

В тестировании приняли участие 23 студента в возрасте 20–22 лет. Тестируемые выполняли задания в два этапа: сначала в трех приложениях для ознакомления с интерфейсом, а затем другие варианты тех же заданий в режиме мониторинга. Каждый вариант состоит из 16 операций, связанных с форматированием и разметкой документа, выбранных с учётом предположения о влиянии организации инструментальных панелей преимущественно на действия, выполняемые без клавиатуры.

По скорости выполнения заданий боковая панель оказалась аутсайдером, что хорошо согласуется с затруднениями большинства пользователей при прецизионных горизонтальных движениях мышью. 58% тестируемых достигли наибольшей скорости работы в MFI, для 32% более быстрая работа отмечена при использовании верхней панели, и только 10% проявили наибольшую эффективность в интерфейсе с боковой панелью.

При нормировании скорости работы относительно интерфейса с верхней панелью, MFI оказался более быстрым интерфейсом для 63% пользователей (средний выигрыш времени 30%). Соответственно только для 37% пользователей верхняя панель оптимальнее, чем MFI (причем средний выигрыш времени в их случае всё же 30%). Наконец, боковая панель предпочтительнее верхней для 38% пользователей (средний выигрыш времени 33%), и почти для 2/3 этих пользователей наиболее эффективен интерфейс MFI.

У ряда пользователей наблюдались выраженные серии всплесков S, соответствующие эмоциональной реакции на события. Исходя из предположения о сосредоточенности на решаемой задаче, это говорит о переживаниях или от тестовых заданий (различия вариантов не позволяли выполнять работу бездумно), или от поиска нужного виджета на панели.

Ярко выраженный ER-SCR зарегистрирован в 1/4 от общего числа тестов: всего 1 раз при использовании боковой панели, чаще всего при использовании MFI, в т. ч. нередко у пользователей, для которых она оптимальна по скорости их работы. Аналогичное наблюдение верно и для пользователей, для которых оптимальна верхняя панель: иначе говоря, использование наиболее привычного и эффективного интерфейса может косвенно способствовать. Заметим, что данный фактор хорошо согласуется с рядом исследований [8, 9], показывающих, что возбуждающий стресс помогает выполнить задачу, поскольку увеличивает бдительность. Однако слишком большой стресс затрудняет выполнение этой задачи. Закон Йеркса – Додсона утверждает, что способность к выполнению задачи возрастает под влиянием физиологического или умственного стимула, но только до определенной точки. Когда стимул становится слишком большим, эта способность уменьшается [10].

тает под влиянием физиологического или умственного стимула, но только до определенной точки. Когда стимул становится слишком большим, эта способность уменьшается [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Журавский, В. И. Программно-аппаратная система для сравнительных исследований эргономики программного обеспечения / В. И. Журавский, Д. А. Костюк, О. О. Латий, А. А. Маркина // Информационные технологии и системы 2015 (ИТС 2015): материалы Международной научной конференции. – Минск: БГУИР, 29 октября 2015 г. – С. 252–253.
2. Rebsamen, B. Evaluation of cognitive workload from EEG during a mental arithmetic task / B. Rebsamen, K. Kwok, T. B. Penney // Proceedings of the human factors and ergonomics society annual meeting. – Vol. 55. – Iss. 1. – 2011. – P. 1342–1345.
3. Martini, F. Essentials of Anatomy & Physiology / F. Martini, E. Bartholomew – San Francisco: Benjamin Cummings, 2003. – p. 267.
4. Braithwaite, J. J. A Guide for Analysing Electrodermal Activity & Skin Conductance Responses for Psychological Experiments / J. Jason Braithwaite, Derrick G Watson, Robert Jones, Mickey Rowe. – Selective Attention & Awareness Laboratory Behavioural Brain Sciences Centre, University of Birmingham. – UK: Tech. Rep., 2013. – p. 42.
5. Boucsein, W. Electrodermal Activity Second Edition / W. Boucsein. – Germany: Springer, 2012. – 618 p.
6. Kappeler-Setz, C. Towards Long Term Monitoring of Electrodermal Activity in Daily Life / Cornelia Kappeler-Setz, Johannes Schumm, Martin Kusserow, Bert Arrrich, Gerhard Tröster // International Workshop on Ubiquitous Health and Wellness. – Zurich, 2010. – p. 4.
7. Костюк, Д. А. Инструментальная оценка состояния пользователя в задаче сравнения интерфейсов офисных приложений / Д. А. Костюк, О. О. Латий, А. А. Маркина // XII конференция разработчиков свободных программ: тезисы докладов. – Калуга, 16–18 октября 2015г. – М.: Альт Линукс, 2015. – С. 8–12.
8. Lupien, S. J. The effects of stress and stress hormones on human cognition: Implications for the field of brain and cognition / S. J. Lupien [et al.] // Brain and Cognition. – No. 65. – 2007. – P. 209–237.
9. LeDoux, Joseph Emotion circuits in the brain // Annual Review of Neuroscience. – No. 23. – 2000. – P. 155–184.
10. Yerkes, Robert M. The relation of strength of stimulus to rapidity of habit-formation / Robert M. Yerkes, J. D. Dodson // Journal of Comparative Neurology and Psychology. – No. 18. – 1908. – P. 459–482.

