ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ В СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ

Савчук М. А.

Белорусский государственный технологический университет, г. Минск

Проведение различного рода испытаний и экспериментов является непременным условием развития науки и прогресса прикладных областей деятельности. При этом часто встречаются задачи, в которых представляет интерес вероятность числа наступления некоторого события A в многократно повторяющихся при данном комплексе условий испытаниях. Например, мобильный оператор А обслуживает 10000 абонентов, каждый из которых в наиболее напряженные часы разговаривают в среднем 2 минуты. Какова вероятность того, что в некоторый момент времени услугами оператора А пользуется не менее 300 абонентов.

Если вероятность наступления события A в каждом испытании не меняется в зависимости от исходов других, то такие испытания называются независимыми относительно события A. Если независимые повторные испытания проводятся при одном и том же комплексе условий, то вероятность наступления события A в каждом испытании одна и та же. Такая последовательность независимых испытаний называется схемой Бернулли.

Пусть μ – число наступлений события A в n испытаниях, тогда вероятность $P_n(\mu = m)$ вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(\mu = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } \quad q = 1 - p, \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{1}$$

$$P_n(\mu \geq k) = \sum_{m \geq k} C_n^m p^m q^{n-m} \tag{2}$$

В нашем примере, несколько упрощая реальную ситуацию, можно считать, что в данный момент времени звонки различных абонентов независимы, и каждый абонент использует услуги связи с вероятностью $1/30$. Однако вычисления по формуле (2) затруднительны из-за большого значения n.

На практике при больших n используют асимптотические формулы Пуассона и Муавра-Лапласа. Как правило, в учебниках даются рекомендации о том, когда допустимо применение этих формул. Так, в [1] условиями использования формулы Пуассона являются: n велико и $np \leq 10$, а условиями использования формулы Муавра-Лапласа: n велико, p мало и $npq \geq 20$; В.П. Чистяков [3] предлагает для формулы Пуассона $n > 100, np < 30$, а для формулы Муавра-Лапласа $n > 100, npq > 20$. Есть и ряд других рекомендаций, например, для формулы Пуассона $n \geq 50, np \leq 10$ или $np \approx npq$. Таким образом, эти рекомендации носят приблизительный характер.

Для исследования точности приближения по формуле Пуассона, сравним значения вероятности $P_n(\mu = m)$, рассчитанные по формулам Бернулли и Пуассона для различных значений n и p, таких что $np = a$. На рис.1 показана зависимость $P_n(\mu = m)$ от m, $0 \leq m \leq 10$. Вероятности $P_n(\mu = m)$ рассчитаны по формуле Пуассона с параметром $a = 3$ и формуле Бернулли $n = 10, p = 0.3; n = 30, p = 0.1; n = 60, p = 0.05; n = 100,$ $p = 0.02; n = 150, p = 0.02$ (во всех случаях $np = 3$). Абсолютная погрешность $\Delta = |P_n(\mu = m) - \Pi(m)|$ (где $\Pi(m) \approx \frac{a^m e^{-a}}{m!}$) принимает максимальное значение, когда $m = 3$ и , как показывают расчеты, становится меньше 0.01 при $n > 35$; $\Delta < 0.001$ при $n > 340$. Таким образом, при всех случаях $np = 3$, которые удовлетворяет рекомендациям всех авторов, формула Пуассона дает достаточно хорошее приближение уже при $n > 35$. Если рассмотреть граничный случай $np = 10$ (см. рис.2), то ошибка Δ становится меньше 0.01 только при $n > 65$; $\Delta < 0.001$ при $n > 635$. При этом также ошибка максимальна для $m \approx np$.

