Accuracy of the LBE approach depends on spatial resolution with respect to the capillary radius, e.g., the use of 100 grid points over one capillary diameter results in γ_{vf} of less than 6% for all aspect ratios.

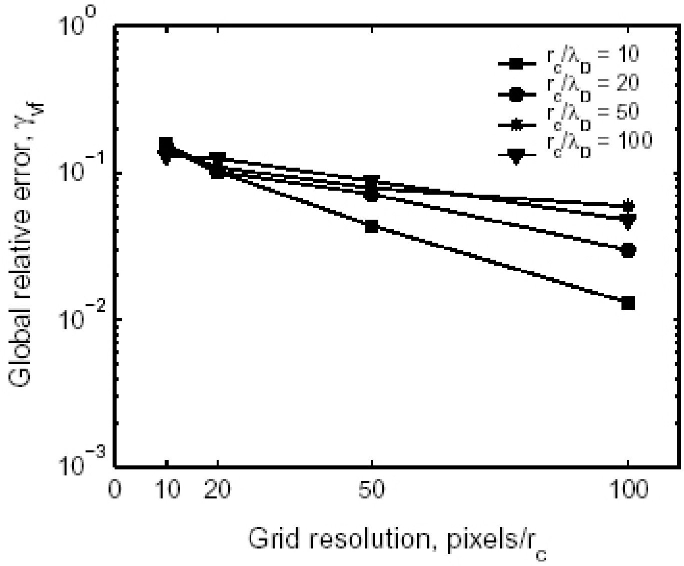

Figure 3. Global relative error of a simulated velocity field (γ_{vf}) relative to the solution of the momentum balance equation

Conclusion

As a result of work the following conclusions have been made:

1) LBE-method has been studied
2) A modeling program for EOF simulation has been developed
3) Derived results have been analysed

References

1. X. He and L.-S. Luo. Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation. *Phys. Rev. E*, 56(6):6811-6817, Dec. 1997.
2. Hlushkou D. Numerical simulation of fluid flow and mass transport in (electro) chromatographic systems, Dissertation – Magdeburg, 2004.
3. A. Masselot and B. Chopard. A multiparticle lattice-gas model for hydrodynamics. *Int. J. Mod. Phys.C*, 9(8):1221-1230, 1998.
4. Y. H. Qian, D. d'Humiµeres, and P. Lallemand. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation. *Europhys.Lett.*, 17(6):479-484, Jan. 1992.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ КОЛЬЦЕОБРАЗНОЙ ЗАДАЧИ ШЕСТНАДЦАТИ ТЕЛ

Проскура Е.М., Чичурин А.В.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Рассматривается ограниченная кольцеобразная задача с неполной симметрией [1] для шестнадцати тел P_0, P_i $(i=\overline{1,14})$, P с массами m_0, m_i $(i=\overline{1,14})$, μ соответственно. Тела взаимно притягиваются друг другом в соответствии с законом всемирного тяготения и двигаются в одной плоскости. При движении тела P_i $(i=\overline{1,14})$ образуют два правильных семиугольника, равномерно вращающехся вокруг тела P_0 с угловой скоростью ω. Угловая скорость вращения точно определяется из условия теоремы Банка-Эльмабсута [2], а также из геометрических и гравитационных параметров модели [2]. Согласно понятию «ограниченная задача трех тел» [3] и интерпретации понятия «ограниченная задача любого конечного числа тел», данной в работах [4, 5], параметр μ является бесконечно малой величиной. Существование таких динамических моделей доказано в работах [4, 5].

В рассматриваемом гравитационном поле, порождаемом взаимным притяжением пятнадцати тел, и их притяжением на тело P с нулевой массой $\mu = 0$ (такое тело называют пассивно гравитирующим), необходимо исследовать движение этого пассивно гравитирующего тела. Согласно методу Пуанкаре [6] первым этапом исследования таких моделей является определение стационарных решений соответствующих систем дифференциальных уравнений. В нашем случае соответствующая система дифференциальных уравнений в координатной форме примет вид:

$$\mu\frac{d^2x_0}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_0},\ \mu\frac{d^2y_0}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_0},\ \mu\frac{d^2z_0}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_0}, \tag{1}$$

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i},\ m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i},\ m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad (i = \overline{1,14}), \tag{2}$$

где

$$U(x_0, y_0, z_0, \dots, x_n, y_n, z_n) = \frac{f}{2}\sum_{k=0}^{14}\sum_{i=0}^{14}{}' \frac{m_k m_i}{\Delta_{ki}},$$

$$\Delta_{ki} \equiv \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}\ .$$

Математическая модель ограниченной задачи шестнадцати тел с неполной симметрией при $p = 2$ описывается во вращающейся системе координат системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = 2\omega\frac{dY}{dt} + \omega^2 X + \frac{\partial U}{\partial X}, \qquad \frac{d^2Y}{dt^2} = -2\omega\frac{dX}{dt} + \omega^2 Y + \frac{\partial U}{\partial Y},\ \frac{d_2 Z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial Z}, \tag{3}$$

где

$$U(X,Y,Z) = f\left(\frac{m_0}{\Delta_0} + m_1\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{\Delta_i} + m_2\sum_{j=1}^{7}\frac{1}{\Delta_j}\right),$$

$$\Delta_0 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},\ \Delta_i = \sqrt{(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2 + (Z - Z_i)^2},$$

$$X_i = \cos\frac{2\pi(j-1)}{7},\ Y_i = \sin\frac{2\pi(i-1)}{7},\ Z_i = 0\ \ (i = \overline{1,7})$$

$$\Delta_j = \sqrt{(X - X_j)^2 + (Y - Y_j)^2 + (Z - Z_j)^2},$$

$$X_i = \cos\frac{2\pi(j-1)}{7},\ Y_i = \sin\frac{2\pi(i-1)}{7},\ Z_i = 0\ \ (i = \overline{1,7}),$$

