О РЕШЕНИЯХ В КЛАССАХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ИНВАРИАНТАМИ БИНАРНОЙ ФОРМЫ (АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ПРОГРАММНЫЙ АСПЕКТЫ)

Белемук О.В.
Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина, г. Брест

Рассматриваются нелинейные дифференциальные уравнения шестого порядка, левая часть которых является инвариантом бинарной формы по λ вида

$$uu^{(VI)}-6u'u^{(V)}+15u''u^{(IV)}-10u'''^{2}=\alpha(uu''-u'^{2})-\beta u^{2}, \qquad (1)$$

α, β – параметры, уравнение вида:

$$\begin{vmatrix} u^{(VI)} & u^{(V)} & u^{(IV)} & u''' \\ u^{(V)} & u^{(IV)} & u''' & u'' \\ u^{(IV)} & u''' & u'' & u' \\ u''' & u'' & u' & u \end{vmatrix}=0, \qquad (2)$$

а также соответствующие упрощенные уравнения.

Согласно [1] уравнение (1) при $\alpha=\beta=0$ имеет целый интеграл, зависящий от пяти произвольных постоянных, а уравнение (2) имеет целый общий интеграл. Используя тест Пенлеве [2], [3] и его уточнение [4], исследуем уравнение (1) и (2), а также используя алгоритм, изложенный в работе [5], находим рациональные решения для уравнений (1), (2). Кроме того, найдены классы решений уравнений (1), (2) отличные от приведенных в работе [1]. Построена программа в кодах СКА *Mathematica*, позволяющая находить рациональные решения и решения в виде специальных функций для дифференциальных уравнений подобного вида.

Литература

1. J. Czasy. Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérier don't l'intégrale générale a ses points critiques fixes. Acta Math. 34, – 1911, P. 317-385.
2. M.J. Ablowitz, A. Ramani and H. Segur. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. // J. Math. Phys., – 1980, v.21, P. 715-721.
3. М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. - М: Мир, 1987. – 444 с.
4. Н.А. Кудряшов. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва – Ижевск, 2004. – 360 с.
5. А.Г. Здунек, И.П. Мартынов, В.А. Пронько. О рациональных решениях дифференциальных уравнений. // Вестник ГрГУ. – 2000, № 3. – с. 33-39.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ СПОСОБОВ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ

Болтромеюк В. В.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Аппроксимация отражает одну из фундаментальных идей математики - приближение (замену) сложных объектов более простыми и удобными.

Пусть функция $y=f(x)$ задана своими значениями в некоторых, вообще говоря, произвольных n точках $a=x_0<x_1<...<x_n=b$. Важной задачей численного анализа является восстановление в аналитическом виде сеточного представления функции.

Существует ряд методов аппроксимации, среди которых наиболее эффективными считаются: аппроксимация тригонометрическими рядами Фурье, рядами Фурье по полиномам Чебышева 1-го рода, сплайн-аппроксимация.

Наиболее популярна в настоящее время сплайн-аппроксимация линейными и кубическими сплайнами.

Необходимость сплайн-аппроксимации состоит в том, что в отличии от алгебраического интерполирования, где при увеличении числа узлов увеличивается, как правило, степень интерполяционного полинома, в сплайн-аппроксимации можно работать со сплайнами невысокой степени, кроме того, при использовании сплайнов требования к гладкости функции предъявляются минимальные.

При использовании кубических сплайнов, которые имеют вид,
$P_i(x) = a_i + b_i * (x - x_i) + c_i * (x - x_i)^2 + d_i * (x - x_i)^3; i = 1,..., n-1;$, мы имеем дело с трехдиагональными системами, для эффективного решения которых с успехом применяется метод матричной прогонки. Определяющие системы кубической сплайн-аппроксимации имеют вид :

$$a_i = f(x_i); \qquad i = 1,..., n-1; \tag{1}$$

$$b_i + c_i * h_i + d_i * h_i^2 = g_i; \qquad i = 1,..., n-1; \tag{2}$$

$$b_i + 2 * c_i * h_i + 3 * d_i * h_i^2 = b_{i+1}; \qquad i = 1,..., n-2; \tag{3}$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} + c_i}{3 * h_i}; \qquad i = 1,..., n-1; \tag{4}$$

$$c_1 = 0; c_n = 0; \tag{5}$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i; g_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i}; \qquad i = 1,..., n-1; \tag{6}$$

Подставив (4) в (2), получим :

$$b_i = g_i - \frac{1}{3} * h_i * (c_{i+1} + 2 * c_i); \qquad i = 1,..., n-1; \tag{7}$$

Подставив (4) и (7), в (3) получаем:

$$\mathrm{h_i} * c_i + 2 * (h_i + h_{i+1}) * c_{i+1} + h_{i+1} * c_{i+2} = 3 * (g_{i+1} - g_i); \tag{8}$$
$$i = 1,..., n-2;$$

Получили трехдиагональную систему относительно коэффициентов c_i, после вычисления которых, подставив их в формулы (7) и (4), получим остальные коэффициенты кубического сплайна.