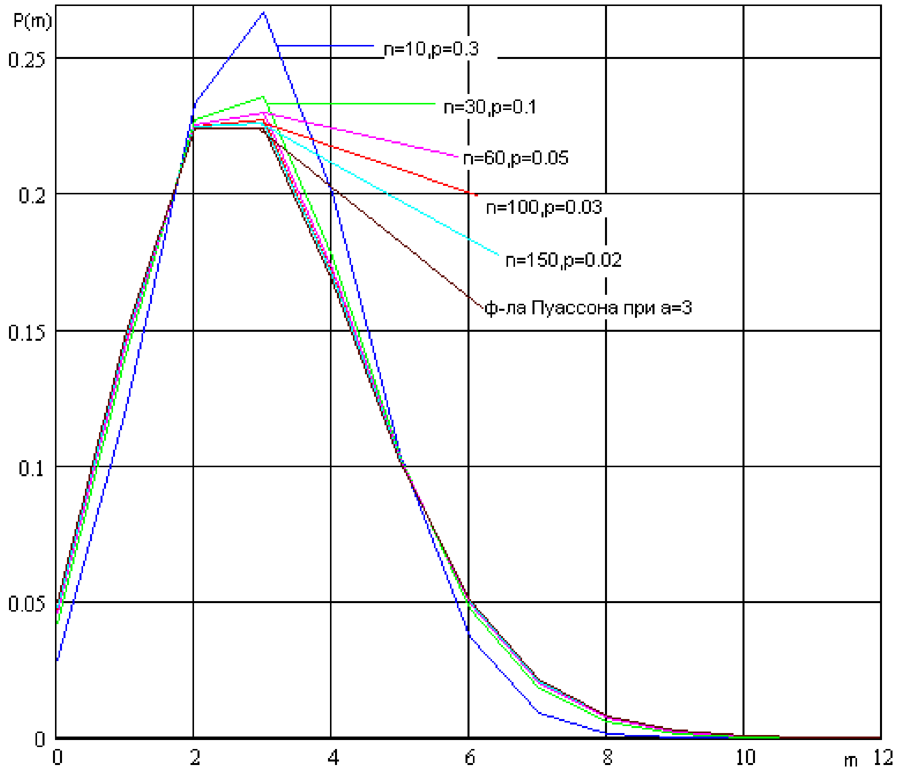

Рис.1. Сравнение вычислений по формулам Бернулли и Пуассона при $a = np = 3$

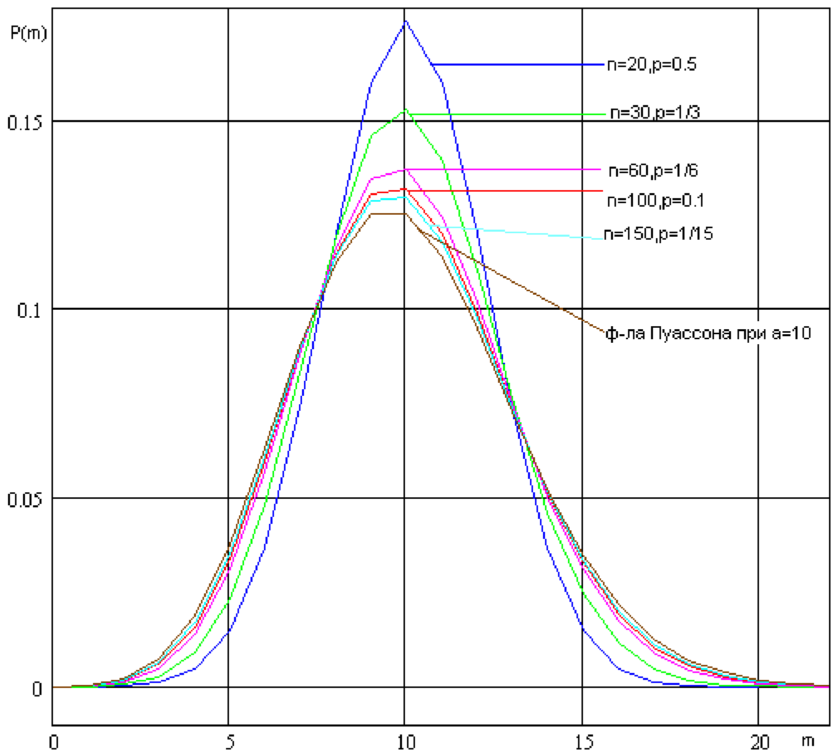

Рис.2. Сравнение вычислений по формулам Бернулли и Пуассона при $a = np = 10$

Аналогичные вычисления для $P_n(\mu \geq k)$ при $a=3$ показывают, что ошибка Δ принимает максимальное значение тоже при $k \approx np$, но $\Delta < 0.01$ при $n > 45$, а $\Delta < 0.001$ при $n > 450$, т.е. хорошее приближение достигается при больших значениях n,чем в случае расчета вероятностей $P_n(\mu = m)$.

Теперь проведем сравнение вычисления вероятностей $P_n(\mu = m)$ для $m \in (np - \sqrt{npq}; np + \sqrt{npq})$ по формуле Бернулли и Муавра-Лапласа.

$n=30$		$n=60$		$n=100$		$n=150$	
m	Δ	m	Δ	m	Δ	m	Δ
$p=0.1$							
2	0.026	4	0.015	7	0.008	11	0.005
3	0.007	6	-0.002	10	-0.001	15	0.0006
4	0.025	8	-0.012	13	-0.006	19	$-7.4*10^{-5}$
$p=0.3$							
7	0.006	15	0.003	26	$-7.9*10^{-7}$	40	$-1.8*10^{-13}$
9	-0.0016	18	$-2.9*10^{-7}$	30	$-2.6*10^{-5}$	45	$-2.6*10^{-11}$
11	-0.005	21	$-1.4*10^{-5}$	34	$4.3*10^{-11}$	50	$6.2*10^{-9}$
$p=0.5$							
12	0.0006	26	$2.3*10^{-9}$	45	$3.8*10^{-17}$	69	$1.8*10^{-23}$
$n=30$		$n=60$		$n=100$		$n=150$	
m	Δ	m	Δ	m	Δ	m	Δ
$p=0.5$							
15	-0.001	30	$2.1*10^{-6}$	50	$1*10^{-13}$	75	$-9*10^{-33}$
18	$4.5*10^{-8}$	34	$9.6*10^{-15}$	55	$1.5*10^{-23}$	81	$-1.1*10^{-28}$

