$$W(x)=\begin{cases} a_1x^2 + b_1x+c_1 & при \; x\in [x_0,x_2] \\ a_2x^2 + b_2x+c_2 & при \; x\in [x_2,x_4] \\ a_mx^2 + b_mx+c_m & при \; x\in [x_{2m-2},x_{2m}] \end{cases},$$

то каждое звено кусочно-квадратической функции ***W(x)***, при n=2m на заданной системе узлов, определяет тройку коэффициентов **ak,bk,ck** (k=1,2…m),которые могут быть найдены последовательным решением трехчленных систем:

$$\begin{cases} a_k x_{2k-2}^2 + b_k x_{2k-2} + c_k = y_{2k-2} \\ a_k x_{2k-1}^2 + b_k x_{2k-1} + c_k = y_{2k-1} \\ a_k x_{2k}^2 + b_k x_{2k} + c_k = y_{2k} \end{cases},$$

полученных при использовании интерполяционных условий, где **xi** и **yi** заведомо известны из приближения в МКЭ.

В результате подстановки w(x) в исходную задачу получаем норму невязки на приближённом решении в соответствующих узлах. Как показывает практика, такая процедура позволяет говорить об улучшении точности решения приблизительно на порядок при хорошем вбрасывание точек. Таким образом, нами рассматривается способ приближения таблично заданных функций с помощью функций, заданных аналитично на большом числе отрезков разбиения промежутка **[a;b]**, звеньями которых служат многочлены невысоких степеней.

Остаётся открытым вопрос о количествах уточнений. Для решаемой задачи уже после второго уточнения приходилось иметь дело с некорректными результатами, а именно - потеря определяющих узлов функции **y=f(x)**, что говорит о риске потерять важную информацию для таблично заданной функции.

Литература

1. Вержбицкий, В.М. Численные методы [Текст]. В 2 т. Т. 2. Линейная алгебра и нелинейные уравнения/В.М. Вержбицкий. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2005. – 432 с.: ил. – 5000 экз. – ISBN 5-329-01110-8.

ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В R^n НЕЛОКАЛЬНЫХ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Стрилец Н.Н.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест

В работе [1] для решения уравнения

$$f(x)=0,\; f:D\subset X\to X,\; X-B\text{-пространство} \tag{1}$$

рассматривается так называемый регуляризованный нелокальный квазиньютоновский итерационный метод, алгоритм реализации которого описывается индуктивным путем.

На нулевой итерации задан начальный набор параметров (x_0,β_0,γ_0), где $\beta_0\in[10^{-6},1],\; \gamma_0=\beta_0^2$.

На n-ой итерации $(n=0,1,2,\ldots)$ уже имеется набор параметров (x_n,β_n,γ_n), а очередной набор $(x_{n+1},\beta_{n+1},\gamma_{n+1})$ вычисляется в результате выполнения следующей последовательности шагов.

Шаг 1. Находится поправка из линейного уравнения

$$\left(\alpha\beta_n^2\|f(x_n)\|^2 E + \overline{f'(x_n)}f'(x_n)\right)\Delta x_n = -\overline{f'(x_n)}f(x_n),\ \alpha\in[10^{-6},10^{-3}], \tag{2}$$

где E – единичный оператор, а $\overline{f'(x)}$ – оператор, сопряженный производной Фреше $f'(x_n)$ оператора f.

Шаг 2. Следующее приближение вычисляется по формуле:

$$x_{n+1} := x_n + \beta_n \Delta x_n. \tag{3}$$

Шаг 3. Если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, где ε – точность, то выход из итерационного процесса, иначе переход к следующему шагу.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\beta_n = 1$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе

$$\beta_{n+1} := \min\left(1, \frac{\gamma_n\|f(x_n)\|}{\beta_n\|f(x_{n+1})\|}\right),\ \gamma_{n+1} := \frac{\gamma_n\|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|} \tag{4}$$

и осуществляется переход к следующей итерации.

Описанный процесс обозначим (2)–(4). Напомним, что он отличается от нерегуляризованного варианта из [2] только видом линейного уравнения, решаемого на первом шаге.

Всюду далее будем полагать $X = R^n$. Пусть также $F(x_n) = \overline{f'(x_n)}f'(x_n)$.

