Рассмотрим I_{12}. Так как семиинвариантная спектральная плотность 4-го порядка ограничена на Π^3 и используя неравенство Гёльдера получим

$$I_{12} = O\left(\frac{1}{N\sqrt{N}}\right).$$

Рассмотрим I_2. Так как

$$\lim_{N\to\infty} \iiint_{\Pi^3} \Phi_{a_1b_1a_2b_2}(y_1, y_2, y_3) P_L \times [(N-K)(y_1+y_2)] dy_1 dy_2 dy_3 = \frac{1}{(2\pi)^2},$$

то $I_2 = O\left(\frac{1}{LN}\right)$. Откуда $A_1 = O\left(\frac{1}{LN}\right)$.

Рассмотрим A_2.

$$|A_2| \le \frac{(2\pi)^2}{L} C_3 \max_z \left| f_{a_1b_2}(z) \right| \max_u \left| f_{b_1a_2}(u) \right| \times \iint_{\Pi^2} \left|\Phi_{a_1b_2}(z-\gamma, z+\gamma)\right| \cdot \left|\Phi_{b_1a_2}(z+\gamma, z-\gamma)\right|$$
$$\times P_L [(N-K)(z+u)] du dz.$$

Учитывая ограниченность $f_{ab}(x)$ на Π, получим

$$A_2 = O\left(\frac{1}{LN}\right).$$

Аналогично $A_3 = O\left(\frac{1}{LN}\right)$. Теорема доказана.

Для окон просмотра данных Дирихле, Фейера, Рисса, Гаусса, Хэмминга построены графики оценки взаимной спектральной плотности, заданной выражением (1). Проведен сравнительный анализ дисперсии в зависимости от окон просмотра данных. Дисперсия минимальная для оценки, построенной с использованием окна Хэмминга.

Литература

1. Труш, Н. Н. Статистические свойства оценок спектральных плотностей по пересекающимся интервалам наблюдений / Н. Н. Труш, Е. И.Мирская // Проблемы компьютерного анализа данных и моделирования : сб. науч. ст. / Белорус. гос. ун-т ; под ред. Ю. С. Харина. – Минск, 1991. – С. 180–186.

2. Труш, Н. Н. О скорости сходимости моментов оценок спектральных плотностей / Н. Н. Труш, Е. И.Мирская // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1996. – №4. – С. 54–59.

О НЕЛОКАЛЬНЫХ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Воловод Ю. А., Павлюкевич А. Н.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Целью нашей курсовой работы было сравнение и анализ различных методов решения систем нелинейных уравнений вида:

$$f(x)=0 \qquad (1)$$

Объектом нашего изучения являлись:

1. Нелокальные нерегуляризованные итерационные процессы, реализующие процедуру неполного прогноза-коррекции;

2. Нелокальные нерегуляризованные итерационные процессы, реализующие процедуру полного прогноза-коррекции;

3. Нелокальные регуляризованные итерационные процессы, реализующие процедуру полного прогноза-коррекции.

Мы рассматривали «итерационный процесс» в предположении, что оператор *f* в интересующей нас области D удовлетворяет следующим условиям:

$$f \in C_D^{(2)}, \ \left\| \left[f'(x) \right]^{-1} \right\| \le B, \ \left\| f''(x) \right\| \le K, \ \ \forall x \in D. \tag{2}$$

На первом шаге решалась СЛАУ для определения поправки Δx_n:

$$f'(x)\Delta x_n = -f(x_n), \ n = 0,1,2,... \tag{3}$$

На втором шаге производилось уточнение вектора x_n:

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, \ n = 0,1,2,..., \ \beta_0 \in \left[10^{-3}, 10^{-1}\right] \tag{4}$$

На третьем шаге производилась проверка окончания итерационного процесса: если $\| f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, то конец просчётов, иначе переходим на шаг четыре.

На четвёртом шаге осуществляем вычисление нового значения для переменной β: если $\| f(x_{n+1})\| < \| f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} = 1,$ иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\| f(x_n)\| \gamma_n}{\| f(x_{n+1})\| \beta_n}\right), \ \ \gamma_{n+1} = \frac{\| f(x_n)\| \gamma_n}{\| f(x_{n+1})\|}, \ \ n = 0,1,2,..., \ \ \gamma_0 = \beta_0^2 \tag{5}$$

и переходим на шаг 1.