Материал поступил в редакцию 26.03.2019

ZHURAVSKY V. I., KOSTIUK D. A., LATIY O. O., MARKINA A. A., POLYAKOV V. I. Measurement and analysis of the skin electrical activity for the tasks of the of the user's state monitoring

The article presents an analysis of the skin electrical activity parameters and the possibility of their use for the monitoring of changes in the user's emotional state in the process of working with software. The registration hardware is considered, as well as the filtering of the measured signal information component. The results of the assessment of the phasic component of the user's skin electrical activity to monitor his work with a software product are presented.

УДК 517.91: 004.021

Швычкина Е. Н.

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧЕ ХЕМОСТАТА С ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМЫМИ СУБСТРАТАМИ

Введение. Рассмотрим ресурсную модель, которая описывает процесс роста микроорганизма в хемостате [1]. Базовая модель роста популяций в хемостате, которая основывается на кинетике Моно, описывается безразмерной системой

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = (s_0 - s(t))D - x_1(t) \frac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} - x_2(t) \frac{m_2 s(t)}{a_2 + s(t)}, \\ \dot{x}_i(t) = \left(\frac{m_i s(t)}{a_i + s(t)} - D \right) x_i(t), \quad (i = 1, 2), \end{cases} \quad (1)$$

Швычкина Елена Николаевна, к. физ.-мат. н., доцент, доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

где параметр D называется скоростью разбавления, имеющий размерность обратного времени; функция $s(t)$ обозначает плотность питательного субстрата; функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ – плотности микроорганизмов в момент времени t ; s_0 – концентрация субстрата в питательном растворе на входе (начальная концентрация); параметры a_i ($i = 1, 2$) – константы Михаэлиса-Ментен; величины m_i ($i = 1, 2$) обозначают максимальные скорости роста i -го микроорганизма.

Модель хемостата с двумя питательными субстратами и одним микроорганизмом. Рассмотрим модель хемостата, в которой осуществляется рост одного микроорганизма, питающегося двумя субстратами. Такая модель описывается системой дифференциальных уравнений [2]:

$$\begin{aligned} \frac{ds_1}{dt} &= (s_{10} - s_1)D - \frac{x}{y_1}f(s_1, s_2), \\ \frac{ds_2}{dt} &= (s_{20} - s_2)D - \frac{x}{y_2}f(s_1, s_2), \\ \frac{dx}{dt} &= (f(s_1, s_2) - D)x \end{aligned} \quad (2)$$

с заданными начальными условиями

$$s_1(0) = s_{10} \geq 0, \quad s_2(0) = s_{20} \geq 0, \quad x(0) = x_0 \geq 0, \quad (3)$$

где y_i ($i = 1, 2$) – коэффициенты экономичности использования субстрата, показывающие, какая доля i -го субстрата идет на увеличение биомассы микроорганизма на единицу потребляемого ресурса.

Замечание 1. Система (2) записана в безразмерной форме.

