$$(b-1)\delta \le (s+1)^{s+1}[2(m-1)\alpha e]^{-(s+1)}\|z\| \text{, откуда } m \le 1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{S+1}}.$$

При помощи неравенства моментов оценим норму

$$\|(E - Ag_m(A))x\| \le \|A(E - Ag_m(A))x\|^{\frac{S}{S+1}}\|z\|^{\frac{1}{S+1}} \le [(b+1)\delta]^{\frac{S}{S+1}}\|z\|^{\frac{1}{S+1}}. \text{ (см. (14)).}$$

Тогда, поскольку соотношение (8) справедливо для любых n, то

$$\|x_{m,\delta} - x\| \le \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{S}{S+1}}\|z\|^{\frac{1}{S+1}} + 2m\alpha\delta \le$$

$$\le [(b+1)\delta]^{\frac{S}{S+1}}\|z\|^{\frac{1}{S+1}} + 2\alpha\left\{1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{S+1}}\right\}\delta.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Порядок оценки (16) есть $O(\delta^{s(s+1)})$ и он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями $x = A^S z, s > 0$.

Замечание 2. Хотя формулировка теоремы 2 даётся с указаниями степени представимости s и истокопредставимого элемента z, на практике их значение не потребуется, так как они не содержатся в правиле останова (1). И тем не менее в теореме 2 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m, обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (1), как показывает теорема 1, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризирующие свойства.

По мажорантным оценкам погрешности метод (2) не имеет преимущества по сравнению с широко известным методом простой итерации

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y - Ax_{n,\delta}), x_{0,\delta} = 0$$

Его преимущество состоит в следующем: для достижения оптимальной точности методом (2) нужно сделать в 2 раза меньше итераций, чем методом простой итерации.

Литература

1. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах/ Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретейников. – М.: Наука, 1986. – 176 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МОМЕНТОВ ОСРЕДНЕНННОЙ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Войнов А.Ф., Мирская Е.И.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Среди непараметрических методов спектрального оценивания одним из наиболее распространённых является метод Уэлча, в котором для построения оценки спектральной плотности производится осреднение периодограмм, построенных по непересекающимся интервалам исходной последовательности наблюдений, и вводятся окна просмотра данных для уменьшения смещения оценок.

Оценки такого вида были исследованы П.Уэлчем для гауссовских процессов. В данной работе обобщаются результаты, полученные Уэлчем на многомерные временные ряды и произвольные окна просмотра данных. Исследуется асимптотическое поведение и скорость сходимости моментов построенной оценки.

Рассмотрим действительный r-мерный стационарный случайный процесс $X(t)=\{X_a(t), a=\overline{1,r}\}$, $t\in Z$, с $MX_a(t)=0$, $a=\overline{1,r}$, с неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$, $a,b=\overline{1,r}$, $\lambda\in\Pi=[-\pi,\pi]$.

В работе в качестве оценки взаимной спектральной плотности исследована статистика вида

$$\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)=\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} I_{ab}(\lambda,l), \tag{1}$$

$\lambda\in\Pi=[-\pi,\pi]$, $a,b=\overline{1,r}$, построенная по $T=LN-(L-1)K$ наблюдениям, где L - число пересекающихся интервалов, содержащих по N наблюдений, K, L - целые числа, не зависящие от T, а $I_{ab}(\lambda,l)$ - модифицированная периодограмма. Вычислены математическое ожидание, дисперсия и ковариация оценки (1). Показано, что эта оценка является асимптотически несмещённой оценкой взаимной спектральной плотности $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, $a,b=\overline{1,r}$, а

$$\lim_{N\to\infty}\operatorname{cov}\left\{\hat{f}_{a_1b_1}(\lambda_1),\hat{f}_{a_2b_2}(\lambda_2)\right\}=0, \tag{2}$$

где $\lambda_1,\lambda_2\in\Pi, \lambda_1\pm\lambda_2\neq 0 \bmod (2\pi)$, $a_i,b_i=\overline{1,r}$, $i=\overline{1,2}$.

В данной работе исследуется скорость сходимости математического ожидания и ковариации статистики (1), в предположении, что $f_{ab}(\lambda)$, $a,b=\overline{1,r}$, $\lambda\in\Pi$, удовлетворяет условию:

$$|f_{ab}(x+\lambda)-f_{ab}(\lambda)|\le C|x|^{\alpha},\ 0<\alpha\le 1, \tag{3}$$

для любых $x\in\Pi$, C - некоторая положительная постоянная $a,b=\overline{1,r}$.