Предлагаемый выше метод носит название нелокального нерегуляризованного итерационного процесса, реализующего процедуру неполного прогноза-коррекции

Теорема 1 [1] Пусть оператор f удовлетворяет условиям (2), и в *D* существует x^* - решение системы (1) f(x)=0 , начальное приближение x_0 и шаговая длина β_0 таковы, что выполняется условие $\varepsilon_0 = 0.5\beta_0 KB^2 \| f(x_0)\| < 1$. Тогда итерационный процесс, описанный на шагах 1-4, со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.

Сходимость данного метода для выбранной системы в основном зависит от следующих факторов:

1. От удачного выбора начальных приближений;
2. От выбора параметра β;
3. От выбора точности просчётов нелинейной системы.

Другой нелокальный нерегуляризованный итерационный процесс, реализующий процедуру неполного прогноза-коррекции основан на том, что шаговая длина β_{n+1} находится по формулам:

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{w_n}{\alpha\beta_n \| f(x_{n+1})\|}\right), \ w_{n+1} = (1-\beta_{n+1})w_n + \beta_{n+1}^2 \beta_n \| f(x_{n+1})\|$$

$$w_0 = \gamma \| f(x_0)\|; \alpha > 1, \gamma << 1.$$

Сформулируем теорему для вышеописанного метода.

Теорема 2 [1] Пусть оператор f удовлетворяет условиям (2), и в *D* существует x^*- решение системы (1) f(x)=0 , начальное приближение x_0 и шаговая длина β_0 таковы, что выполняются условия:

а) $\beta_0 \dfrac{KB^2\|f(x_0)\|}{2} = l_0 < 1$; б) $\dfrac{\gamma}{\alpha\beta_o^2} < 1$; в) $\varepsilon_0 = 0.5\beta_0 KB^2\|f(x_0)\|$<1.

Тогда итерационный процесс, описанный на шагах 1-4, со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.

Третий и четвёртый из рассмотренных нами методов являются методом полного прогноза. Один из них является нерегуляризованным, а другой метод – регуляризованным. Опишем третий метод:

На первом шаге решалась СЛАУ для определения поправки Δx_n:

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n), n = 0,1,2...$$

На втором шаге производилась проверка окончания итерационного процесса:

если $\|f(x_n + \Delta x_n)\| < \|f(x_n)\|$, то β_n принимает значение 1, иначе определяется новая шаговая длина β_n по формулам:

$$\beta_n = \min\left(1, \frac{w(x_n,0)}{\alpha\beta_{n-1}\|f(x_n+\Delta x_n)\|}\right), \beta_{-1} \in (10^{-4},1), \alpha > 1,$$

$$w_{n+1} = w(x_n,\beta_n) = (1-\beta_n)w(x_n,0) + \beta_n^2\beta_{n-1}\|f(x_n+\Delta x_n)\|,$$

$$w_0 = \gamma\|f(x_0)\|, \gamma << 1$$

На третьем шаге производилось уточнение вектора x_n:

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n.$$

На четвёртом шаге производилась проверка окончания итерационного процесса:

если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, то конец просчётов, иначе переходим на шаг один.

Сформулируем теорему для вышеописанного метода:

Теорема 3 [1] Пусть оператор f удовлетворяет условиям (2), и в *D* существует x^*- решение системы (1) f(x)=0 , начальное приближение x_0 и шаговая длина β_0 таковы, что выполняется условие $\varepsilon_0 = 0.5\beta_0 KB^2\|f(x_0)\|$<1. Тогда итерационный процесс, описанный на шагах 1-4, со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.

Четвёртый метод заключался в реализации следующих шагов:

на первом шаге решалась СЛАУ для определения поправки Δx_n:

$$\left(\delta\beta_{n-1}^2\|f(x_n)\|^2 E + \overline{f'}(x_n)f'(x_n)\right)\Delta x_n = -\overline{f'}(x_n)f(x_n)$$

$$\beta_{-1} \in \left[10^{-3},10^{-1}\right]; \delta << 1; n = 0,1,2,...$$

На втором шаге производилась проверка окончания итерационного процесса:

если $\|f(x_n + \Delta x_n)\| < \|f(x_n)\|$, то β_n =1, иначе выщитываем значение переменных β_n и w_{n+1} по следующим формулам:

$$\beta_n = \min\left(1, \frac{w(x_n,0)}{\alpha\beta_{n-1}\|f(x_n+\Delta x_n)\|}\right), \beta_{-1} \in (10^{-4},1), \alpha > 1,$$

$$w_{n+1} = w(x_n, \beta_n) = (1-\beta_n) w(x_n, 0) + \beta_n^2 \beta_{n-1} \| f(x_n + \Delta x_n) \|,$$

$$w_0 = \gamma \| f(x_0) \|, \gamma << 1$$

На третьем шаге производилось уточнение вектора x_n:

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n .$$

На четвёртом шаге производилась проверка окончания итерационного процесса: если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon, \quad \varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 1.