Выделяют три основных механизма взаимодействия субстратов [2]:

- **взаимодополняющие**, когда происходит взаимодействие между субстратами [3, 4];
- **взаимодополняющие**, когда не происходит взаимодействие между субстратами [5, 6];
- **взаимозаменяемые**. Оба субстрата при этом удовлетворяют одинаковым потребностям микроорганизма [4].

В случае, если субстраты взаимозаменяемы [2, 4], то

$$f(s_1, s_2) = \frac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} + \frac{m_2 s(t)}{a_2 + s(t)}. \quad (4)$$

Величины D , m_1 , m_2 и a_1 , a_2 в соотношении (4) являются биологическими параметрами и принимают действительными положительными значениями.

В работе [7] было показано, что система (2), (3) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sum_1}{dt} &= -D\sum_1, \quad \frac{d\sum_2}{dt} = -D\sum_2, \\ \frac{dx}{dt} &= (f(s_{10} - \frac{1}{y_1}x - \sum_1, s_{20} - \frac{1}{y_2}x - \sum_2) - D)x, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\sum_1 = s_{10} - \frac{1}{y_1}x - s_1$, $\sum_2 = s_{20} - \frac{1}{y_2}x - s_2$.

Решение первых двух уравнений системы (5) имеет вид

$$\sum_1 = C_1 e^{-Dt}, \quad \sum_2 = C_2 e^{-Dt}, \quad (6)$$

где C_1 , C_2 произвольные постоянные. Подставив соотношения (6) в третье уравнение системы (5), получим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = (f(s_{10} - \frac{1}{y_1}x - C_1 e^{-Dt}, s_{20} - \frac{1}{y_2}x - C_2 e^{-Dt}) - D)x. \quad (7)$$

В работах [7, 8] система (5) исследовалась для случая, когда $t \rightarrow 0$. Тогда

$$\sum_1 \rightarrow 0, \quad \sum_2 \rightarrow 0 \quad (8)$$

и третье уравнение системы (5) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = (f(s_{10} - \frac{1}{y_1}x, s_{20} - \frac{1}{y_2}x) - D)x. \quad (9)$$

Также из условий (8) и (5) следуют следующие соотношения

$$C_1 = -\frac{x_0}{y_1}, \quad C_2 = -\frac{x_0}{y_2}, \quad (10)$$

которые были получены в работе [9].

В работе [8] дифференциальное уравнение (9) было проинтегрировано для трех различных видов функции $f(s_1, s_2)$. Также приведены примеры, в которых для конкретных значений параметров указан точный вид решений, осуществлена визуализация этих решений и продемонстрировано совпадение графиков интегральных кривых с графиком потока соответствующего векторного поля на достаточно больших временных промежутках.

В работе [9] было рассмотрено дифференциальное уравнение (7) для случая (4) и были приведены коэффициентные условия на параметры системы (2), при которых его удается проинтегрировать.

Пусть функция $f(s_1, s_2)$ имеет вид (4). Тогда уравнение (7) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = x \left(\frac{m_1(-C_1 e^{Dt} + s_{10} - \frac{x}{y_1})}{a_1 - C_1 e^{Dt} + s_{10} - \frac{x}{y_1}} + \frac{m_2(-C_2 e^{Dt} + s_{20} - \frac{x}{y_2})}{a_2 - C_2 e^{Dt} + s_{20} - \frac{x}{y_2}} - D \right). \quad (11)$$

В работе [10] были введены коэффициентные условия вида

$$\begin{aligned} y_2(a_2 + s_{20}) &= y_1(a_1 + s_{10}), \\ D &= m_1 + m_2, \quad C_2 y_2 = C_1 y_1 \end{aligned} \quad (12)$$

при выполнении которых уравнение (11) интегрируется в специальных функциях.

Метод малого параметра в задаче хемостата с взаимозаменяемыми субстратами. Для дифференциального уравнения (11) применим метод малого параметра [10, 11]. Представим искомую функцию $x(t)$ в виде ряда по степеням параметра μ , который называют *малым параметром*:

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots,$$

где x_0 – решение уравнения нулевого приближения (последнее получают из исходного, полагая, что все нелинейные члены в исходном уравнении отсутствуют); x_1 – решение уравнения первой поправки, которая учитывает влияние нелинейных членов в первом приближении; x_2 – решение уравнения второй поправки, и т. д. [10].