Для одномерного стационарного случайного процесса скорость сходимости первых двух моментов оценки (1) исследована в работе [2].

Лемма 1. Для ядра $\Phi_{ab}(x)$, $a,b=\overline{1,r}$, $x\in\Pi$, заданного выражением

$$\Phi_{ab}(x)=\left[2\pi\sum_{p=0}^{N-1}h_a(p)h_b(p)\right]^{-1}\varphi_a(x)\overline{\varphi_b(x)}, \tag{4}$$

где

$$\varphi_a(x)=\sum_{p=0}^{N-1}h_a(p)e^{ipx}, \tag{5}$$

при любом $\beta>0$

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\Pi}|x|^{\beta}\cdot|\Phi_{ab}(x)|dx=0, \tag{6}$$

$h_a^N(p)$, $a=\overline{1,r}$ - окна просмотра данных.

Теорема 1. Если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, $a,b=\overline{1,r}$, удовлетворяет соотношению (3), то для математического ожидания оценки $\hat{f}_{ab}(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, задаваемой (1), имеет место равенство

$$\left|M\hat{f}_{ab}(\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right|=O\left(\int_{\Pi}|x|^{\alpha}|\Phi_{ab}(x)|dx\right),$$

$0\le\alpha<1$, где $\Phi_{ab}(x)$, $x\in\Pi$, $a,b=\overline{1,r}$, задаётся соотношением (4).

Доказательство следует из условия (3) и теоремы 1 работы [1].

Теорема 2. Если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, $a,b=\overline{1,r}$, ограничена на Π, семиинвариантная спектральная плотность 4-го порядка непрерывна а точке $(\lambda_1,-\lambda_1,-\lambda_2)$ и ограничена на Π^3, окна просмотра данных $h_{a_j}^N(t)$, $t \in R$, $a=\overline{1,r}$ ограничены единицей и имеют ограниченную вариацию, выполняется соотношение

$$\sup_N \iiint_{\Pi^3} \left| \Phi_{a_1b_1a_2b_2}(u_1,u_2,u_3) \right| du_1du_2du_3 \le C \tag{7}$$

где C - некоторая постоянная ,

$$\Phi_{a_1b_1a_2b_2}(u_1,u_2,u_3)=\left((2\pi)^3\sum_{p=0}^{N-1}h_{a_1}^N(p)h_{b_1}^N(p)h_{a_2}^N(p)h_{b_2}^N(p)\right)^{-1}\varphi_{a_1}(u_1)\varphi_{b_1}(u_2)\varphi_{a_2}(u_2)\varphi_{b_2}(u_1+u_2+u_3),$$

а $\varphi_a(x)$ задаётся соотношением (5), то для ковариации оценки $\hat{f}_{ab}(\lambda)$, $a,b=\overline{1,r}$, $\lambda \in \Pi$, заданной (1), имеет место равенство:

$$cov\left\{\hat{f}_{a_1b_1}(\lambda_1), \hat{f}_{a_2b_2}(\lambda_2)\right\}=O\left(\frac{1}{LN}\right),$$

$a_i,b_i=\overline{1,r}$, $i=\overline{1,2}$, $\lambda_1 \pm \lambda_2 \ne 0(\mathrm{mod}\,2\pi)$, $\lambda_1,\lambda_2 \in \Pi$.

Доказательство. Ковариация оценки взаимной спектральной плотности $\hat{f}_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$ может быть представлена в виде суммы трёх слагаемых A_1, A_2 и A_3. Рассмотрим каждое из них.

$$|A_1| \le \left|\frac{(2\pi)^3}{L}C_2\iiint_{\Pi^3}\Phi_{a_1b_1a_2b_2}(y_1,y_2,y_3)P_L[(N-K)(y_1+y_2)]\times\right.$$
$$\times\left(f_{a_1b_1a_2b_2}(y_1+\lambda_1,y_2-\lambda_1,y_3-\lambda_2)-f_{a_1b_1a_2b_2}(\lambda_1,-\lambda_1,-\lambda_2)\right)\Big|dy_1dy_2dy_3+$$
$$\left|\frac{(2\pi)^3}{L}C_2\iiint_{\Pi^3}\Phi_{a_1b_1a_2b_2}(y_1,y_2,y_3)P_L\times[(N-K)(y_1+y_2)]\times f_{a_1b_1a_2b_2}(\lambda_1,-\lambda_1,-\lambda_2)\right|dy_1dy_2dy_3=I_1+I_2,$$

