но $0.9718,\quad 0.9697,\quad 0.9721$. Таким образом, обе формулы дают хорошее приближение.

Рассмотрим теперь задачу, представляющую практический интерес. Какое количество линий N необходимо оператору А, чтобы при нормальных условиях эксплуатации вероятность перегрузки сети была меньше 0.01, т.е. $P = P_{10000}(\mu \geq N) < 0.01$. Используя формулы Бернулли, получим при $N = 377$ $P = 0.0089$, по формуле Муавра-Лапласа при $N = 377$ $P = 0.0087$;и по формуле Пуассона при $N = 378$ $P = 0.0087$, т.е. достаточно 378 линий. Итак, в этой задаче обе асимптотические формулы дают хорошее приближение.

Литература

[1] Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 543с.

[2] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2-х тт. Т.1. – М.: Мир, 1967. – 498с.

[3] Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Высшая школа, 1975. – 272с.

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА И ЕГО УТОЧНЕНИИ

Старовойтов Р.С., Харько Ю.Г., Тимофеев А.Э.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест

При всех достоинствах метод Галёркина обладает тем существенным на современном этапе формализации прикладных исследований недостатком, что в “чистом” виде он малопригоден для автоматизированных компьютерных вычислений. Однако при подходящем выборе базисных функций φ_i в представлении приближённого решения $y_n(x)$, связанных с определённой на отрезке [a,b] системой точек (сеткой), метод Галёркина трансформируется в сугубо численный процесс получения каркаса приближённого решения на заданной сетке, причём технология построения этого каркаса в конечном итоге оказывается близкой к той, которая присуща методу конечных разностей. Отсюда название такого численного процесса, как проекционно-разностный или проекционно-сеточный метод. Другое его, более раннее и более употребительное, название - метод конечных элементов. (МКЭ или FEM от англ. Finite element method).

Рассмотрим задачу Дуффинга:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x + \gamma x^n = f(t) \\ &x = x(t) \quad t \in [a,b] \\ &x(a) = A \quad x(b) = Bx(a) = A \quad x(b) = B \end{aligned} \tag{1}$$

Введём равномерную сетку на отрезке [a,b] с шагом $h = \dfrac{b-a}{n+1}$, состоящую из n внутренних точек x_i =a+in. (i=1,2,…,n) и двух крайних точек x_0=a , x_{n+1}=b.

Будем искать приближённое решение $y_n(x)$ данной краевой задачи в виде линейной комбинации простых однотипных функций $\varphi_i(x)$, на роль которых возьмем так называемые ***финитные функци,*** определяемые равенством:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1-|t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

Считая переменную *x,* принадлежащей отрезку [a,b] и полагая $t=\frac{x-x_i}{h}$, видим, что при $|t|<h$ *имеем, что* $x_i-h<x<x_i+h$.

φ(x) отлична от нуля лишь на интервале $(x_{i-1},\ x_{i+1})$ с центром в точке x_i.

Таким образом, разные узлы x_i рассматриваемой сетки определяют разные функции $\varphi_i(x)$, которые можно задать неравенствами

$$\varphi_i=\begin{cases}1+\dfrac{x-x_i}{h}=\dfrac{x-x_{i-1}}{h}, & \text{если } x\in[x_{i-1},x_i]\\ 1-\dfrac{x-x_i}{h}=-\dfrac{x-x_{i+1}}{h}, & \text{если } x\in[x_i,x_{i+1}]\\ 0, & \text{если } x\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\end{cases}$$

Итак, пусть ищется приближенное решение наиболее простой краевой задачи для дифференциального уравнения, а именно - с однородными краевыми условиями первого рода

y(a)=0, y(b)=0.

