \tag{5}$$
$$+ \int_0^l [\alpha_1 u^2 + \alpha_2 u_t^2 + \beta_0 f^2(t,x)]dx + [\beta_1 p_1^2(t) + \beta_2 p_2^2(t)]\Big\},$$

$$S[T, w(T,x)] = \int_0^l [a_0 u^2(T,x) + a_1 u_t^2(T,x)]dx, \quad t_0 \le t < T, \tag{6}$$

где $v = v(t,x) = (v_1(t,x), v_2(t,x))$ есть функциональная производная Фреше функционала $S[t, w(t,.)]$ в $L_2(0,l) \oplus L_2(0,l)$ и может быть определена из интеграла (4). Из уравнения (5) получен формулы для оптимального синтеза:

$$f(t,x) = -\left(\frac{1}{2\beta_0}\right) v_2(t,x);$$
$$p_1(t) = -\left(\frac{1}{2\beta_1}\right)(q_1, v_2); \; p_2(t) = -\left(\frac{1}{2\beta_2}\right)(q_2, v_2). \tag{7}$$

Подставив значения управляющих функций из (7) в уравнении Беллмана (5), для определения оптимального функционала $S[t, w(t,.)]$ получим нелинейное уравнение без условии min:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = (u_t, v_1) + (Au, v_2) - \left(\frac{1}{4\beta_0}\right) v_2^2(t,x) - \tag{8}$$
$$-(1/4\beta_1)(q_1, v_2)^2 - (1/4\beta_2)(q_2, v_2)^2.$$

Заметим, что управляющие функции определены с помощью функциональной производной $v_2(t,x)$ функционала S. Решение уравнения (8) с условием (6) ищем в квадратичной форме:

$$S[t, w(t,.)] = \int_0^1 \int_0^1 w^*(t,x) K(t,x,y) w(t,y) dxdy,$$
$$K(t,x,y) = \left\| K_{ij}(t,x,y) \right\| \equiv K(t,y,x), \; K_{12} = K_{21.}$$

Находим функциональные производные ($i = 1,2$):

$$v_i(t,x) = 2\int_0^1 [K_{i1}(t,x,y)u(t,y) + K_{i2}(t,x,y)u_t(t,y)]\, dy,$$

Дальнейшее изложение материала удобно провести с применением операторных функций. Определим интегральный оператор $K(t)$ в $H = L_2(0,l)$ с ядром функции $K(t,x,y)$. Тогда функционал $S[t, w(t,.)]$ и его функциональную производную можно представить с помощью оператора $K(t)$ в виде:

$$S[t, w(t)] = (K(t)w(t), w(t))_{H\oplus H}, \quad v(t) = 2K(t)w(t),$$

где $K(t)$ матрица операторов и имеют вид:

$$K(t) = \begin{pmatrix} K_{11}(t) & K_{12}(t) \\ K_{12}(t) & K_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Для определения $K(t)$ получим следующие системы дифференциально-операторных уравнений Риккати ($\forall x \in D(A), b_i = q(q, K_{i2}x), i = 1,2; K_{12}y \in D(A), K_{22}y \in D(A), \forall y \in H$):

$$\begin{cases} (K'_{11}x,y) + 2(AK_{12}x,y) - (\beta_0^{-1}K_{12}x + b_1, K_{12}y) + \alpha_1(x,y) = O, \\ \quad (K'_{12}x,y) + (AK_{22}x,y) + (K_{12}x,y) - (\beta_0^{-1}K_{12} + b_1, K_{22}y) = O, \\ \quad (K'_{22}x,y) + +2(K_{12}x,y) - (\beta_0^{-1}K_{22}x + b_2, K_{22}y) + \alpha_2(x,y) = O, \end{cases} \tag{9}$$

где элемент $q \in H = L_2(0,l)$ соответствующий функции

$$m(\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta_1} q_1(\alpha) q_1(\beta) + \frac{1}{\beta_2} q_2(\alpha) q_2(\beta).$$

Начальные условия:

$(K_{11}(T)x,y) = a_0(x,y), (K_{12}(T)x,y) = O, (K_{22}(T)x,y) = a_1(x,y),$ (10)

Таким образом, практически для определения (f, p_1, p_2) нужно решить нелинейную задачу (9), (10). При известных операторах $K_{ij}(t)$ найдем искомый $\vartheta(t)$. Наконец, подставляя уже найденное значение $\vartheta_2(t)$, получим закон синтезирующих оптимальных управлений.

Особенность системы (9), (10) заключается в её нелинейности, она изучена недостаточно и не выявлена структура ее решения в зависимости от спектрального свойства оператора A [7]. Основная трудность заключается в выборе функционального пространства и исследовании в нем регулярности оператора $K(t)$. В настоящей работе методом спектрального разложения получены явные представления оператора $K(t)$.

