

значение мощности марковского предиктора (сплошная линия). Предиктор (5) строился по дополнительным выборкам. Из рис.1 можно видеть, что экспериментальные результаты согласуются с утверждением теоремы. На рис.2 для той же модели дополнительно приведены оценки мощности критериев, построенных на базе универсальных предиктора Лемпеля-Зива (◦) и Sampled Pattern Matching (SPM) предиктора (•) [2], а также теоретическое значение мощности марковского предиктора (сплошная линия). Можно заметить, что универсальные предикторы Лемпеля-Зива и SPM даже без априорной информации о виде альтернативы выявляют отклонение от  $H_0$ , хотя и с меньшей мощностью, чем марковский предиктор, являющийся оптимальным (при наличии априорной информации о виде  $H_1$ ).

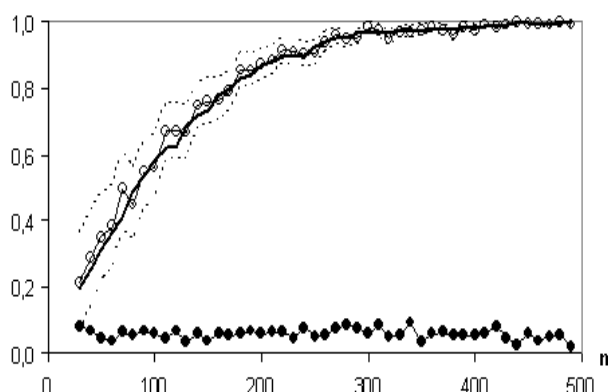


Рис.1: Оценки вероятности ошибки I рода и мощности критерия (3)

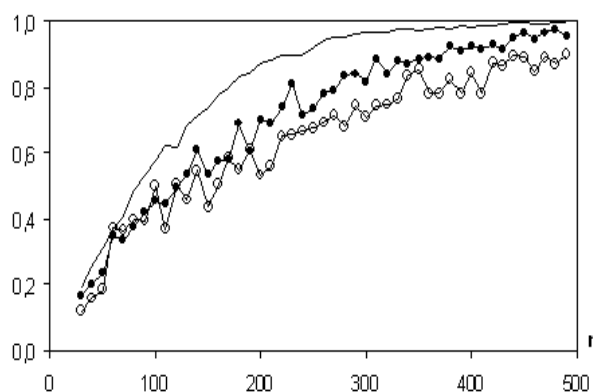


Рис.2: Оценки мощности при использовании универсальных предикторов

### Литература

1. NIST Special Publication 800-22. A statistical test suite for random and pseudorandom number generators for cryptographic applications. 2001.
2. Katsaros D., Manolopoulos Ya. Suffix Tree Based Prediction Scheme for Pervasive Computing Environments // Lecture Notes on Computer Science. 2005. Vol. 3746. – P. 267-277.
3. Kostevich A.L., Shilkin A.V. Approach to Randomness Testing on the base of the Universal Predictors // Proc. of the 8 Int. Conf “Computer Data Analysis and Modeling” – Minsk 2007. – Vol. 1. – P. 256-259.
4. Ryabko B.Ya., Monarev V.A. Using information theory approach to randomness testing // Journal of Statistical Planning and Inference. – 2005. – Vol. 133 (1). – P. 95-110.
5. Suzuki J. Universal prediction and universal coding. Systems and Computers. – 2003. – Vol. 34 (6). – P. 1-11.

## ЕЩЁ ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА

**Кузин В. В., Веремчук А. П.**

*Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, г. Брест*

Среди методов решения задачи Дурффинга в настоящее время наиболее эффективными являются разностные методы, основным недостатком которых является необходимость восстановления полученного сеточного решения. Процедура восстановления позволяет получить приближенное решение в аналитическом виде с точностью порядка  $1e-13$  –  $1e-14$  для периодической задачи и с точностью  $1e-8$  –  $1e-9$  для непериодической задачи. Предлагаемый нами метод решения задачи Дурффинга позволяет достичь точности по невязке  $1e-14$  –  $1e-15$  как в периодическом, так и в непериодическом случае, что позволяет говорить об общности подхода к решению задачи Дурффинга.

