

Итак, доказана

Теорема 3. Если точное решение x уравнения (1) истокорпредставимо, то при условии (4) для метода (3) справедлива оценка погрешности $\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^{s/2} (4n\alpha)^{-s/2} \|z\| + 2\sqrt{n\alpha} \delta$.

Оптимизировав по n полученную оценку погрешности, найдем значение $n_{\text{опт}} = 2^{-s/(s+1)} \left(\frac{s}{2}\right)^{(s+2)/(s+1)} \alpha^{-1} \|z\|^{2/(s+1)} \delta^{-2/(s+1)}$, подставив которое в исходную оценку, получим её оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1+s) \cdot 2^{-s/(2(s+1))} \left(\frac{s}{2}\right)^{-s/(2(s+1))} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}.$$

Оптимальная оценка погрешности метода (3) не зависит от α , но от α зависит $n_{\text{опт}}$ и, значит, объём вычислительной работы. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию (4), и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in \mathbb{Z}$.

СХОДИМОСТЬ НЕЯВНОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ В СЛУЧАЕ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Наумовец С.Н., Матысик О.В.

Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина, г.Брест

1. Введение

В последние десятилетия математическая наука обогатилась важным разделом – теорией некорректно поставленных задач и методов их приближенного решения.

Развитие этого раздела математики вызвано многочисленными приложениями в технике, физике, экономике и других естественных науках, поскольку, прежде всего, в приложениях возникают и имеют большое значение подобные некорректные задачи. Потребности практики приводят к необходимости решения некорректно поставленных задач, которые во многих случаях описываются операторными уравнениями первого рода.

Для их решения широко используются итерационные схемы. Поэтому большое значение имеют разработка и изучение итерационных методов, получение условий их сходимости, нахождение оценок погрешности. Важность изучения таких методов решения операторных уравнений объясняется также и тем, что эти методы легко реализуются на ПЭВМ.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать в гильбертовом пространстве H операторное уравнение

$$Ax = y \quad (1)$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A , для которого нуль является собственным значением, т.е. задача (1) имеет неединственное решение. Предположим, что $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнения решение (неединственное) задачи (1) существует. Для его отыскания используем неявную итерационную процедуру

$$(E + \alpha A^2)x_{n+1} = x_n + \alpha Ay, \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

Докажем сходимость итерационной процедуры (2) к решению операторного уравнения (1) в случае неединственного решения. Более того, покажем, что в этом случае итерационный процесс (2) сходится к решению с минимальной нормой.

3. Сходимость метода в случае неединственного решения

Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, а через $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H . Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема. Пусть $A \geq 0$, $y \in H$, $\alpha > 0$. Тогда для итерационного процесса (2) верны следующие утверждения:

а) $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \rightarrow I(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) итерационный метод (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. В последнем случае $x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$, где x^* – минимальное решение уравнения.

Доказательство

Применив оператор A к (2), получим $A(E + \alpha A^2)x_n = Ax_{n-1} + \alpha A^2 y$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как в нашем случае $AP(A)y = 0$, то получим $(E + \alpha A^2)(Ax_n - \Pi(A)y) = Ax_{n-1} - \Pi(A)y$.

Обозначим $Ax_n - \Pi(A)y = v_n$, $v_n \in M(A)$, тогда $(E + \alpha A^2)v_n = v_{n-1}$. Отсюда $v_n = (E + \alpha A^2)^{-1} v_{n-1}$, следовательно, $v_n = (E + \alpha A^2)^{-n} v_0$. Имеем $A \geq 0$ и A – положительно определён в $M(A)$, т.е. $(Ax, x) > 0 \quad \forall x \in M(A)$. Так как $\alpha > 0$, то

$\|(E + \alpha A^2)^{-1}\| \leq 1$, и поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|v_n\| &= \|(E + \alpha A^2)^{-n} v_0\| = \left\| \int_0^{\|A\|} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda v_0 \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda v_0 \right\| + \\ &+ \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda v_0 \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda v_0 \right\| + q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} dE_\lambda v_0 \right\| \leq \\ &\leq \|E_{\varepsilon_0} v_0\| + q^n(\varepsilon_0) \|v_0\| < \varepsilon \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, $\varepsilon_0 \rightarrow 0$. Здесь $\frac{1}{1 + \alpha \lambda^2} \leq q(\varepsilon_0) < 1$ при $\lambda \in [\varepsilon_0, \|A\|]$. Следовательно, $v_n \rightarrow 0$, откуда получим $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Отсюда $\|Ax_n - y\| \rightarrow \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y)$ (см. [1]). Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть итерационный процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \rightarrow Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда итерационная процедура (2) примет следующий вид

$$\begin{aligned} (E + \alpha A^2)x_n &= x_{n-1} + \alpha A \Pi(A)y = x_{n-1} + \alpha A^2 x^* = \\ &= (E + \alpha A^2)x_{n-1} - \alpha A^2 x_{n-1} + \alpha A^2 x^* = (E + \alpha A^2)x_{n-1} + \alpha A^2(x^* - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Отсюда запишем $x_n = x_{n-1} + \alpha A^2 (E + \alpha A^2)^{-1} (x^* - x_{n-1})$.

Последнее равенство разобьём на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \alpha (E + \alpha A^2)^{-1} A^2 P(A) (x^* - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0;$$

$$\begin{aligned} \Pi(A)x_n &= \Pi(A)x_{n-1} + \alpha A^2 (E + \alpha A^2)^{-1} \Pi(A) (x^* - x_{n-1}) = \\ &= \Pi(A)x_{n-1} + \alpha A^2 (E + \alpha A^2)^{-1} (\Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1}) = \\ &= \Pi(A)x_{n-1} + \alpha A^2 (E + \alpha A^2)^{-1} (x^* - \Pi(A)x_{n-1}), \end{aligned}$$

так как $x^* \in M(A)$.

Обозначим через $w_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда из равенства

$$\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* + \alpha A^2 (E + \alpha A^2)^{-1} (x^* - \Pi(A)x_{n-1})$$

получим $w_n = w_{n-1} - \alpha A^2 (E + \alpha A^2)^{-1} w_{n-1}$.

Следовательно, $w_n = (E + \alpha A^2)^{-1} w_{n-1} = (E + \alpha A^2)^{-n} w_0$. А так как $\alpha > 0$, то справедливо:

$$\begin{aligned} \|w_n\| &= \left\| (E + \alpha A^2)^{-n} w_0 \right\| = \left\| \int_0^{\|A\|} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda w_0 \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda w_0 \right\| + \\ &+ \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda w_0 \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda w_0 \right\| + q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} dE_\lambda w_0 \right\| \leq \\ &\leq \|E_{\varepsilon_0} w_0\| + q^n(\varepsilon_0) \|w_0\| < \varepsilon \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ и, следовательно, $w_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \rightarrow x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$. Теорема доказана.

Замечание. Так как у нас $x_0 = 0$, то $x_n \rightarrow x^*$, т.е. итерационный процесс (2) сходится к решению с минимальной нормой.

Литература

1. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, N 2. – P. 166-176.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Панасик Д.А., Рыбачук Г.Г.

Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина, Брест

Необходимость решения систем линейных и нелинейных уравнений на ЭВМ существует давно. Среди задач вычислительной математики, требующих решения СЛАУ, различают собственно задачи на решение СЛАУ, а также практически все нелинейные задачи, решаемые итерационными методами, которые сводятся к последовательному решению СЛАУ на каждом шаге вычислительного процесса. Поэтому математики всегда