Для дифференциального уравнения (11) в качестве малого параметра выберем параметр D . Целесообразность такого выбора можно обосновать результатами предыдущих исследований [4, 7, 12], где приведены примеры построения решений системы (2) для конкретных значений ее параметров. При этом значение параметра D существенно более малое, чем остальные параметры системы (2).

Найдем решение уравнения (11) методом малого параметра при $x(0) = \varphi_0$. (13)

Представим решение уравнения (11) в виде ряда по степеням D :

$$x = x_0 + D x_1 + D^2 x_2 + \dots \quad (14)$$

Подставим (14) в (11):

$$\begin{aligned} D(x_1'(t) + D x_2'(t)) + x_0'(t) &= (D(x_1(t) + D x_2(t)) + x_0(t)) \times \\ &\times \left(\frac{m_1(e^{Dt}(-D(Dx_2(t) + x_1(t)) + s_{10}y_1 - x_0(t)) + \varphi_0)}{e^{Dt}(-D(Dx_2(t) + x_1(t)) + (s_{10} + a_1)y_1 - x_0(t)) + \varphi_0} + \right. \\ &\left. + \frac{m_2(e^{Dt}(-D(Dx_2(t) + x_1(t)) + s_{20}y_2 - x_0(t)) + \varphi_0)}{e^{Dt}(-D(Dx_2(t) + x_1(t)) + (s_{20} + a_2)y_2 - x_0(t)) + \varphi_0} - D \right). \end{aligned}$$

Разложим правую часть последнего равенства в ряд Тейлора по степеням параметра D и, приравняв члены левой и правой частей его при одинаковых степенях D , получим равенства:

$$x_0'(t) = x_0(t) \left(\frac{m_1(s_{10}y_1 - x_0(t) + \varphi_0)}{(s_{10} + a_1)y_1 - x_0(t) + \varphi_0} + \frac{m_2(s_{20}y_2 - x_0(t) + \varphi_0)}{(s_{20} + a_2)y_2 - x_0(t) + \varphi_0} \right), \quad (15)$$

$$x_1'(t) = x_1(t) \left(\frac{m_1(a_1 y_1 (s_{10} y_1 - 2x_0(t) + \varphi_0) + (s_{10} y_1 - x_0(t) + \varphi_0)^2)}{((s_{10} + a_1) y_1 - x_0(t) + \varphi_0)^2} + \frac{m_2(a_2 y_2 (s_{20} y_2 - 2x_0(t) + \varphi_0) + (s_{20} y_2 - x_0(t) + \varphi_0)^2)}{((s_{20} + a_2) y_2 - x_0(t) + \varphi_0)^2} \right) + \quad (16)$$

$$+ x_0(t) \left(\frac{m_1 a_1 y_1 t \varphi_0}{((s_{10} + a_1) y_1 - x_0(t) + \varphi_0)^2} - \frac{m_2 a_2 y_2 t \varphi_0}{((s_{20} + a_2) y_2 - x_0(t) + \varphi_0)^2} - 1 \right),$$

$$x_2'(t) = x_2(t) \left(\frac{m_1(a_1 y_1 (s_{10} y_1 - 2x_0(t) + \varphi_0) + (s_{10} y_1 - x_0(t) + \varphi_0)^2)}{((s_{10} + a_1) y_1 - x_0(t) + \varphi_0)^2} + \frac{m_2(a_2 y_2 (s_{20} y_2 - 2x_0(t) + \varphi_0) + (s_{20} y_2 - x_0(t) + \varphi_0)^2)}{((s_{20} + a_2) y_2 - x_0(t) + \varphi_0)^2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} x_0(t) \left(- \frac{m_1 a_1^2 y_1^2 t^2 \varphi_0}{((s_{10} + a_1) y_1 - x_0(t) + \varphi_0)^3} + \frac{m_1 a_1 y_1 (s_{10} t^2 \varphi_0 y_1 - t^2 \varphi_0^2 - t \varphi_0 (x_0(t) + 4x_1(t)) - 2x_1^2(t))}{((s_{10} + a_1) y_1 - x_0(t) + \varphi_0)^3} + \right) \quad (17)$$