Рассматривается решение краевой задачи Дуффинга:

$$\ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) + \beta x(t) + \gamma(x(t))^n = F(t), \quad x \in [a, b]$$

$$\begin{cases} x(a) = A \\ x(b) = B \end{cases} \quad (1)$$

Были рассмотрены частные случаи задачи (1) с известными точными решениями:

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) + 2,4(x(t))^3 = f(t), \quad (2)$$

1)  $x(t) = t^2 + 4 \sin t + e$ ,  $2 \leq t \leq 10$  - точное решение

$$\begin{cases} x(2) = 4 + 4 \sin 2 + e, \\ x(10) = 100 + 4 \sin 10 + e \end{cases} \quad (3)$$

2)  $x(t) = \sin^2 t + 1$ ,  $\pi \leq t \leq 3\pi$  - точное решение

$$\begin{cases} x(\pi) = 1, \\ x(3\pi) = 1 \end{cases} \quad (4)$$

3)  $x(t) = e^t \sin t$ ,  $7 \leq t \leq 9$  - точное решение

$$\begin{cases} x(7) = e^7 \sin 7, \\ x(9) = e^9 \sin 9 \end{cases} \quad (5)$$

$f(t)$  - функция, получающаяся в результате подстановки в (2) точного решения.

**Общий алгоритм:** Полагая, что задача (1) на рассматриваемом отрезке имеет решение, мы разбиваем отрезок на  $N$  частей, и уже рассматриваем задачу не на всём отрезке, а в каждой конкретной точке разбиения, взяв некоторую функцию  $\varphi(t_i, z)$ , которая в точке  $t_i$  удовлетворяет рассматриваемой задаче. Подставляем эту функцию в (1), мы получим одномерное нелинейное уравнение относительно переменной  $z$ , решая его, находим  $z$ , подставляем в  $\varphi(t_i, z)$ , тем самым находим решение нашей задачи в точке  $x_i$ . Этот процесс повторяется для всех  $t_i$ . Таким образом, мы находим сеточное решение. В этом заключается метод решения.

В качестве функции  $\varphi(t_i, z)$  мы взяли  $\varphi(t_i, z) = (t_i^z - t_i z)M$ ,  $M = const$ , данная функция удобна в том плане, что если взять достаточно большой набор  $z$ , функция  $\varphi(t_i, z)$  полностью заполняет первую четверть, как это показано на рис.1. Рассматриваемую функцию, дифференцируем в аналитическом виде и подставляем в (1). Тем самым мы получим неоднородное одномерное численное уравнение. Решаем его квазиньютоновскими методами, для чего находим  $\varphi'_k(t_i, z)$ . В качестве начального приближения можно брать  $z$ , найденное на предыдущем  $i$ -ом уровне. Решая уравнение, находим решение исходной задачи в соответствующей точке, и так, пробегаая по всем  $t_i$ , находим соответствующие  $x_i$ .

**Преимущества метода:** 1. Не требуется аппроксимировать производные; 2. Решаются одномерные уравнения, за счет чего можно добиться высокой точности при нахождении  $z$ , что в свою очередь повлияет на точность решения задачи (1); 3. Метод легко программируем; 4. Сеточное решение получается достаточно быстро.

**Недостатки метода:** 1. Проблема в выборе функции  $\varphi(t_i, z)$ ; 2. При рассмотрении функции  $\varphi(t_i, z) = (t_i^z - t_i z)M$ ,  $M = const$ , решение задачи Дуффинга должно находиться в первой четверти.