Приближенное решения ищем в виде:

$$y_n(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x)$$

С кусочно-линейными базисными функциями $\varphi_i=\varphi_i(x)$ для подсчета коэффициентов c_i, согласно методу Галёркина, нужно составить линейную алгебраическую систему $\sum_{j=1}^{n}c_i a_{ij}(x)=d_i \quad i=\overline{1,n}$. Её правая часть имеет вид:

$$d_i=\int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx=\sum_{k=0}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)\varphi_i(x)dx=\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\frac{x-x_{i-1}}{h}dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\left(-\frac{x-x_{i+1}}{h}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{h}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)(x-x_{i-1})dx-\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)(x-x_{i+1})dx\right]$$

Так как при краевых условиях используются *n* базисных функций с φ_1 по φ_n, и все они в точках *a и b* равны нулю, то формула для вычисления элементов a_{ij} матрицы галёркинской СЛАУ здесь имеет вид

$$a_{i,j}=-\int_a^b\varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx+\int_a^b p(x)\varphi_j'(x)\varphi_i(x)dx+\int_a^b q(x)\varphi(x)\varphi(x)dx=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[-\varphi_j'(x)\varphi_i'(x)+p(x)\varphi_j'(x)\varphi_i(x)+q(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)\right]dx$$

Конкретизируем формулы для вычисления ненулевых элементов матрицы А. Полагая в *j = i,* получаем формулу для вычисления диагональных элементов:

$$a_{ii}=-\frac{2}{h}+\frac{1}{h^2}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}p(x)(x-x_{i-1})dx+\int_{x_{i-1}}^{x_i}q(x)(x-x_{i-1})^2dx+\right.$$
$$\left.+\int_{x_i}^{x_{i+1}}p(x)(x-x_{i+1})dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}}q(x)(x-x_{i+1})^2dx\right]$$

При j=i+1 находим выражения элементов правой побочной диагонали матрицы А

$$a_{i,i+1}==\frac{1}{h}-\frac{1}{h^2}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}}p(x)(x-x_{i+1})dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}}q(x)(x-x_i)(x-x_{i+1})dx\right],$$

а при j=i-1 - левой

$$a_{i,i-1} == \frac{1}{h} - \frac{1}{h^2}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)(x-x_{i-1})dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x-x_{i-1})(x-x_i)dx\right],$$

Сделаем лишь несколько замечаний.

Во-первых, находимая описанным способом функция *$y_n(x)$* представляет собой *кусочно-линейную аппроксимацию* точного решения *y(x)* краевой задачи, а совокупность значений коэффициентов c_1, ..., c_n играет роль *каркаса* приближенного решения *$y_n(x)$* на сетке x_1, ..., x_n, что хорошо видно в результате подстановки $x = x_j$ в приближённое решение :

$$y_n(x_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x_j) = c_j, \text{в силу } \varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, \text{ если } j = i \\ 0, \text{ если } j \neq i \end{cases}$$

Во-вторых, при вычислении ненулевых элементов матрицы $A = (a_{ij})$ линейной системы следует учитывать, что в формулах имеются одинаковые интегралы, что хотя бы незначительно сокращает затраты при численном интегрировании.

В-третьих, в данном случае галёркинскую систему алгебраических уравнений удобно представить как краевую задачу для трехточечного разностного уравнения второго порядка, т.е. в виде:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = d_1, \\ a_{i,i-1}c_{i-1} + a_{ii}c_i + a_{i,i+1}c_{i+1} = d_i \quad (i = 2,...,n-1), \\ a_{n,n-1}c_{n-1} + a_{nn}c_n = d_n \end{cases}$$

свидетельствующем о готовности системы к применению метода прогонки.

В четвертых, при неоднородных краевых условиях первого рода $y(a) = A, \quad y(b) = B$

можно воспользоваться приемом сведения к задаче:

$$\mathrm{L}[\mathrm{u}] = \mathrm{F(x)}, \text{где} \quad \mathrm{F(x)} = \mathrm{f(x)} - \mathrm{p(x)v'(x)} - \mathrm{q(x)v(x)}, \quad \mathrm{v(x)} = \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B-A}}{\mathrm{b-a}}(\mathrm{x-a}),$$

$$\text{с однородными условиями} \quad \mathrm{u(a)} = 0, \ \mathrm{u(b)} = 0.$$

Найдя МКЭ ее приближенное решение

$$\mathrm{u_n(x)} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{c_i}\varphi_{\mathrm{i}}(\mathrm{x}), \text{ получаем}$$

$$\mathrm{y(x)} \approx \mathrm{y_n(x)} := \mathrm{u_n(x)} + \nu(\mathrm{x})$$

При численном решении задачи Дюффинга методом конечных элементов, нами было получено приближенное решение, норма невязки на котором составляет 1е-3.