$$+ \frac{m_2 a_2 y_2 (a_2 t^2 \varphi_0 y_2 + s_{20} t^2 \varphi_0 y_2 - t^2 \varphi_0^2 - t^2 \varphi_0 x_0(t) - 4t \varphi_0 x_1(t) - 2x_1^2(t))}{((s_{20} + a_2) y_2 - x_0(t) + \varphi_0)^3} + x_1(t) \left(\frac{m_1 a_1 y_1 (t \varphi_0 + x_1(t))}{((s_{10} + a_1) y_1 - x_0(t) + \varphi_0)^2} - \frac{m_2 a_2 y_2 (t \varphi_0 + x_1(t))}{((s_{20} + a_2) y_2 - x_0(t) + \varphi_0)^2} - 1 \right).$$

Дифференциальное уравнение (15) – уравнение нулевого приближения; уравнения (16) и (17) соответственно первой и второй поправки. Уравнение (15) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, его общее решение имеет вид

$$-\frac{1}{\delta_3} (\delta_2 a_1 y_1 (\delta_3 - m_2) + a_2 y_2 (\delta_3 a_1 y_1 + \delta_1 m_2)) \times \ln(a_1 m_2 y_1 (\delta_2 - x_0(t)) - (\delta_1 - x_0(t))(a_2 y_2 (m_2 - \delta_3) + \delta_3 (x_0(t) - \delta_2))) + (2(a_1^2 m_2 y_1^2 (\delta_3 (a_2 y_2 - \delta_2) + \delta_2 m_2) - a_1 y_1 (\delta_3 a_2^2 y_2^2 (m_2 - \delta_3) - a_2 y_2 ((\delta_1 - 2\delta_2)\delta_3^2 + (\delta_1 + \delta_2)m_2^2 + 2(\delta_1 - 2\delta_2)\delta_3 m_2) - (\delta_1 - \delta_2)\delta_2 \delta_3 (m_2 - \delta_3)) + \delta_1 a_2 m_2 y_2 ((\delta_1 - \delta_2)\delta_3 + a_2 y_2 (m_2 - \delta_3))) \times \quad (18)$$

$$\times \arctg((a_2 y_2 (m_2 - \delta_3) - a_1 m_2 y_1 + \delta_3 (-\delta_1 - \delta_2 + 2x_0(t))) / \sqrt{\delta_4}) \times \frac{1}{\delta_3 \sqrt{\delta_4}} + 2(\delta_1 + a_1 y_1)(\delta_2 + a_2 y_2) \ln(x_0(t))) / (2(\delta_1 a_2 y_2 (\delta_3 - m_2) + \delta_2 (\delta_1 \delta_3 + a_1 m_2 y_1))) = t + C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная,

$$\delta_1 = s_{10} y_1 + \varphi_0, \quad \delta_2 = s_{20} y_2 + \varphi_0, \quad \delta_3 = m_1 + m_2, \quad \delta_4 = 2a_1 m_2 y_1 ((\delta_2 - \delta_1)\delta_3 + a_2 y_2 (m_2 - \delta_3)) - ((\delta_2 - \delta_1)\delta_3 + a_2 y_2 (m_2 - \delta_3))^2 - a_1^2 m_2^2 y_1^2.$$

Уравнения (16), (17) и последующие, которые получены аналогичным образом, являются линейными неоднородными дифференциальными уравнениями первого порядка относительно неизвестных функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ соответственно. Таким образом, решение (14) уравнения (11), разложенное по степеням параметра D можно найти с любой заданной степенью точности.

Рассмотрим, например, набор значений параметров

$$s_{10} = \frac{1}{2}, s_{20} = \frac{1}{4}, m_1 = 1, a_1 = 2, y_2 = 2, m_2 = 2, a_2 = 1, y_2 = 1 \quad (19)$$

и начальное условие (13).