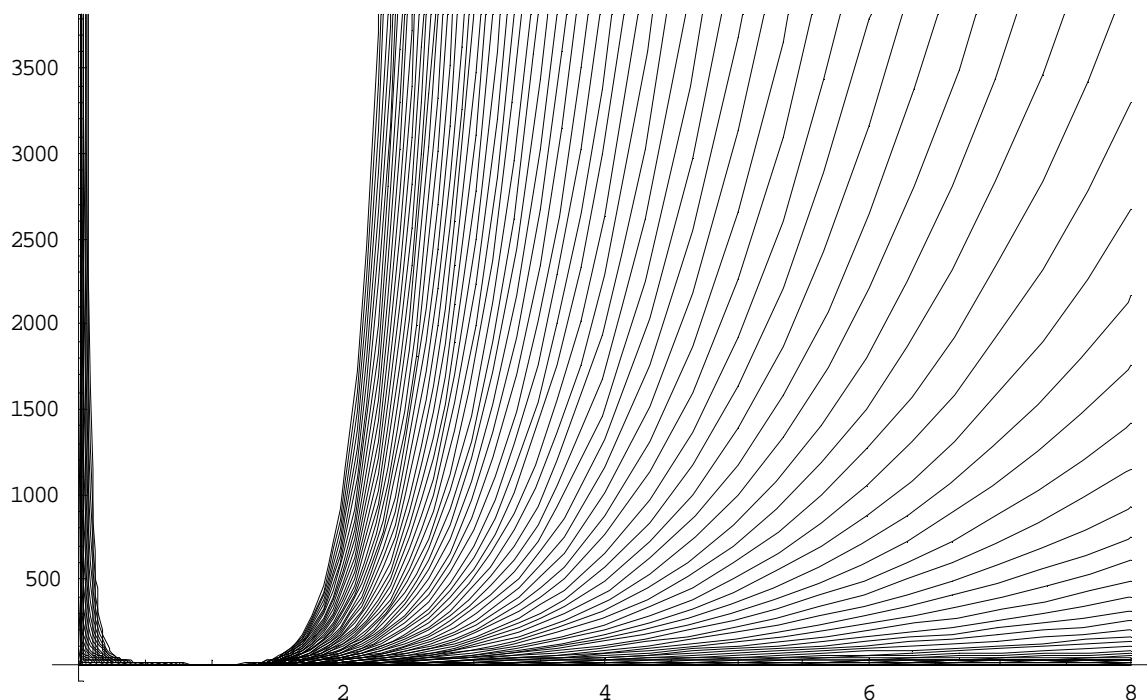


рис.1

**Вычислительный эксперимент.** Были исследованы тестовые точные решения задачи Дуффинга вида (2)-(3), (2)-(4), (2)-(5). Эксперимент показал, что при использовании функции  $\varphi(t_i, z)$  решение исходной задачи должно находиться в первой четверти. Так, данная функция имеет два решения, подстановкой в (2) выясняем, какое из них является решением дифференциальной задачи. При решении нелинейного уравнения были использованы все процессы: нерегуляризованный, частично, просто и полностью регуляризованный; различными методами: одношаговыми и многошаговыми. Практика показала, что если взять  $N$  достаточно большим на рассматриваемом отрезке, тем самым мы уплотняем и точки  $z$ , для каждого  $t_i$ , можно использовать просто метод Ньютона, который за небольшое количество итераций сходится с заданной точностью к точному решению. Для всех тестовых функций использовалась точность, при решении нелинейных уравнений  $1e-16$ , которая достигалась за 5-11 итераций. После получения сеточного решения, находилась норма разности между точным и приближенным решением в соответствующих точках. Эта норма оказалась порядка  $1e-14 - 1e-16$ .

**Вывод.** Данный подход оказался достаточно неплохим для получения сеточного решения задачи Дуффинга.

**Дальнейшие перспективы метода.** Т.к. для рассматриваемой функции, решение исходной задачи должно полностью находиться в первой четверти, то было выдвинута идея, перевести задачу Дуффинга в полярную систему координат, и там в качестве функции  $\varphi(t_i, z)$  рассматривать спираль Архимеда, т.к. она проходит по всем четвертям и тем самым отпадает проблема первой четверти решения исходной задачи. А также применить данный метод для решения других дифференциальных задач.

#### Литература

1. Березин, И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. М.:Наука, 1966.-Т.1.-632 с.
2. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские методы решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. Брест. 2005. – 180 с.