При использовании тригонометрического ряда Фурье для периодических функций мы используем его дискретный аналог. Функция $f(x)$ заменяется функцией (9), коэффициенты которой (8)-(13) :

$$P_m(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} \left(A_k \cos\left(2\pi k \frac{x-a}{b-a} \right) + B_k \sin\left(2\pi k \frac{x-a}{b-a} \right) \right); \quad x \in [a,b]; \tag{9}$$

$$A_0 = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j); \qquad (10)$$

$$A_k = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\cos\left(2\pi k\,\frac{x_j - a}{b-a}\right); \qquad (11)$$

$$B_k = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\sin\left(2\pi k\,\frac{x_j - a}{b-a}\right);\;\; k = \overline{1,m}; \qquad (12)$$

$$x_j = \frac{b-a}{2\pi} t_j + a;\;\; t_j = \frac{2\pi j}{N};\;\; j = \overline{0, N-1}. \qquad (13)$$

В случае непериодической функции $f(x)$, как показывает вычислительная практика, использование рядов Фурье для аппроксимации функций оказывается нецелесообразным.

В этом случае эффективным способом аппроксимации является аппроксимация рядами Фурье по полиномам Чебышева 1-го рода. Максимальная погрешность интерполирования достаточно гладкой функции на отрезке [0:1] многочленами n-й степени будет минимальна, когда в качестве узлов интерполяции берутся корни многочлена Чебышева. Ниже приводятся используемые формулы (15)-(18) :

$$T_{n+1}(x) = 2*x*T_n(x) - T_{n-1}(x);\; T_0(x) = 1;\; T_1(x) = x; \qquad (14)$$

$$f(x) \approx P_m(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} c_k T_k\left(\frac{2x-b-a}{b-a}\right); \qquad (15)$$

$$c_k = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) T_k\left(\frac{2x_j - b - a}{b-a}\right);\;\; k = \overline{0,m};\;\; m+1 \le n; \qquad (16)$$

$$x_j = \frac{b-a}{2} t_j + \frac{b+a}{2};\;\; t \in [-1,1];\;\; x \in [a,b]; \qquad (17)$$

$$t_j = \cos\frac{(2j-1)\pi}{2n},\;\; j = \overline{1,n}; \qquad (18)$$

Вычислительный эксперимент и его обсуждение.

Сравним аппроксимацию на отрезке [0:pi] некоторых функций :

Кол-во точек разбиения	Кол-во корней полинома Чебышева	Значение нормы в L_2		
		Ряд Фурье	Кубический сплайн	Полиномы Чебышева
x*exp(x)				
51	10	7,6882E-17	3,91264E-3	1,57436E-7
101	30	2,3312E-16	7,09940E-4	1,24411E-13
1001	200	1,3801E-15	2,30121E-6	1,18074E-13
sin(x*x)*exp(x)				
51	10	1,9474E-17	5,39145E-3	0,08674
101	30	5,6417E-17	6,21925E-5	1,10747E-11
1001	200	2,9472E-16	1,49034E-6	1,2112 E-13

Для аппроксимации тригонометрическим рядом Фурье не целесообразно использовать большое количество точек, так как происходит накапливание погрешности, а для аппроксимации рядом Фурье по полиномам Чебышева и кубическими сплайнами целесообразнее увеличение количества точек.

Литература

1. Монастырный, П.И., Сборник задач по методам вычислений / П.И. Монастырный. – 2-е изд. - Минск: Университетское, 2000. – 311 с.
2. Вержбицкий, В.М., Численные методы/В.М. Вержбицкий. – Минск: Высш. шк., 2002. – 840 с.
3. Корнейчук, Н.П., Сплайны в теории приближений / Н.П. Корнейчук. – Минск: Наука, 1984. – 352 с.
4. Богачев, К.Ю., Практикум на ЭВМ. Методы приближения функций / К.Ю. Богачев. – 3-е изд., перераб. и доп. – Минск: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 2002. – 192 с.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ КРИВЫХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Будько Д. А.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

1. Введение

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = P(t,e)x\,, \qquad (1)$$

где $x(t)$ – вектор-функция времени *t* с компонентами $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$, $P(t,e)$ – квадратная вещественная периодическая матрица *n*-го порядка, представимая в виде сходящегося ряда по степеням e:

$$P(t,e) = P_0 + e\,P_1(t) + e^2 P_2(t) + \dots\,. \qquad (2)$$

Здесь P_0 – постоянная матрица, $P_k(t)$ $(k = 1,2,...)$ – непрерывные периодические матрицы периода *T*, e - малый параметр.

Системы вида (1) возникают во многих областях науки и имеют множество приложений [1]. В частности, системы такого вида описывают возмущённое движение в окрестности стационарных решений в ограниченной эллиптической задаче трех тел [2], а также при анализе устойчивости стационарных решений в ограниченных эллиптических задачах многих тел [3].

Исследование устойчивости систем вида (1) обычно начинается с определения областей линейной устойчивости решений системы (1) на плоскости параметров Oae. Известно, что решение системы (1) будет устойчивым при заданных значениях $(a,\ e)$, если все соответствующие характеристические показатели $\lambda = \pm i\,\sigma_{1,2}$ системы (1) являются различными чисто мнимыми числами. Далее в области линейной устойчивости требуется определить кривые, на которых выполняются условия резонансов третьего и четвёртого порядков. Напомним, что точка $(a,\ e)$ на плоскости параметров Oae