Подставляя (19) в (11) и (15), получим соответственно уравнения вида

$$x'(t) = x(t) \left(\frac{8C_2 + 4e^{Dt} x(t) - 2e^{Dt}}{4C_2 + 2e^{Dt} x(t) - 5e^{Dt}} + \frac{\varphi_0 e^{-Dt} - x_0(t) + \frac{1}{2}}{\varphi_0 e^{-Dt} - x_0(t) + \frac{5}{2}} - D \right) \quad (20)$$

и

$$x_0'(t) = x_0(t) \left(3 - \frac{12}{5 - 2x_0(t) + \varphi_0} \right). \quad (21)$$

Общее решение (21) имеет вид

$$4 \ln(1 - 2x_0(t) + 2\varphi_0) - (2\varphi_0 + 5) \ln(x_0(t)) + 3t + (2\varphi_0 + 5) \ln(\varphi_0) = -6t\varphi_0.$$

Положим, $\varphi_0 = 1$, тогда

$$4 \ln(3 - 2x_0(t)) - 7 \ln(x_0(t)) = -6t. \quad (22)$$

Равенство (22) может быть записано в виде:

$$x_0^7(t) = e^{9t} (3 - 2x_0(t))^4. \quad (23)$$

Используя СКА *Mathematica*, из равенства (23) выразим функцию $x_0(t)$

$$x_0(t) = \text{Root}[-81e^{9t} + 216e^{9t} \#1 - 216e^{9t} \#1^2 + 96e^{9t} \#1^3 - 16e^{9t} \#1^4 + \#1^7 \&, i], \quad i = (1, 2, \dots, 7). \quad (24)$$

СКА *Mathematica* [13] при решении получившегося алгебраического уравнения относительно функции $x_0(t)$ седьмой степени (23) использует *Root*-объект. *Root*-объект в СКА *Mathematica* является неявным представлением корней в случаях, когда явных формул для решения алгебраического уравнения нет. Поэтому *Mathematica* использует неявное символическое представление *Root[f, k]*, которое является k -м точным корнем полиномиального уравнения $f[x] = 0$. С этими объектами можно работать, так же как ведется

вычислительная работа с такими объектами, как $\sqrt{2}$, $\ln 2$ и т. д. Более того, СКА *Mathematica* предпочитает очень громоздкие выражения, найденные в радикалах, преобразовывать в *Root*-объекты.

Если в уравнении $f[x] = 0$ не все коэффициенты являются числами, но входит, например, один параметр a , тогда решения этого полиномиального уравнения *Root[f, k]* являются функциями этого параметра. После нахождения таких функций, над ними можно совершать стандартные операции: дифференцировать, разлагать в ряд, строить графики функций и т. д. [13]. Таким образом, найденные решения (24) будем рассматривать как функции переменной t .

Из функций (24), выберем ту, которая удовлетворяет условию

$$0 < x_0(t) < 3/2. \quad (25)$$

Последнее получено из (22). Из семи функций (24), удовлетворяет условию (25) функция при $(i = 1)$. На рисунке 1 изображены графики неявно заданной функции $x_0(t)$ (22) (сплошная линия) и ее явное представление (24) $(i = 1)$ (пунктирная линия).

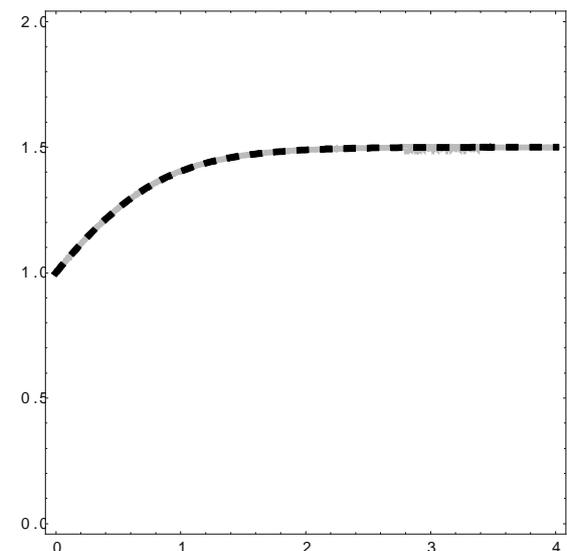


Рисунок 1 – График функции (22) совмещенный с ее явным представлением (24) $(i = 1)$

Уравнение (16) для значений (19) и $\varphi_0 = 1$ примет вид

$$x_1'(t) = \frac{3(2x_0(t) - 3)x_1(t)}{2x_0(t) - 7} - x_0(t) \left(\frac{24(x_1(t) + t)}{(7 - 2x_0(t))^2} + 1 \right)$$

линейного относительно функции $x_1(t)$. Интегрируя полученное уравнение, получим вид коэффициента $x_1(t)$ в разложении (14). Таким образом, приведен компьютерный способ реализации описанного метода малого параметра для конкретных значений коэффициентов хемостат-модели (2).