Суть регуляризации (2) заключается в том, что возмущение матрицы $F(x_n)$ вдали от корня сравнительно велико, а вблизи корня оно становится достаточно небольшим. Однако вычислительная практика показывает, что возмущение матрицы в (2) не всегда дает требуемый эффект в силу того, что величина $\|f(x_n)\|^2$, входящая в возмущение, часто имеет порядок меньший по сравнению с диагональными элементами матрицы $F(x_n)$. Поэтому для эффективного вычисления поправки Δx_n в таких случаях более разумным будет возмущать каждый диагональный элемент матрицы $F(x_n)$ величиной одного порядка с ним. В связи с этим в данной работе предлагается регуляризации вида

$$\left(R(x_n) + F(x_n)\right)\Delta x_n = -\overline{f'(x_n)}f(x_n), \tag{5}$$

где $R(x_n) = \alpha\beta_n^4 \min\left(1, \|f(x_n)\|^2\right)\cdot diag(F(x_n))$ ($diag(M)$ – диагональная матрица, составленная из элементов главной диагонали матрицы M).

Процесс, полученный из процесса (2)–(4) заменой уравнения (2) на уравнение (5), обозначим (5),(3),(4).

Относительно операторов $f \in C_D^2,\ f'(x),\ f''(x),\ R(x_n)$ сделаем следующие предположения:

$$\|f'(x)\| \le A,\ \left\|[f'(x)]^{-1}\right\| \le B,\ \|f''(x)\| \le K,\ \forall x\in D. \tag{6}$$

$$\left\|[R(x_n) + F(x_n)]^{-1}\right\| \le C,\ \forall x\in D,\ \forall\alpha\in[10^{-6},10^{-3}],\ \forall\beta\in[10^{-6},1]. \tag{7}$$

Теорема. Пусть оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям (6),(7), в шаре $D = S(x_0, r)$ существует x^* – решение уравнения (1), начальное приближение x_0 и параметры α, β_0 таковы, что выполняется условие $\xi_0 < 1$. Тогда процесс (5),(3),(4) сходится к x^*. Здесь $r = \dfrac{2\beta_0 AC\|f(x_0)\|}{(1-q_0)}$, $\xi_0 = \beta_0 A^2 C(\alpha\beta_0^3 AB + 0.5CK\|f(x_0)\|)$, $q_0 = (1 - \beta_0(1-\xi_0))$.

Доказательство. Так как $f \in C_D^2$, то из теоремы о среднем [3], с учетом (3) и (6), вытекает оценка:

$$\| f(x_{n+1}) - f(x_n) - \beta_n f'(x_n)\Delta x_n \| \le 0.5\beta_n^2 K \|\Delta x_n\|^2 . \quad (8)$$

Из (5) и (6) следует соотношение

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n) - \left[\overline{f'(x_n)}\right]^{-1} R(x_n)\Delta x_n . \quad (9)$$

Для Δx_n из (5)–(7) имеем оценку

$$\|\Delta x_n\| \le AC \| f(x_n)\| . \quad (10)$$

Тогда, с учетом (6), (8)–(10), получим оценку для $\| f(x_{n+1})\|$:

$$\begin{aligned} \| f(x_{n+1})\| &\le (1-\beta_n)\| f(x_n)\| + \beta_n \left\| \left[\overline{f'(x_n)}\right]^{-1} \right\| \|R(x_n)\| \|\Delta x_n\| + 0.5\beta_n^2 K \|\Delta x_n\|^2 \le \\ &\le (1-\beta_n(1-\xi_n))\| f(x_n)\| = q_n \| f(x_n)\| . \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\xi_n = \beta_n A^2 C(\alpha\beta_n^3 AB + 0.5CK\| f(x_n)\|),\ q_n = (1-\beta_n(1-\xi_n))$.

Пусть $\beta_m \ne 1$. Тогда $\forall k,\ k = \overline{2,m}$ из (4) нетрудно получить соотношение:

$$\beta_k \| f(x_k)\| = \beta_{k-2}\| f(x_{k-1})\|,\ k = \overline{2,m} . \quad (12)$$

Пусть начальное приближение x_0 и параметры $\alpha,\ \beta_0$ таковы, что $\xi_0 < 1$. Тогда, с учетом (11) и (12), индуктивным путем получим:

$$\beta_n > \beta_{n-2},\ \xi_n < \xi_{n-2},\ q_n < q_{n-2} < 1,\ n = \overline{2,m} . \quad (13)$$

Тогда из (4), (11) и (13) следует существование $m \in N$ такого, что $\beta_m \ne 1,\ \beta_{m+1} = 1$. Тогда, согласно построению алгоритма, $\forall k \ge m+1,\ \beta_k = 1$.