Поставленная выше задача оптимального моделирования (1)–(3) решена полностью; решение определено с помощью матрицы $K(t,x,y)$, т. е. оператора $K(t)$ из расщепленной задачи (9)–(10). Найдены функциональные производные $v_1(t,x)$, $v_2(t,x)$. Подставляя значение $v_2(t,x)$ в (7), найдем оптимальные управляющие функции:

$$\begin{cases} f(t,w) = -\dfrac{1}{\beta_0}\displaystyle\int_0^l [K_{12}(t,x,y)u(t,y) + K_{22}(t,x,y)u_t(t,y)]\,dy, \qquad i = 1,2, \\ \quad p_i(t) = -\dfrac{1}{\beta_i}\displaystyle\int_0^l\int_0^l q_i(x)[K_{12}(t,x,y)u(t,y) + K_{22}(t,x,y)u_t(t,y)]\,dy\,dx \end{cases} \tag{11}$$

В формулах (11) функции $f(t,w)$, $p_i(t,w)$ зависят от найденных из задачи (1), (2) оптимальных функций $u(t,x)$, $u_t(t,x)$. Функции $u(t,x)$, $u_t(t,x)$ $(0 < t < T)$ определяются из исходной начально-краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных при подстановке значений найденных управлений из (11) в (1). Из формулы (11) определены структуры оптимальных управляющих функций $f(t,w)$, $p_i(t,w)$, $i = 1,2$ т. е. законы внешних сил, конструируемых для погашения колебаний круговой арки.

3. Применение метода спектрального разложения

Из приведенной выше схемы решения задачи синтеза оптимального управления следует, что система уравнений Риккати (9) с начальными условиями (10) является важным структурным звеном в цепочке алгоритмов построения оптимального управления, т. е. в определении оптимального режима колебаний круговой арки. Для решения задачи (9),(10), т. е. системы уравнений типа Риккати (9), элементы матрицы $K(t)$ разлагают по собственным элементам оператора A, при этом получаемая для коэффициентов Фурье счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати иследуются матричным способом. Мы приведем некоторые результаты исследований системы матричных дифференциальных уравнений, получаемые из системы (9),(10) операторно-дифференциального уравнения с нелинейностью типа Риккати.

Оператор A, порожденный граничной задачей (1)–(2) является самосопряженным оператором в $H = L_2(0, l)$, имеет в нем линейно независимую ортонормированную систему $\{\varphi_k\}$ базисных элементов, соответствующие собственным значениям λ_k, $k = 1, 2, ...$; $\lambda_k \to \infty, k \to \infty$.

Предположим, что $q = \beta_1 = \beta_2 = 0$ и решение системы (9), (10) будем искать в виде:

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t)\, \varphi_k \otimes \varphi_k, \quad K(t) = \|K_{ij}(t)\|, \qquad K_{21}(t) = K_{12}(t),$$

$$S_k(t) = \begin{pmatrix} \alpha_k(t) & \beta_k(t) \\ \beta_k(t) & \gamma_k(t) \end{pmatrix}, i, j = 1,2\ ; (\varphi_k \otimes \varphi_k x = (x, \varphi_k)\varphi_k).$$

Тогда, полагая $x = \varphi_k, y = \varphi_l$, после замены $t \to T - t$ (сохраняем прежние обозначения неизвестных α_k, β_k, γ_k) получим следующую задачу Коши для счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати:

$$\begin{cases} \alpha'_k(t) + 2\lambda_k^2 \beta_k(t) + \beta_0^{-1} \beta_k^2(t) - \alpha_1 = 0 \\ \beta'_k(t) + \lambda_k^2 \gamma_k(t) - \alpha_k(t) + \beta_0^{-1} \gamma_k(t)\beta_k(t) = 0, \\ \gamma'_k(t) - 2\beta_k(t) + \beta_0^{-1} \gamma_k^2(t) - \alpha_2 = 0, \end{cases} \tag{12}$$

$$\alpha_k(0) = a_0, \ \ \beta_k(0) = 0, \gamma_k(0) = a_1, k = 1,2, \dots \tag{13}$$

Доказано локальная разрешимость задачи (12), (13). В том важном для практики частном случае, когда в задаче $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, решение задачи (12), (13) получено в явном виде. Действительно, переходя к матричной записи систем (12)

$$S'_k(t) = -S_k(t)M_k - M_k^* S_k(t) + S_k(t)\widetilde{M} S_k(t),$$

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_k^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta_0^{-1} \end{pmatrix}$$

и перемножив слева и справа обе части этого уравнения на $S_k^{-1}(t) \equiv R_k(t)$, $det|S_k(t)| \neq 0$, а также учитывая, что $R'_k(t) = -S_k^{-1}(t) S'_k(t) S_k^{-1}(t)$, получим линейную систему

$$R'_k(t) - M_k R_k(t) - R_k(t) M_k + \widetilde{M} = 0, \ \ R_k(t) = \begin{pmatrix} x_k(t) & y_k(t) \\ y_k(t) & z_k(t) \end{pmatrix}.$$