Данный результат удалось незначительно улучшить с помощью кусочно-полиномиальной аппроксимацией функции **y=f(x)**, в предположении, что аппроксимирующая функция **w(x)** составляется из отдельных многочленов невысокой степени, определённых каждый на своей части отрезка **[a;b].** Этот процесс позволяет легко находить коэффициенты из интерполяционных условий. Так, если заданы значения yi = f(xi), на системе узлов xi,

a ≤x0 ≤ x1≤…≤ xn ≤b,

и требуется аппроксимировать функции f(x),кусочно-полиномиальной функцией второго порядка ***W(x)*** вида

$$W(x)=\begin{cases} a_1x^2 + b_1x+c_1 \ \text{при} \ x\in [x_0,x_2] \\ a_2x^2 + b_2x+c_2 \ \text{при} \ x\in [x_2,x_4] \\ a_mx^2 + b_mx+c_m \ \text{при} \ x\in[x_{2m-2},x_{2m}] \end{cases},$$

то каждое звено кусочно-квадратической функции ***W(x)***, при n=2m на заданной системе узлов, определяет тройку коэффициентов **ak,bk,ck** (k=1,2…m),которые могут быть найдены последовательным решением трехчленных систем:

$$\begin{cases} a_k x^2_{2k-2} + b_k x_{2k-2} + c_k = y_{2k-2} \\ a_k x^2_{2k-1} + b_k x_{2k-1} + c_k = y_{2k-1} \\ a_k x^2_{2k} + b_k x_{2k} + c_k = y_{2k} \end{cases},$$

полученных при использовании интерполяционных условий, где **xi** и **yi** заведомо известны из приближения в МКЭ.

В результате подстановки w(x) в исходную задачу получаем норму невязки на приближённом решении в соответствующих узлах. Как показывает практика, такая процедура позволяет говорить об улучшении точности решения приблизительно на порядок при хорошем вбрасывание точек. Таким образом, нами рассматривается способ приближения таблично заданных функций с помощью функций, заданных аналитично на большом числе отрезков разбиения промежутка **[a;b],** звеньями которых служат многочлены невысоких степеней.

Остаётся открытым вопрос о количествах уточнений. Для решаемой задачи уже после второго уточнения приходилось иметь дело с некорректными результатами, а именно - потеря определяющих узлов функции **y=f(x)**, что говорит о риске потерять важную информацию для таблично заданной функции.

Литература

1. Вержбицкий, В.М. Численные методы [Текст]. В 2 т. Т. 2. Линейная алгебра и нелинейные уравнения/В.М. Вержбицкий. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2005. – 432 с.: ил. – 5000 экз. – ISBN 5-329-01110-8.

ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В R^n НЕЛОКАЛЬНЫХ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Стрилец Н.Н.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест

В работе [1] для решения уравнения

$$f(x)=0,\ f:D\subset X\to X,\ X-B\text{-пространство} \quad (1)$$

рассматривается так называемый регуляризованный нелокальный квазиньютоновский итерационный метод, алгоритм реализации которого описывается индуктивным путем.

На нулевой итерации задан начальный набор параметров (x_0,β_0,γ_0), где $\beta_0\in[10^{-6},1],\ \gamma_0=\beta_0^2$.

На n-ой итерации $(n=0,1,2,\ldots)$ уже имеется набор параметров (x_n,β_n,γ_n), а очередной набор $(x_{n+1},\beta_{n+1},\gamma_{n+1})$ вычисляется в результате выполнения следующей последовательности шагов.