Из (17) следует фундаментальность последовательности $\{x_n\}$. В силу полноты пространства X последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу $x^* \in X$. Тогда, с учетом (16), в силу непрерывности оператора f и единственности предела, получим, что x^* – корень уравнения (1). Таким образом, доказана сильная сходимость приближений $\{x_n\}$ к x^*. Отметим, что из (11) следует сверхлинейная скорость сходимости процесса (5),(3),(4), как только β_n достигнет 1. Из (17) при $n=0,\ p\in N$ также следует, что все $x_p \in D$. Оценка погрешности n-го приближения получается при переходе к пределу в (17) при $p \to \infty$. **Теорема доказана.**

В качестве тестовых систем для численных экспериментов были взяты тригонометрическая система из [4]

$$n-\sum_{j=1}^{n}(\cos x_j + i(1-\cos x_i) - \sin x_i) = 0,\ i=\overline{1,n}$$

и комбинированная система из [1]

$$\begin{cases} x_i + \sum_{j=1}^{n} x_j = n+1,\ i=\overline{1,n-3}, \\ x_1 x_2 \ldots x_{n-3} x_{n-2} x_{n-1} x_n = 1, \\ \sin^2 x_1 + \cos^3 x_n = \sin^2 1 + \cos^3 1, \\ arctgx_1 + arctgx_n = 2arctg1. \end{cases}$$

Результаты численных экспериментов говорят о том, что использование регуляризации (5) вместо (2) в ряде случаев может существенно повысить процент сходимости итерационного метода. В этом смысле оба варианта регуляризации можно трактовать как дополняющие друг друга.

Литература

1. Мадорский В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений. - Брест, 2005.

2. Мадорский В.М., Стрилец Н.Н. Об эффективных методах получения приближенных решений нелинейных дифференциальных задач. Труды Института математики. 2004, Т. 12, №2. С. 130–132.

3. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. - М.: Мир, 1975.

4. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. - М.: Мир, 1988.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНЫХ РЕШЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ДЕЛЬТОИДНОЙ ЗАДАЧИ ПЯТИ ТЕЛ

Фетисова С.А., Гребенников Е.А.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест

Ньютонова ограниченная задача многих тел - одна из самых известных моделей классической механики, математики и астрономии. Дифференциальные уравнения этой задачи неинтегрируемы, что приводит к необходимости использования компьютерных технологий для нахождения точных частных решений (см. [1]). Важное место среди них занимает ССВ *Mathematica* [2], с помощью которой выполнялись все расчеты.

Пусть четыре массивных тела P_0, P_1, P_2, P_3 равномерно вращаются вокруг оси $0z$ инерциальной барицентрической системы координат с постоянной угловой скоростью ω, образуя в любой момент времени дельтоид, плоскость которого совпадает с плоскостью $0xy$. Существование соответствующих точных решений задачи четырех тел доказано в работе [3]. Пусть пятое тело P_4, масса которого пренебрежимо мала, движется в гравитационном поле, генерируемом телами P_0, P_1, P_2, P_3. Отметим, что дифференциальные уравнения движения этого тела существенно нелинейны, и найти их общее решение не представляется возможным. Поэтому задача состоит в том, чтобы найти равновесные решения и исследовать их устойчивость. Начало таким исследованиям было положено в предыдущей работе [4], где были найдены равновесные положения тела P_4 и исследована их устойчивость при некоторых значениях параметров модели. Целью данной работы является исследование устойчивости равновесных решений при таких значениях параметров, при которых устойчива сама конфигурация в форме дельтоида.

Используя относительные координаты и переходя во вращающуюся вокруг оси $0z$ систему координат, в которой тело P_0 покоится в начале координат, запишем дифференциальные уравнения движения системы *n* тел в виде [2,3]:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_j}{dt^2} - 2\dfrac{dy_j}{dt} + \dfrac{G(m_0+m_j)}{\omega^2}\dfrac{x_j}{r_i^3} = x_j - \dfrac{G}{\omega^2}\sum\limits_{k=1(k\neq j)}^{n} m_k\left(\dfrac{x_j-x_k}{r_{jk}^3} + \dfrac{x_k}{r_k^3}\right), \\ \dfrac{d^2y_j}{dt^2} + 2\dfrac{dx_j}{dt} + \dfrac{G(m_0+m_j)}{\omega^2}\dfrac{y_j}{r_i^3} = y_j - \dfrac{G}{\omega^2}\sum\limits_{k=1(k\neq j)}^{n} m_k\left(\dfrac{y_j-y_k}{r_{jk}^3} + \dfrac{y_k}{r_k^3}\right), \end{cases} \quad (1)$$

$$r_j^2 = x_j^2 + y_j^2,\ r_{jk}^2 = \left(x_j - x_k\right)^2 + \left(y_j - y_k\right)^2,$$

где *G* - гравитационная постоянная, m_0, m_j $\left(j = 1, 2, ..., n\right)$ – массы тел.

