МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Матысик О.В., Матусевич А.А.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Для решения операторного уравнения 1-ого рода

$$Ax = y \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве H с положительным самосопряженным ограниченным оператором *A* предлагается неявный итеративный метод

$$\left(E + \alpha^2 A^2\right) x_{n+1} = (E - \alpha A)^2 x_n + 2\alpha y, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Здесь $0 \in SpA$, но не является его собственным значением. Поэтому задача отыскания решения уравнения является некорректной. Предполагается существование единственного решения *x* при точной правой части уравнения (1).

В случае приближённой правой части (1) y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ итерационный метод (2) примет вид

$$\left(E + \alpha^2 A^2\right) x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Имеют место

Теорема 1. Процесс (2) при условии $\alpha > 0$ сходится.

Теорема 2. Процесс (3) сходится при условии $\alpha > 0$, если число итераций *n* выбирать в зависимости от δ так, чтобы $n\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$.

Теорема 3. Если решение x уравнения (1) истокопредставимо, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$, то при условии $\alpha > 0$ для метода (3) справедлива оценка $\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s (2n\alpha e)^{-s} \|z\| + 2n\alpha\delta$.

Теорема 4. Оптимальная оценка погрешности для метода (3) имеет вид $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (1+s) e^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}$ и получается при $n_{\text{опт}} = s(2\alpha)^{-1} e^{-s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \delta^{-1/(s+1)}$.

Замечание. Неявные методы обладают следующим важным достоинством. В явных методах на параметр α накладывается ограничение сверху, что может привести к необходимости большого числа итераций. В неявных методах никаких ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет брать его произвольно большим (независимо от $\|A\|$). В связи с чем оптимальную оценку погрешности для метода (3) можно получить уже на первых шагах итераций.

НЕЯВНАЯ ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Матысик О.В., Наумовец С.Н.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест

Пусть в гильбертовом пространстве *H* требуется решить уравнение

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – ограниченный, самосопряженный, положительный оператор $A : H \to H$, для которого нуль не является собственным значением. Причем $0 \in Sp\ A$, т.е. задача некорректна. Предполагается существование единственного решения *x* при точной правой части *y*. Для его отыскания предлагается итерационный метод