Так как спектр оператора $C = \left(E - \alpha A^{*} A\right)^{3}$ принадлежит $[0,1]$, то $\left\| C^{n}(E-C) \right\| \le \frac{1}{n+1}$. Поэтому из (13) при $n = m-1$

$$\|z_{m-1} - z_m\| \le \frac{2}{m}\left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta.$$

Поскольку по условию теоремы $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^{p}\right)$, $d > 1$, $p \in (0,1)$, то при всех достаточно малых δ, β выполняется неравенство

$\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, поэтому из **б)** получим

$m \le \dfrac{\|z_0 - x\|^{2}}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|B\|\delta\right)}$. Так как $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon$, то

$\varepsilon \le \dfrac{2}{m}\left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta$. Отсюда

$$m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \le \frac{2\left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\|\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\left[2 + \ln\dfrac{\|z_0 - x\|^{2}}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|B\|\delta\right)}\right]}.$$

Следовательно, $m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \to 0$ при $m \to \infty, \delta, \beta \to 0$. Так как при $m \to \infty$ $\left\| C^{m}\Delta_0 \right\| \to 0$, то $\lim\limits_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}} \|\Delta_m\| \le \lim\limits_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}} \|z_m - x\| \le \lim\limits_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}} \left(\left\| C^{m}\Delta_0 \right\| + m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)\right) = 0.$

Если номера останова m, зависящие от $\varepsilon, y - y_\delta, \{u_n\}$, не стремятся к ∞ при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$, а окажутся ограниченными, то и в этом случае $z_m \to x, \beta \to 0, \delta \to 0, \varepsilon \to 0$, ч.т.д.

Литература

1. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач/И.В. Емелин, М.А. Красносельский//Автоматика и телемеханика.-1978.-№12.-С.59-63.

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕКОТОРЫХ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИХ ПРОЦЕССОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рыбачук Г.Г.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест.

Задача отыскания решения системы нелинейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

где вектор-неизвестных $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$ - нелинейная вектор-функция. На практике она встречается значительно чаще, чем уравнение с одним неизвестным, так как в реальных исследованиях интерес представляет, как правило, определение не одного, а нескольких параметров (нередко их число доходит до сотен и тысяч).

Найти точное решение системы, то есть вектор $x^* = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, удовлетворяющий уравнениям (1), практически невозможно. Единственно реальный путь решения системы (1) состоит в использовании итерационных методов для получения приближённого решения $\tilde{x} = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)^T$, удовлетворяющего при заданном $0 < \varepsilon << 1$ неравенству $\left\| x^* - \tilde{x} \right\| < \varepsilon$ или $\| f(\tilde{x}) \| < \varepsilon$.

Прежде, чем перейти к изучению методов решения системы (1), подчеркнём важность понимания того факта, что эта задача может вообще не иметь решения, а в случае, когда решения существуют, их число может быть произвольным. В общем случае весьма сложно выяснить, имеет ли система решения и сколько их.

Будем считать функцию $f \in C_D^{(2)}$, где D - некоторая окрестности решения x^*, $f'(x)$ - матрица Якоби системы (1).

Наиболее распространённый итерационный метод для решения уравнения (1) - метод Ньютона, который в свою очередь используется как основа для построения квазиньютоновских процессов.

Итерационная формула метода Ньютона имеет вид:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - (f'(x^{(n)}))^{-1} f(x^{(n)}). \tag{2}$$

Замечание 1. Формула (2) предполагает применение трудоемкой операции обращения матриц, поэтому непосредственное её использование для вычисления $x^{(n+1)}$ в большинстве случаев нецелесообразно. Обычно вместо этого решают эквивалентную систему линейных алгебраических уравнений:

$$f'(x^{(n)})\Delta x^{(n)} = -f(x^{(n)}). \tag{3}$$

Затем полагают:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \Delta x^{(n)}. \tag{4}$$

Замечание 2. Метод Ньютона обладает рядом недостатков, один из которых – локальная сходимость, то есть метод сходится лишь, вообще говоря, при «хорошем» начальном приближении. Для расширения области сходимости вводится некоторый параметр β_n, который, при определённых условиях, способен увеличить область сходимости метода.

Исходя из вышесказанного, заменим формулу (3) формулой с параметром β_n, определяя итерационный процесс следующим образом:

Шаг 1. Решается линейное уравнение относительно $\Delta x^{(n)}$:

$$f'(x^{(n)})\Delta x^{(n)} = -\beta_n f(x^{(n)}), \quad n = 1,2,..., \ \beta_0 \in \left[10^{-3}, 10^{-1}\right] \tag{5}$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \Delta x^{(n)}, \ n = 1,2,..., \ \beta_0 \in \left[10^{-3}, 10^{-1}\right] \tag{6}$$

Шаг 3. Если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon$, где ε-малая величина (параметр останова), то конец просчета, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то $\beta_{n+1} = 1$, иначе β_{n+1} задаётся формулами, которые мы определим в дальнейшем, и осуществляется переход на шаг 1.

