МЕТОД ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Матысик О.В., Козак И.П.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

1. Постановка задачи. В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение:

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения задачи предлагается неявный метод итерации

$$x_{n+1} = x_n + \alpha A^2 (y - Ax_{n+1}), \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$. В этом случае метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A^2 (y_\delta - Ax_{n+1,\delta}), \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ.

2. Сходимость метода при точной правой части уравнения.

Теорема 1. Итерационный метод (2) при условии $\alpha > 0$ сходится в исходной норме гильбертова пространства.

Доказательство. По индукции нетрудно показать справедливость равенства: $x_n = A^{-1}\left[E - (E + \alpha A^3)^{-n}\right] y$. Используя интегральное представление самосопряженного оператора $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$ ($M = \|A\|$, E_λ – спектральная функция), имеем

$$x - x_n = A^{-1}y - A^{-1}\left[E - (E + \alpha A^3)^{-n}\right] y =$$

$$= \int_0^M \lambda^{-1}(1 + \alpha\lambda^3)^{-n}\, dE_\lambda y = \int_0^\varepsilon \lambda^{-1}(1 + \alpha\lambda^3)^{-n}\, dE_\lambda y + \int_\varepsilon^M \lambda^{-1}(1 + \alpha\lambda^3)^{-n}\, dE_\lambda y .$$

Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0, M]$ выполнялось неравенство: $\alpha > 0$. Тогда $\left(1+\alpha\lambda^3\right)^{-1} \le q < 1$ и, следовательно, выполняется:
$\left\| \int_{\varepsilon}^{M} \lambda^{-1}\left(1+\alpha\lambda^3\right)^{-n} \, dE_\lambda y \right\| \le q^n \left\| \int_{\varepsilon}^{M} \lambda^{-1} dE_\lambda y \right\| = q^n \left\| \int_{\varepsilon}^{M} dE_\lambda x \right\| \le q^n \|x\| \to 0, \; n \to \infty$. Кроме этого $\left\| \int_{0}^{\varepsilon} \lambda^{-1}\left(1+\alpha\lambda^3\right)^{-n} dE_\lambda y \right\| \le \left\| \int_{0}^{\varepsilon} dE_\lambda x \right\| = \|E_\varepsilon x\| \to 0$, так как при $\varepsilon \to 0$ E_ε сильно стремится к нулю в силу свойств спектральной функции. Таким образом, доказано, что метод (2) при $\alpha > 0$ сходится.

3. Оценка скорости сходимости. Скорость убывания к нулю $\|x - x_n\|$ неизвестна и может быть сколь угодно малой. Для её оценки предположим, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо, т. е. $x = A^s z, \; s > 0$. Тогда $x - x_n = \int_0^M \lambda^s \left(1+\alpha\lambda^3\right)^{-n} \, dE_\lambda z$. Найдём максимум подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s \left(1+\alpha\lambda^3\right)^{-n}$. Приравняв нулю производную от $f(\lambda)$, получим уравнение для нахождения стационарных точек функции $f(\lambda)$: $\lambda^{s-1}\left(1+\alpha\lambda^3\right)^{-n-1}\left[s\left(1+\alpha\lambda^3\right) - 3n\alpha\lambda^3\right] = 0$. Здесь $\lambda \ne 0$, так как в противном случае $f(\lambda) = 0$. Поэтому $s\left(1+\alpha\lambda^3\right) - 3n\alpha\lambda^3 = 0$. Отсюда $\lambda_* = \left(\frac{s}{(3n-s)\alpha}\right)^{1/3}$ – стационарная точка функции $f(\lambda)$ при $3n > s$. Поскольку $f''(\lambda_*) < 0$, то λ_* – точка максимума для $f(\lambda)$. Найдём его:

$$f(\lambda_*) = \left(\frac{s}{3n\alpha}\right)^{s/3} \left(1 + \frac{s}{3n-s}\right)^{\frac{-(3n-s)}{3}} < \left(\frac{s}{3n\alpha}\right)^{s/3} 2^{-s/3} = \left(\frac{s}{6n\alpha}\right)^{s/3}.$$

Нетрудно проверить, что найденный для функции $f(\lambda)$ максимум является глобальным на отрезке [0, *M*]. Таким образом, $\|x - x_n\| \le s^{s/3}(6n\alpha)^{-s/3}\|z\|$.

4. Сходимость метода при приближённой правой части уравнения. Покажем, что при $\alpha > 0$ метод (3) можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ приближенной правой части операторного уравнения (1). Рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. По доказанному в разделе 2 $x - x_n \to 0, \; n \to \infty$. Убедимся, что $x_n - x_{n,\delta}$ можно сделать сходящимся к нулю. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, имеем

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha A^3\right)^{-n}\right](y - y_\delta) = \int_0^M \lambda^{-1}\left[1 - \left(1+\alpha\lambda^3\right)^{-n}\right] dE_\lambda (y - y_\delta).$$

Оценим сверху подынтегральную функцию $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\left(1+\alpha\lambda^3\right)^{-n}\right]$. Нетрудно показать, что $g_n(\lambda)=|g_n(\lambda)|\le 3n^{1/3}\alpha^{1/3}$ при условии $\alpha>0$. Отсюда $\|x_n-x_{n,\delta}\|\le 3n^{1/3}\alpha^{1/3}\delta.$

Поскольку $\|x-x_{n,\delta}\|\le\|x-x_n\|+\|x_n-x_{n,\delta}\|\le\|x-x_n\|+3n^{1/3}\alpha^{1/3}\delta$ и $\|x-x_n\|\to 0,\ n\to\infty$, то для сходимости метода (3) достаточно выбрать $n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/3}\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$. Итак, доказана

Теорема 2. При условии $\alpha>0$ итерационный метод (3) сходится, если число итераций n выбирать из условия $n^{1/3}\delta\to 0,\quad n\to\infty,\quad \delta\to 0$.

5. Оценка погрешности метода и ее оптимизация. Запишем теперь общую оценку погрешности метода (3)

$$\|x-x_{n,\delta}\|\le\|x-x_n\|+\|x_n-x_{n,\delta}\|\le s^{s/3}(6n\alpha)^{-s/3}\|z\|+3(n\alpha)^{1/3}\delta. \qquad (4)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 3. Если решение x уравнения (1) истокообразно представимо, то при условии $\alpha>0$ для метода (3) справедлива оценка погрешности (4).

Для минимизации полученной оценки погрешности вычислим правую часть оценки (4) в точке, в которой производная от неё равна нулю; в результате получим априорный момент останова $n_{\text{опт}}=2^{-s/(s+1)}\left(\dfrac{s}{3}\right)^{(s+3)/(s+1)}\alpha^{-1}\|z\|^{3/(s+1)}\delta^{-3/(s+1)}$. Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (4), имеем $\|x-x_{n,\delta}\|_{\text{опт}}\le(1+s)\cdot 2^{-s/(3(s+1))}\left(\dfrac{s}{3}\right)^{-2s/(3(s+1))}\delta^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}$.

Замечание 1. Оптимальная оценка погрешности метода (3) имеет порядок $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, и как следует из [1], он является оптимальным в классе задач с истокопредставимыми решениями $x=A^s z,\ s>0$.

Замечание 2. Оптимальная оценка не зависит от α, но от параметра α зависит $n_{\text{опт}}$, поэтому для уменьшения объёма вычислительной работы следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию $\alpha>0$ и так, чтобы $n_{\text{опт}}\in Z$.

Литература

1. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.