

Для аппроксимации тригонометрическим рядом Фурье не целесообразно использовать большое количество точек, так как происходит накопление погрешности, а для аппроксимации рядом Фурье по полиномам Чебышева и кубическими сплайнами целесообразнее увеличение количества точек.

Литература

1. Монастырский, П.И., Сборник задач по методам вычислений / П.И. Монастырский. – 2-е изд. - Минск: Университетское, 2000. – 311 с.
2. Вержбицкий, В.М., Численные методы/В.М. Вержбицкий. – Минск: Высш. шк., 2002. – 840 с.
3. Корнейчук, Н.П., Сплаины в теории приближений / Н.П. Корнейчук. – Минск: Наука, 1984. – 352 с.
4. Богачев, К.Ю., Практикум на ЭВМ. Методы приближения функций / К.Ю. Богачев. – 3-е изд., перераб. и доп. – Минск: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 2002. – 192 с.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ КРИВЫХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Будько Д. А.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

1. Введение

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = P(t, e)x, \quad (1)$$

где $x(t)$ – вектор-функция времени t с компонентами $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, $P(t, e)$ – квадратная вещественная периодическая матрица n -го порядка, представимая в виде сходящегося ряда по степеням e :

$$P(t, e) = P_0 + e P_1(t) + e^2 P_2(t) + \dots \quad (2)$$

Здесь P_0 – постоянная матрица, $P_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) – непрерывные периодические матрицы периода T , e – малый параметр.

Системы вида (1) возникают во многих областях науки и имеют множество приложений [1]. В частности, системы такого вида описывают возмущённое движение в окрестности стационарных решений в ограниченной эллиптической задаче трех тел [2], а также при анализе устойчивости стационарных решений в ограниченных эллиптических задачах многих тел [3].

Исследование устойчивости систем вида (1) обычно начинается с определения областей линейной устойчивости решений системы (1) на плоскости параметров Oae . Известно, что решение системы (1) будет устойчивым при заданных значениях (a, e) , если все соответствующие характеристические показатели $\lambda = \pm i \sigma_{1,2}$ системы (1) являются различными чисто мнимыми числами. Далее в области линейной устойчивости требуется определить кривые, на которых выполняются условия резонансов третьего и четвертого порядков. Напомним, что точка (a, e) на плоскости параметров Oae

принадлежит резонансной кривой $\mu = \mu(e)$, если мнимые части соответствующих характеристических показателей системы удовлетворяют соотношению вида

$$n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 = N, \quad (3)$$

где n_j – целые числа, причем $|n_1| + |n_2| = k$, N – произвольное целое число, а значение числа k определяет порядок резонанса.

При заданных значениях параметров a и e характеристические показатели системы (1) могут быть вычислены с требуемой точностью. Поэтому стандартный подход к определению резонансных кривых системы (1) состоит в следующем. На плоскости параметров Oae вводится сетка с достаточно малым шагом по переменным a и e , и вычисляются характеристические показатели системы (1) в узлах сетки. По найденным значениям характеристических показателей определяют резонансные кривые. Очевидно, точность построения соответствующих кривых в этом случае зависит от величины шага сетки, а при высокой точности время вычислений может становиться весьма значительным.

В работах [4, 5] нами предложен эффективный алгоритм построения границ областей неустойчивости дифференциальных систем второго и четвертого порядков. Основная цель данной работы – показать, что предложенный алгоритм может быть успешно обобщён и применён также для построения резонансных кривых на плоскости параметров Oae системы (1). Все вычисления и построения выполнены с помощью системы компьютерной алгебры *Mathematica* [6].

2. Алгоритм вычисления и построение резонансных кривых

Рассмотрим гамильтонову систему четвертого порядка, описывающую возмущённое движение в окрестности треугольных лагранжевых решений плоской эллиптической ограниченной задачи трёх тел [2, 5, 7], матрицу-функцию которой можно представить в виде:

$$P(t, e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1+4e\cos t}{4(1+e\cos t)} & \frac{\kappa}{1+e\cos t} & 0 & 1 \\ \frac{\kappa}{1+e\cos t} & \frac{5-4e\cos t}{4(1+e\cos t)} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где κ – параметр, связанный с массами тел m_1 и m_2 соотношением [2]:

$$\kappa = 3\sqrt{3}(1-2\mu)/4, \quad \mu = m_2/(m_1+m_2).$$

Легко видеть, что при $e = 0$ система (1) с функцией (4) сводится к системе четырёх дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, характеристические показатели которой легко вычисляются и могут быть записаны в виде

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sigma_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\sigma_2, \quad (5)$$

где

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm \sqrt{1-27\mu+27\mu^2})^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Характеристические показатели (5) являются различными чисто мнимыми числами, если массовый параметр μ принадлежит интервалу

$$0 < \mu < \frac{1}{18}(9 - \sqrt{69}). \quad (7)$$

Известно [2, 7], что на этом интервале имеется пять значений параметра μ , соответствующих резонансам третьего порядка, и восемь значений μ , соответствующих резонансам четвертого порядка.

Поскольку характеристические показатели являются непрерывными функциями параметра e , резонансные кривые на плоскости $O\mu e$, во всех точках которых выполняются соотношения (3), должны пересекать ось $O\mu$. Это условие позволяет применить для их построения следующий оптимизированный алгоритм. Рассмотрим, например [7], точку $P(\frac{1}{24}(12 - \sqrt{139}), 0)$ на плоскости $O\mu e$ и построим полуокружность радиуса r с центром в этой точке (рис. 1). Далее рассмотрим некоторую последовательность точек P_j ($j = 1, 2, 3, \dots$), расположенных на этой полуокружности, и выберем из неё такую точку P_j , для которой резонансное соотношение выполняется наиболее точно.