При $n = m$ из (4) нетрудно получить соотношение:

$$\| f(x_{m+1})\| \le \beta_{m-1}\| f(x_m)\| . \quad (14)$$

Далее с учетом (11), (13) и (14) индуктивным путем получим:

$$\beta_{n+1} = \beta_n = 1 > \beta_{m-1},\quad \xi_{n+1} < \xi_n < \xi_{m-1},\quad q_{n+1} < q_n < q_{m-1} < 1,\quad n = m+1, m+2, \ldots \quad (15)$$

Из (11), (13) и (15) следует оценка:

$$\| f(x_{n+1})\| \le \prod_{i=0}^{n} q_i \cdot \| f(x_0)\| < q_0^{n+1} \| f(x_0)\| . \quad (16)$$

Тогда из (10)–(15) получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\le \sum_{k=n}^{n+p-1} \|x_{k+1} - x_k\| = \sum_{k=n}^{n+p-1} \beta_k \|\Delta x_k\| \le AC \sum_{k=n}^{n+p-1} \beta_k \| f(x_k)\| < \\ &< 2\beta_0 AC \| f(x_0)\| q_0^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{k=0}^{\infty} q_0^k < 2\beta_0 AC \| f(x_0)\| \frac{q_0^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{1-q_0} . \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17) следует фундаментальность последовательности $\{x_n\}$. В силу полноты пространства X последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу $x^* \in X$. Тогда, с учетом (16), в силу непрерывности оператора f и единственности предела, получим, что x^* – корень уравнения (1). Таким образом, доказана сильная сходимость приближений $\{x_n\}$ к x^*. Отметим, что из (11) следует сверхлинейная скорость сходимости процесса (5),(3),(4), как только β_n достигнет 1. Из (17) при $n=0,\ p\in N$ также следует, что все $x_p \in D$. Оценка погрешности n-го приближения получается при переходе к пределу в (17) при $p \to \infty$. **Теорема доказана.**

В качестве тестовых систем для численных экспериментов были взяты тригонометрическая система из [4]

$$n - \sum_{j=1}^{n} (\cos x_j + i(1-\cos x_i) - \sin x_i) = 0,\ \ i = \overline{1,n}$$

и комбинированная система из [1]

$$\begin{cases} x_i + \sum_{j=1}^{n} x_j = n+1,\ \ i=\overline{1,n-3}, \\ x_1 x_2 \ldots x_{n-3} x_{n-2} x_{n-1} x_n = 1, \\ \sin^2 x_1 + \cos^3 x_n = \sin^2 1 + \cos^3 1, \\ arctg x_1 + arctg x_n = 2arctg 1. \end{cases}$$

Результаты численных экспериментов говорят о том, что использование регуляризации (5) вместо (2) в ряде случаев может существенно повысить процент сходимости итерационного метода. В этом смысле оба варианта регуляризации можно трактовать как дополняющие друг друга.

Литература

1. Мадорский В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений. - Брест, 2005.

2. Мадорский В.М., Стрилец Н.Н. Об эффективных методах получения приближенных решений нелинейных дифференциальных задач. Труды Института математики. 2004, Т. 12, №2. С. 130–132.

3. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. - М.: Мир, 1975.

4. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. - М.: Мир, 1988.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНЫХ РЕШЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ДЕЛЬТОИДНОЙ ЗАДАЧИ ПЯТИ ТЕЛ

Фетисова С.А., Гребенников Е.А.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест

Ньютонова ограниченная задача многих тел - одна из самых известных моделей классической механики, математики и астрономии. Дифференциальные уравнения этой задачи неинтегрируемы, что приводит к необходимости использования компьютерных технологий для нахождения точных частных решений (см. [1]). Важное место среди них занимает ССВ *Mathematica* [2], с помощью которой выполнялись все расчеты.