а ω определяется равенством:

$$\omega_l^2 = \frac{M_0}{|q_{lk}|^3} + \frac{1}{q_{lk}}\left(\sum_{\substack{1\le r\le 2\\ r\ne l}} m_r\sum_{j=1}^{7}\frac{q_{lk} - q_{rj}}{|q_{lk} - q_{rj}|^3} + m_l\sum_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{7}\frac{q_{lk} - q_{lj}}{|q_{lk} - q_{lj}|^3}\right)$$

(l - означает номер окружности, k - номер вершины на заданной окружности, q_{lk} - любую координату точки $P_{l,k}$).

Условия существования точных гамографических решений в задаче взаимнопритягивающихся пятнадцати тел в общей форме записываются с помощью следующих равенств, вытекающих из теоремы Банка-Эльмабсута

$$\omega_l^2 x_{lk} = \frac{m_0 x_{lk}}{\left(x_{lk}^2 + x_{lk}^2\right)^{3/2}} + \sum_{\substack{1\le r\le 2\\ r\ne l}} m_r \sum_{j=1}^{7} \frac{x_{lk} - x_{rj}}{\left(\left(x_{lk} - x_{rj}\right)^2 + \left(y_{lk} - y_{rj}\right)^2\right)^{3/2}} + m_l \sum_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{7} \frac{x_{lk} - x_{lj}}{\left(\left(x_{lk} - x_{lj}\right)^2 + \left(y_{lk} - y_{lj}\right)^2\right)^{3/2}},$$

$$\omega_l^2 y_{lk} = \frac{m_0 y_{lk}}{\left(x_{lk}^2 + x_{lk}^2\right)^{3/2}} + \sum_{\substack{1\le r\le 2\\ r\ne l}} m_r \sum_{j=1}^{7} \frac{y_{lk} - y_{rj}}{\left(\left(x_{lk} - x_{rj}\right)^2 + \left(y_{lk} - y_{rj}\right)^2\right)^{3/2}} + m_l \sum_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{7} \frac{y_{lk} - y_{lj}}{\left(\left(x_{lk} - x_{lj}\right)^2 + \left(y_{lk} - y_{lj}\right)^2\right)^{3/2}}$$

где l - означает номер окружности, k - номер вершины на заданной окружности, q_{lk} - любую координату точки $P_{l,k}$.

Для нахождения всех равновесных решений ограниченной задачи $N = 2n + 2$ тел $(n = 7,\ p = 2)$ требуется решить систему двух уравнений [7]

$$f(x,y) = \omega^2 x - \frac{m_0 x}{\Delta_0^{\,3}} + m_1 \sum_{i+1}^{7} \frac{x_i - x}{\Delta_i^{\,3}} + m_2 \sum_{j=1}^{7} \frac{x_j - x}{\Delta_j^{\,3}} = 0,$$

$$g(x,y) = \omega^2 y - \frac{m_0 y}{\Delta_0^{\,3}} + m_1 \sum_{i+1}^{7} \frac{y_i - y}{\Delta_i^{\,3}} + m_2 \sum_{j=1}^{7} \frac{y_j - y}{\Delta_j^{\,3}} = 0,$$

где ω - угловая скорость, с которой вращаются оба семиугольника, (x_i, y_i) $\left(i = \overline{1,7}\right)$ - координаты вершин первого семиугольника, (x_j, y_j) $\left(j = \overline{1,7}\right)$ – координаты вершин второго семиугольника.

Неизвестными величинами в этой системе являются x и y. Для решения этой системы воспользуемся алгоритмическими и графическими возможностями системы Mathematica.

Найдены положения равновесия при различных значениях геометрических и гравитационных параметров, приведена их геометрическая интерпретация. Также построены зависимости угловой скорости вращения обоих семиугольников и зависимости массы тел второго семиугольника от массы тел первого семиугольника и расстояния от центрального тела до тел второго семиугольника.

Литература

1. Ихсанов Е. В. Компьютерные методы нормализации гамильтонианов ограниченных задачах небесной механики. - М.: изд-во РУДН, 2004.

2. Bank D., Elmabsout A., Configurations polygonales en equilibre relative // Paris: C.R. Acad. Sci. 2001. Vol. 329. Serie lib. P. 243-248.

3. Албалкин В. К., Аксенов В. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под. Ред. Г. Н. Дубошина. - М.: Наука, 1976.

4. Гребеников Е. А., Козак Д., Якубяк М. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел. М., Изд-во РУДН, 2002.

5. Гребеников Е. А. Существование точных симметрийных решений в плоскости ньютоновой проблемы многих тел // Матем. Моделирование. 1998. Т. 10. № 8. С. 74-80.

6. Пуанкаре А. Избранные труды. – М.: Наука, Т. 1, 1971. – 776 с., Т. 2, 1972. – 356с., Т. 3, 1974. – 773 с.

7. Гадомский Л., Ковальчук И. Р., Чичурин А. В. Построение математических моделей для задач космической динамики в системе компьютерной алгебры Mathematica. - М.: МАКС Пресс. 2007. -110 с.