Теорема 4 [1] Пусть оператор f удовлетворяет условиям (2), и в *D* существует x^* - решение системы (1) f(x)=0 , начальное приближение x_0 и шаговая длина β_0 таковы, что выполняется условие $\varepsilon_0 = 0.5 \beta_0 K B^2 \| f(x_0) \| < 1$. Тогда итерационный процесс, описанный на шагах 1-4, со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.

Результаты работы итерационных процессов на системе:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + \dots + x_n = n \\ x_1 * x_2 * x_3 \dots * x_n = 1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ arctgx_1 + arctgx_n = 2arctg n \end{cases}$$

показаны в таблице:

N метода / Размерность системы	4	10	18
1	ε= 1e^{-12} Итераций 1512 ε= 1e^{-15} Итераций 2717	ε= 1e^{-12} Итераций 1632 ε= 1e^{-15} Итераций 1805	ε= 1e^{-12} Итераций 1720 ε= 1e^{-15} Итераций 1945
2	ε= 1e^{-12} Итераций 1465 ε= 1e^{-15} Итераций 1315	ε= 1e^{-12} Итераций 986 ε= 1e^{-15} Итераций 1480	ε= 1e^{-12} Итераций 1210 ε= 1e^{-15} Итераций 1618
3	ε= 1e^{-12} Итераций 454 ε= 1e^{-15} Итераций 609	ε= 1e^{-12} Итераций 912 ε= 1e^{-15} Итераций 1367	ε= 1e^{-12} Итераций 1074 ε= 1e^{-15} Итераций 1602
4	ε= 1e^{-12} Итераций 215 ε= 1e^{-15} Итераций 609	ε= 1e^{-12} Итераций 392 ε= 1e^{-15} Итераций 802	ε= 1e^{-12} Итераций 476 ε= 1e^{-15} Итераций 956

Анализ таблицы показывает, что среди нерегуляризованных методов метод № 2 является наиболее эффективным.

Сравнение нерегуляризованных и регуляризованных методов показывает, что общее время работы регуляризованных методов меньше как минимум в два раза, чем работа нерегуляризованных методов.

Литература

1. Мадорский В.М., Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений – Брест, 2005.
2. Вержбицкий, В.М., Численные методы / В.М. Вержбицкий. – Минск: Высш. шк., 2002. – 840 с..
3. Ермаков В.В., Калиткин Н.Н. Оптимальный шаг и регуляризация в методе Ньютона // Ж. вычисл. Матем. Физ. – 1981.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ ДЛЯ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ I РОДА

В. Ю. Гондюк, В. Ф. Савчук
Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, г. Брест

В действительном гильбертовом пространстве H решается уравнение 1 рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A - ограниченный, положительный, самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением. Причем нуль принадлежит спектру оператора A, т.е. задача некорректна. Предполагается существование единственного решения x при точной правой части y. Для его отыскания предлагается итеративный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^2 x_n + 2\alpha y - \alpha^2 Ay, \qquad x_0 = 0. \tag{2}$$

Однако на практике часто правая часть y уравнения (1) бывает неизвестной, а вместо y известно приближение $y_\delta : \|y - y_\delta\| \le \delta$, тогда метод (2) примет вид:

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta - \alpha^2 Ay_\delta, \qquad x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим сходимость процессов (2) и (3) в энергетической норме

$\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$.

При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ.

Полагаем, что $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \tag{4}$$

Запишем первое слагаемое в виде $x - x_n = A^{-1}(E - \alpha A)^{2n} y = (E - \alpha A)^{2n} x$.

При $0 < \alpha < \dfrac{2}{\|A\|}$ имеем $\|E - \alpha A\| < 1$, поэтому $x - x_n \to 0$, $n \to \infty$. Однако скорость сходимости к нулю может быть сколь угодно малой, и для ее оценки требуется дополнительное предположение об истокопредставимости точного решения.

Использование энергетической нормы позволяет получить априорную оценку погрешности метода (3) и априорный момент останова без требования истокопредставимости точного решения. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора имеем

$\|x - x_n\|_A^2 = \left(A(E - \alpha A)^{2n} x,\ (E - \alpha A)^{2n} x\right) = \int_0^M \lambda(1 - \alpha\lambda)^{4n} d(E_\lambda x, x)$, $M = \|A\|$, E_λ - соответствующая спектральная функция.