Как видно из таблицы, абсолютная погрешность Δ уменьшается с ростом n и p. Расчеты показывают, что абсолютная погрешность уменьшается с ростом n и становится меньше 0.001 при $n \geq 800$, если $p = 0.1$ ($npq = 72$); при $n \geq 180$, если $p = 0.3$ ($npq = 72.8$); при $n \geq 36$, если $p = 0.5$ ($npq = 9$); и меньше 0.01 при $n \geq 90$, если $p = 0.1$ ($npq = 8.1$); при $n \geq 20$, если $p = 0.3$ ($npq = 4.2$); при $n \geq 13$, если $p = 0.5$ ($npq = 3.25$). Таким образом, точность 0.01 достигается даже при достаточно малых значениях npq. Аналогично вычислениям для $P_n(\mu \geq k)$ показывают что точность приближения достигает значения меньше 0.01 по сравнению со случаем $P_n(\mu = m)$ при больших значениях npq: при $n \geq 110$, если $p = 0.1$ ($npq = 9.9$); при $n \geq 32$, если $p = 0.3$ ($npq = 6.72$); при $n \geq 17$, если $p = 0.5$ ($npq = 4.25$).

Вернемся к примеру. Число испытаний $n = 10000$ велико, и вероятность успеха в каждом испытании (вероятность того, что абонемент использует связь в данный момент) $p = 1/30$ очень мала. Это хорошие условия для использования формулы Пуассона, но $np = 1000/3000$ велико, следовательно, рекомендуется использование формулы Муавра-Лапласа. Выполнив расчеты на компьютере с помощью формул Бернулли, Пуассона и Муавра-Лапласа, получим для вероятности $P_{10000}(\mu \geq 300)$ значения соответственно 0.9718, 0.9697, 0.9721. Таким образом, обе формулы дают хорошее приближение.

Рассмотрим теперь задачу, представляющую практический интерес. Какое количество линий N необходимо оператору А, чтобы при нормальных условиях эксплуатации вероятность перегрузки сети была меньше 0.01, т.е. $P = P_{10000}(\mu \geq N) < 0.01$. Используя формулы Бернулли, получим при $N = 377$ $P = 0.0089$, по формуле Муавра-Лапласа при $N = 377$ $P = 0.0087$;и по формуле Пуассона при $N = 378$ $P = 0.0087$, т.е. достаточно 378 линий. Итак, в этой задаче обе асимптотические формулы дают хорошее приближение.

Литература

[1] Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 543с.
[2] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2-х тт. Т.1. – М.: Мир, 1967. – 498с.
[3] Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Высшая школа, 1975. – 272с.

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА И ЕГО УТОЧНЕНИИ

Старовойтов Р.С., Харько Ю.Г., Тимофеев А.Э.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест

При всех достоинствах метод Галёркина обладает тем существенным на современном этапе формализации прикладных исследований недостатком, что в “чистом” виде он малопригоден для автоматизированных компьютерных вычислений. Однако при подходящем выборе базисных функций φ_i в представлении приближённого решения $y_n(x)$, связанных с определённой на отрезке [a,b] системой точек (сеткой), метод Галёркина трансформируется в сугубо численный процесс получения каркаса приближённого решения на заданной сетке, причём технология построения этого каркаса в конечном итоге оказывается близкой к той, которая присуща методу конечных разностей. Отсюда название такого численного процесса, как проекционно-разностный или проекционно-сеточный метод. Другое его, более раннее и более употребительное, название - метод конечных элементов. (МКЭ или FEM от англ. Finite element method).

Рассмотрим задачу Дуффинга:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x + \gamma x^n = f(t) \\ &x = x(t) \quad t \in [a,b] \\ &x(a) = A \quad x(b) = Bx(a) = A \quad x(b) = B \end{aligned} \tag{1}$$

Введём равномерную сетку на отрезке [a,b] с шагом $h = \dfrac{b-a}{n+1}$, состоящую из n внутренних точек x_i =a+in. (i=1,2,…,n) и двух крайних точек x_0=a , x_{n+1}=b.

Будем искать приближённое решение $y_n(x)$ данной краевой задачи в виде линейной комбинации простых однотипных функций $\varphi_i(x)$, на роль которых возьмем так называемые ***финитные функци,*** определяемые равенством:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1-|t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$