где

$$P_L[(N-K)(y_1+y_2)]=\frac{1}{(2\pi)^2L}\,\frac{\sin^2\frac{L(N-K)(y_1+y_2)}{2}}{\sin^2\frac{(N-K)(y_1+y_2)}{2}}.$$

$$I_1 \le 2\pi C_2\iiint_{\Pi_1}\left|\Phi_{a_1b_1a_2b_2}(y_1,y_2,y_3)\right|\times$$
$$\times\left(f_{a_1b_1a_2b_2}(y_1+\lambda_1,y_2-\lambda_1,y_3-\lambda_2)-f_{a_1b_1a_2b_2}(\lambda_1,-\lambda_1,-\lambda_2)\right)\Big|dy_1dy_2dy_3+2\pi C_2\times$$
$$\times\iiint_{\Pi_2}\left|\Phi_{a_1b_1a_2b_2}(y_1,y_2,y_3)\right|\left|f_{a_1b_1a_2b_2}(y_1+\lambda_1,y_2-\lambda_1,y_3-\lambda_2)-f_{a_1b_1a_2b_2}(\lambda_1,-\lambda_1,-\lambda_2)\right|dy_1dy_2dy_3=I_{11}+I_{12}.$$

Учитывая непрерывность семиинвариантной спектральной плотности 4-го порядка в точке $(\lambda_1,-\lambda_1,-\lambda_2)$ и соотношение (7), можно показать, что

$$I_{11}=O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Рассмотрим I_{12}. Так как семиинвариантная спектральная плотность 4-го порядка ограничена на Π^3 и используя неравенство Гёльдера получим

$$I_{12} = O\left(\frac{1}{N\sqrt{N}}\right).$$

Рассмотрим I_2. Так как

$$\lim_{N\to\infty} \iiint_{\Pi^3} \Phi_{a_1b_1a_2b_2}(y_1, y_2, y_3)P_L \times [(N-K)(y_1+y_2)]dy_1dy_2dy_3 = \frac{1}{(2\pi)^2},$$

то $I_2 = O\left(\frac{1}{LN}\right)$. Откуда $A_1 = O\left(\frac{1}{LN}\right)$.

Рассмотрим A_2.

$$|A_2| \le \frac{(2\pi)^2}{L} C_3 \max_z \left| f_{a_1b_2}(z) \right| \max_u \left| f_{b_1a_2}(u) \right| \times \iint_{\Pi^2} \left|\Phi_{a_1b_2}(z-\gamma, z+\gamma)\right| \cdot \left|\Phi_{b_1a_2}(z+\gamma, z-\gamma)\right|$$
$$\times P_L[(N-K)(z+u)]dudz.$$

Учитывая ограниченность $f_{ab}(x)$ на Π, получим

$$A_2 = O\left(\frac{1}{LN}\right).$$

Аналогично $A_3 = O\left(\frac{1}{LN}\right)$. Теорема доказана.

Для окон просмотра данных Дирихле, Фейера, Рисса, Гаусса, Хэмминга построены графики оценки взаимной спектральной плотности, заданной выражением (1). Проведен сравнительный анализ дисперсии в зависимости от окон просмотра данных. Дисперсия минимальная для оценки, построенной с использованием окна Хэмминга.

Литература

1. Труш, Н. Н. Статистические свойства оценок спектральных плотностей по пересекающимся интервалам наблюдений / Н. Н. Труш, Е. И.Мирская // Проблемы компьютерного анализа данных и моделирования : сб. науч. ст. / Белорус. гос. ун-т ; под ред. Ю. С. Харина. – Минск, 1991. – С. 180–186.

2. Труш, Н. Н. О скорости сходимости моментов оценок спектральных плотностей / Н. Н. Труш, Е. И.Мирская // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1996. – №4. – С. 54–59.

О НЕЛОКАЛЬНЫХ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Воловод Ю. А., Павлюкевич А. Н.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Целью нашей курсовой работы было сравнение и анализ различных методов решения систем нелинейных уравнений вида:

$$f(x)=0 \qquad (1)$$

Объектом нашего изучения являлись:

1. Нелокальные нерегуляризованные итерационные процессы, реализующие процедуру неполного прогноза-коррекции;