Заключение. Для модели хемостата, содержащей два субстрата и один микроорганизм, в которой субстраты взаимозаменяемы, применен приближенный метод малого параметра. Для нахождения коэффициентов разложения неизвестной функции в виде ряда по степеням параметра D , который имеет размерность обратного времени, составлены и проинтегрированы дифференциальные уравнения. Приведен пример с конкретными значениями параметров хемостат-модели. Вычисления и визуализация функций были проделаны с использованием системы *Mathematica*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф17М-124).

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- Smith, H. L. The theory of chemostat: dynamics of microbial competition / H. L. Smith, P. Waltman. – Cambridge University Press, 1995. – 313 p.
- Leon, J. A. Competition between two species for two complementary or two substitutable resources / J. A. Leon, D. B. Tumpson // J. Theoret. Biol. – 1975. – Vol. 50. – P. 185–201.
- Lendenmann, U. Kinetic Models for the Growth of Escherichia Coli with Mixtures of Sugars Under Carbon-Limited Conditions / U. Lendenmann, T. Egli // Biotechnology and Bioengineering. – 1998. – Vol. 59, No. 1. – P. 99–107.
- Lendenmann, U. Is Escherichia coli growing in glucose-limited chemostat culture able to utilize other sugars without lag? / U. Lendenmann and T. Egli // Microbiology. – 1995. – Vol. 141. – P. 71–78.
- Grady, C. P. L. Biological Wastewater Treatment / C. P. L. Grady, Jr., G. T. Daigger and H. C. Lim. – 2nd ed. – New York, 1999. – 1076 p.
- Hsu, S. B. Exploitive Competition for Two Complementary Nutrients in Continuous Cultures / S. B. Hsu, K. S. Cheng, S. P. Hubbell // SIAM J. Appl. Math. – 1981. – Vol. 41, № 3. – P. 442 – 444.
- Braselton J P. Comparing the Effects of Interactive and Noninteractive Complementary Nutrients on Growth in a Chemostat / P. B. James, L. A. Martha, M. B. Lorraine // Open Journal of Applied Sciences. – 2013. – Vol. 3. – P. 323 – 331.
- Чичурин, А. В. О точных частных решениях в модели хемостата, содержащих два субстрата и один микроорганизм / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина // Математика. Інформаційні технології. Освіта. : сб. статей по материалам V Межд. науч.-практ. конф., Луцк-Свитязь V Межд. науч.-практ. конф., Луцк-Свитязь, 5–7 июня 2017 г. / Волын. нац. ун-т. им. Леси Українки. – Луцк-Свитязь, 2017. – №4. – С. 119–126.
- Chichurin, A. On the solutions of the chemostat model, that contains one microorganism and two complimentary or supplementary nutrients / A. Chichurin, A. Shvychkina // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. – Siedlce, 2017. – Vol. VI. – P. 232–238.
- Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
- Зайцев, В. Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
- Lendenmann, U. Growth kinetics of Escherichia coli with galactose and several other sugars in carbon-limited chemostat culture / U. Lendenmann, M. Snozzi, T. Egli // Can. J. Microbiol. – 2000. – Vol. 46. – P. 72–80.
- [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://reference.wolfram.com/language/ref/Root.html>.

Материал поступил в редакцию 16.01.2019

SHVYCHKINA A. N. The small parameter method in the problem of a chemostat with supplementary substrates.

For the chemostat model containing two substrates and one microorganism in which the substrates are interchangeable, an approximate small parameter method is applied. To find the coefficients of the expansion of the unknown function in the form of a series in powers of the parameter D , which has the dimension of inverse time, differential equations have been compiled and integrated. Examples with specific values of parameters of the chemostat model are given. Calculations and visualization of functions were done using the *Mathematica* system.