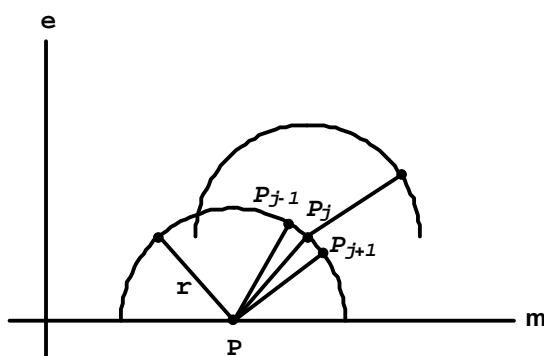


Рис.1. Алгоритм построения резонансных кривых

Отметим, что в окрестности этой точки на полуокружности всегда можно найти такую точку P_j^* , в которой резонансное соотношение выполняется с требуемой точностью. Далее строим новую полуокружность радиуса r с центром в точке P_j^* и повторяем вычисления. Так как характеристические показатели непрерывно зависят от e , достаточно рассмотреть лишь небольшую часть полуокружности в окрестности точки пересечения её с прямой PP_j^* . В конце работы алгоритма получаем некоторую последовательность точек, соединяя которые находим резонансную кривую с требуемой точностью. Таким образом, мы вычисляем характеристические показатели только в окрестности резонансных кривых, а не во всей рассматриваемой области, что позволяет значительно повысить точность вычислений и сократить время работы программы.

Выбирая для стартовых точек значения параметра μ , приведённые в [2, 7], мы вычислили резонансные кривые третьего и четвёртого порядков. Следует отметить, что не все кривые удалось построить. Трудности возникают при построении пересекающихся резонансных кривых, а также при их близком расположении друг к другу. Для их преодоления требуются дополнительные вычисления и соответствующая коррекция алгоритма.

Заключение

Полученные результаты мы сравнили с работой [7], где характеристические показатели, резонансные кривые и границы областей неустойчивости были найдены в виде степенных рядов по малому параметру. Оказалось, что для достаточно малых значений параметра e такие разложения дают хорошую аппроксимацию резонансных кривых и границ между областями устойчивости и неустойчивости. Но при значениях параметра e , близких к единице, более точные результаты получаются при использовании численных методов.

Литература

1. Якубович, В.А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами / В.А. Якубович, В.М. Старжинский. – М.: Наука, 1972. – 720 с.
2. Маркеев, А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике / А. П. Маркеев. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
3. Гребеников, Е.А. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел / Е.А. Гребеников, Д. Козак-Сковородкина, М. Якубяк. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во РУДН, 2002. – 209 с.
4. Budzko, D.A. Computing the stability boundaries for the Hill's equation / D.A. Budzko // Computer algebra in scientific computing: proc. of the international conference of young scientists CYS CASC'2006, Chisinau, Moldova, Sept. 11–15, 2006 / Technical university of Moldova; Eds.: E.A. Grebenikov [and others]. – Chisinau, 2006. – P. 15–20.
5. Budzko, D.A. Determination of the stability boundaries for the fourth order Hamiltonian system / D.A. Budzko // Computer Algebra Systems in Teaching and Research: proc. of the 4th International Workshop CASTR'2007, Siedlce, Poland, Jan. 31 – Feb. 3, 2007 / University of Podlasie; Eds.: L. Gadomski [and others]. – Siedlce, 2007. – P. 30–33.
6. Wolfram, S. The Mathematica book / S. Wolfram. – Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999. – 1470 p.
7. Прокопеня, А.Н. Об одном методе символьных вычислений характеристических показателей линейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / А.Н. Прокопеня // Сб. науч. тр. / Ин-т системного анализа РАН. – Москва, 2005. – Вып. 9(2): Динамика неоднородных систем. – С. 73-87.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СОСТОЯНИЙ ОДНОГО КЛАССА АВТОНОМНЫХ АВТОМАТОВ

Валуева Т.А.

НИИЦ ППМИ, Белорусский государственный университет, г. Минск

Введение

Рассмотрим автономный автомат, реализующий генератор, который состоит из нескольких регистров сдвига и блока управления движением регистров. По набору текущих состояний регистров блок управления определяет, на сколько шагов должен продвигнуться каждый из регистров за один такт работы генератора.

В работе [

1] была рассмотрена математическая модель данного автомата, согласно которой функционирование автомата описывается случайным блужданием на окружности или торе. При этом шаги, на которые сдвигаются регистры, принимают значения из множества $\{1, 2, \dots, K\}$, $K \in \mathbb{N}$. В работе [

1] получена вероятность того, что случайно выбранное состояние лежит на цикле длины n . В данной работе рассмотрен случай, когда каждый из регистров сдвига сдвигается на k или d шагов, $k, d \in \mathbb{N}$, $k \neq d$, найдено среднее время возвращения автомата в начальное состояние, и длина наиболее вероятного цикла, в случае, когда $d = k + 1$.

Вероятность появления цикла длины n

Рассмотрим автономный автомат U , реализующий генератор, состоящий из m линейных регистров сдвига LFSR _{i} , минимальные полиномы которых являются примитив-