Решая ее и производя обратное преобразование с учетом условий (13), получим следующие явные выражения для $\alpha_k(t), \beta_k(t)$ и $\gamma_k(t)$:

$$\alpha_k(t) = \frac{z_k(t)}{\Delta_k(t)}, \ \beta_k(t) = -\frac{y_k(t)}{\Delta_k(t)}, \ \ \gamma_k(t) = \frac{x_k(t)}{\Delta_k(t)} \ \ ;$$

$$z_k(t) = \left(\frac{\lambda_k^2}{a_0} - \frac{1}{a_1}\right) sin^2 \lambda_k (T-t) + \frac{1}{4\beta_0 \lambda_k} \sin 2\, \lambda_k (T-t) +$$

$$+ \frac{T-t}{2\beta_0} + a_1^{-1} > 0,$$

$$y_k(t) = \frac{1}{2\lambda_k}\left(\frac{\lambda_k^2}{a_0} - \frac{1}{a_1}\right) \sin 2\, \lambda_k (T-t) - \frac{1}{2\beta_0 \lambda_k^2} sin^2 \lambda_k (T-t),$$

$$x_k(t) = \frac{T-t}{2\beta_0 \lambda_k^2} - \frac{1}{\lambda_k^2}\left(\frac{\lambda_k^2}{a_0} - \frac{1}{a_1}\right) sin^2 \lambda_k (T-t) -$$

$$- \frac{1}{4\beta_0 \lambda_k^3} \sin 2\, \lambda_k (T-t) + a_0^{-1} > 0,$$

$$\Delta_k(t) \equiv x_k(t) z_k(t) - y_k^2(t) = \frac{1}{4\beta_0 \lambda_k^3}\left(\frac{\lambda_k^2}{a_0} - \frac{1}{a_1}\right) \sin 2\, \lambda_k (T-t) +$$

$$+ \lambda_k^{-2}\left(\frac{\lambda_k^2}{a_0} + \frac{T-t}{2\beta_0}\right)\left(\frac{T-t}{2\beta_0} + \frac{1}{a_0}\right) - \frac{1}{4\beta_0 \lambda_k^4} sin^2 \lambda_k (T-t) > 0,$$

$$a_k(t)\gamma_k(t) - \beta_k^2(t) \equiv 1 > 0, \quad k = 1,2, \ldots.$$

Изложенным выше методом явное решение системы уравнений Риккати можно построить и в том случае, когда $q \neq 0, \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$.

Заключение. Задача (1)–(3) может быть обобщена, в частности, можно рассматривать более общие критерии оптимальности. Также можно рассматривать несамосопряженные граничные задачи для описания смещений частей круговой арки при различных закреплениях ее концов. Предлагаемые здесь методы решения задачи оптимального конструирования можно применять и в этих задачах. Результаты, полученные в настоящей работе, рекомендуется использовать в технических задачах, в которых ищется оптимальная конструкция круговой арки.

Список цитированных источников

1. Балакришнан, А. В. Прикладной функциональный анализ / А. В. Балакришан // М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. Бутковский, А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский // М.: Наука, 1975. – 568 с.
3. Егоров, А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А. И. Егоров // М.: Наука, 1978. – 464 с.
4. Егоров, А. И. Основы теории управления / А. И. Егоров // М. Физматлит, 2004.−502 с.
5. Егоров, А. И. Уравнения Риккати / А. И. Егоров //М. Физматлит, 2001.−319 с.
6. Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс // М.: Мир, 1972. – 414 с.

7. Лурье, К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики / К. А. Лурье // М.: Наука, 1975. – 480 с.
8. Плотников, В. И. Теория оптимизации управляемых систем с распределенными параметрами / В. И. Плотников // Докт. дисс., Горький, 1974.
9. Рахимов М., Оптимальное моделирование процессов теплопередачи и колебаний. Методы динамического программирования и спектрального разложения, научная монография, LAMBERT Academic Publishing, ISBN: 978-620-3-30910-2, International Book Market Service, 2021. – 346 pg.
10. Сиразетдинов, Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами / Т. К. Сиразетдинов // М.: Наука, 1977. – 480 с.
11. Троицкий, В. А., Петухов, Л. В. Оптимизация формы упругих тел / В. А. Троицкий, Л. В. Петухов // М.: Наука, 1982. – 432 с.
12. Афанасьев, В. Н. Колмановский, В. Б. Носов, В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. Москва : «Высшая школа», 1989.−447 с.
13. Wang, P. K., Control of distributed parameter systems, в книге «Advance in control systems theory and applications» ed. by C. F. Leondes, 1. Acad. Press, NewYork – London, 1964. – С. 75-172.
14. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения, / Л. Коллатц // «Наука», главная редакция физико-математической литературы, Москва : 1968. – 504 с.