Теорема [1]: *Пусть оператор f удовлетворяет следующим условиям*

$$f \in C_D^2, \left\| [f'(x)]^{-1} \right\| \le B, \| f''(x) \| \le K, \forall x \in D, \tag{7}$$

в D существует x^* - решение уравнения (1), начальное приближение x_0 и шаговая длина таковы β_0, что выполняется условие $\varepsilon_0 = 0.5\beta_0 KB^2 \|f(x_0)\| < 1$, тогда итерационный процесс (5) - (6) со сверхлинейной (локально квадратичной) скоростью сходится к x^*.

В нашем случае D – шар с центром x_0 и радиусом

$$r = \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}, q_0 = 1-\beta_0(1-\varepsilon_0) .$$

В качестве параметра β_{n+1} нами использовались следующие способы задания шаговой длины:

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{1}{\beta_n}\sqrt{\frac{\gamma_n\|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|}}), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}\|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+2})\|}, \gamma_0 = \beta_0^4, \tag{8}$$

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{1}{\beta_n}\sqrt{\frac{\gamma_n\|f(x_0)\|}{\|f(x_{n+1})\|}}), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n\beta_{n+1}}{\beta_n}\sqrt{\frac{\|f(x_{n+1})\|}{\|f(x_{n+2})\|}}, \gamma_0 = \beta_0^2\sqrt{\frac{\|f(x_0)\|}{\|f(x_1)\|}}, \tag{9}$$

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\gamma_n}{\beta_n}\frac{\|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|}), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n\|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|}, \gamma_0 = \beta_0^2, \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\gamma_n}{\gamma_n + \beta_n\delta\|f(x_n+\Delta x_n)\|}),\\ \gamma_{n+1} = (1-2\beta_{n+1})\gamma_n + \beta_{n+1}^2(\gamma_n + \beta_n\delta\|f(x_n+\Delta x_n)\|), \gamma_0 = \beta_{0,}^2\end{gathered} \tag{11}$$

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\gamma_n}{\beta_n}\frac{\|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|}), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n(\|f(x_n)\| + \|f(x_{n+1})\|)\|f(x_n)\|}{2\|f(x_{n+1})\|^2}, \gamma_0 = \beta_0^2, \tag{12}$$

Вычислительный эксперимент и его обсуждение

Нами рассматривалась нелинейная комбинированная система вида:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-3} + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = n+1, \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + x_{n-3} + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = n+1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1 + x_2 + \ldots + 2x_{n-3} + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = n+1, \\ x_1 x_2 \ldots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n = 1, \\ \sin^2 x_1 + \cos^3 x_n = \sin^2 1 + \cos^3 1, \\ arctgx_1 + arctgx_n = 2arctg1. \end{cases}$$

Размерность этой системы была n=10,20,40. В качестве исходного вектора брался случайный вектор и на этом векторе тестировались различные варианты введения шаговой длины. Для системы $n=10$ и начального вектора $x_0=(7{,}02;9{,}96;10{,}07;10{,}42;7{,}38;12{,}16;8{,}05;9{,}97;8{,}29;6{,}17)$. Результаты просчётов сведены в таблицу:

Таблица

№, формулы	Кол-во итераций	$\|f(x_{n+1})\|$, норма прибл. решения
8	42	3,28E-11
9	37	2,5E-11
10	27	7,6E-11
11	28	7,6E-11
12	метод расходится	

Проведённый вычислительный эксперимент позволяет утверждать, что при большой размерности системы $n \geq 10$, с одним и тем же начальным приближением, наиболее эффективными оказались одношаговый метод неполного прогноза (10) и одношаговый метод полного прогноза (11).

Сравнение осуществлялось в рамках регуляризованного процесса, то есть вместо линейного уравнения (5) решается линейное уравнение:

$$(\alpha\beta_n\|f(x_n)\|^2 E+\overline{f'(x_n)}f'(x_n))\Delta x_n=-\overline{f'(x_n)}f(x_n), \alpha\in\left[10^{-6},10^{-3}\right], \beta_0\in\left[10^{-4},10^{-1}\right] \quad (13)$$

На данной нелинейной задаче можно утверждать, что среди методов регуляризованные, где первый шаг задаётся формулой (13), и их аналоги являются более эффективными, чем нерегуляризованные, где первый шаг задаётся формулой (5).

Литература

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. — Брест: Изд-во БрГУ, 2005. — 184 с.

2. Вержбицкий, В.М. Численные методы / В.М. Вержбицкий. — 2-е изд., перераб. — М.: Высшая школа, 2005. — 840 с.: ил.

3. Амосов, А.А. Вычислительные методы для инженеров / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копчёнова.— Учеб. пособ.— М.: Высшая школа, 1994. — 544 с.: ил.

4. Березин, И.С. Методы вычислений. Т. 1 / И.С. Березин, Н.П. Жидков. — М.: Наука, 1966. — 630 с.

5. Ермаков, В.В. Оптимальный шаг и регуляризация в методе Ньютона / В.В. Ермаков, Н.Н. Калиткин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.— 1992. — Т.32, №1. — С. 3—12.

6. Мадорский, В.М. Локализация решений нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. // Изв. АН БССР. - Сер. физ.-мат. наук. — 1987. №2. - С. 113—115.

7. Бахвалов,Н.С. Численные методы./Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков – М.:Наука,1987. – 630с.