При $n=4$ и $m_4=0$ система (1) распадается на две независимые подсистемы, первая из которых содержит шесть уравнений и описывает движение тел P_1, P_2, P_3 в плоскости *Oxy*, а вторая определяет движение пятого тела P_4 в гравитационном поле остальных четырех тел. При $m_1 = m_2$ первая подсистема имеет решение вида:

$$x_1 = -x_2 = X,\ x_3 = 0,\ y_1 = y_2 = aX,\ y_3 = bX, \quad (2)$$

где *X* - масштабный множитель, а безразмерные параметры *a*, *b* определяют форму конфигурации. При $b > a$ решение (2) соответствует дельтоидной конфигурации тел P_0, P_1, P_2, P_3. Вводя безразмерные параметры $\mu_1 = m_1/m_0 = m_2/m_0$, $\mu_2 = m_3/m_0$ и подставляя решение (2) в первую подсистему системы (1), получаем только три независимых уравнения, которые и определяют параметры *a, b,* ω при заданных значениях μ_1, μ_2 (см. [3, 4]).

В работе [5] был проведен анализ устойчивости дельтоидной конфигурации в плоской ньютоновой задаче четырех тел P_0, P_1, P_2, P_3 в линейном приближении. Показано, что на плоскости параметров $0\mu_1\mu_2$ существует лишь небольшая область, для значений параметров μ_1, μ_2, из которой дельтоидная конфигурация является устойчивой в линейном приближении.

Уравнения, определяющие движение тела P_4 в плоскости *Oxy*, получаются из (1) при *j=4* и $m_4=0$. Равновесным положениям тела P_4 соответствуют постоянные значения координат x_4 и y_4, которые могут быть найдены как решения следующей системы двух уравнений:

$$\begin{cases} x_4 = \dfrac{1}{\omega^2}\left(\dfrac{x_4}{\left(x_4^2+y_4^2\right)^{3/2}} + \mu_1\left(\dfrac{x_4-1}{\left((x_4-1)^2+(y_4-a)^2\right)^{3/2}} + \dfrac{x_4+1}{\left((x_4+1)^2+(y_4-a)^2\right)^{3/2}} \right) + \right. \\ \left. + \dfrac{\mu_2 x_4}{\left(x_4^2+(y_4-b)^2\right)^{3/2}} \right), \\ y_4 = \dfrac{1}{\omega^2}\left(\dfrac{y_4}{\left(x_4^2+y_4^2\right)^{3/2}} + 2\mu_1\left(\dfrac{2(y_4-a)}{\left((x_4-1)^2+(y_4-a)^2\right)^{3/2}} + \dfrac{a}{\left(1+a^2\right)^{3/2}} \right) + \right. \\ \left. + \mu_2\left(\dfrac{y_4-b}{\left(x_4^2+(y_4-b)^2\right)^{3/2}} + \dfrac{1}{b^2} \right)\right). \end{cases} \tag{3}$$

Система (3) существенно нелинейна, и может быть проанализирована только численно. Соответствующий анализ при различных значениях параметров μ_1, μ_2 из области устойчивости дельтоидной конфигурации с применением системы *Mathematica* [2] показал, что в плоскости *Oxy* существует четыре пары симметричных относительно оси *Oy* равновесных положений тела P_4, и три равновесных положения на оси *Oy*. Таким образом, всего имеется 11 равновесных решений системы (3).

Уравнения возмущенного движения тела P_4 в окрестности каждого из равновесных решений в линейном приближении могут быть представлены в виде:

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x, \tag{4}$$

где вектор *x* имеет компоненты $x = \left(x_4, y_4, \dfrac{dx_4}{dt}, \dfrac{dy_4}{dt} \right)$, *A* - квадратная матрица четвертого порядка. Численный анализ системы (4) с применением системы *Mathematica* [2] показал, что устойчивыми в линейном приближении являются только два из одиннадцати равновесных решений системы (3). При этом устойчивость наблюдается лишь при значениях параметров μ_1, μ_2 из небольшой области на плоскости $0\mu_1\mu_2$, которая является подобластью области линейной устойчивости самой дельтоидной конфигурации четырех тел P_0, P_1, P_2, P_3. Остальные девять равновесных решений неустойчивы при любых значениях параметров μ_1, μ_2.

Литература

1. Гребеников, Е.А. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел / Е.А. Гребеников, Д. Козак-Сковородкина, М. Якубяк. - М.: Изд-во РУДН, 2002. - 209 с.

2. Wolfram, S. The Mathematica book / S. Wolfram. - Wolfram Media/Cambridge Univ. Press, 1999. - 1470 p.
3. Прокопеня, А.Н. О симметричных гомографических решениях ньютоновой задачи четырех тел / А.Н. Прокопеня // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры: материалы междунар. конф. DE&CAS'2005, Брест, 5-8 окт. 2005г.: в 2 ч. / БГПУ; редкол.: И.В. Гайшун [и др.]. - Минск, 2005. - Ч. 1. - С. 321-327.
4. Fetisova, S. On the Newtonian deltoid problem/ S. Fetisova, E.A. Grebenikov// Computer Algebra Systems in Teaching and Research: proc. of the 4th International Workshop CASTR'2007, Siedlce, Poland, Jan. 31 - Feb. 3, 2007/ University of Podlasie; Eds.: L. Gadomski [and others].- Siedlce, 2007.- P.112-116.
5. Фетисова, С.А. Об устойчивости дельтоидной конфигурации четырех тел / С.А. Фетисова // Инновационные технологии управления в экономике'2007: материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 24-25 апр. 2007 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина; под общ. ред. канд. физ.-мат. наук С.А. Тузика; редкол.: В.Я. Асанович [и др.]. – Брест, 2007. – С.152.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ СЕТОЧНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

А.П. Худяков, В.М. Мадорский
Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина, г. Брест

При решении краевых задач разностными методами получается достаточно точный каркас решения, так как мы можем использовать большое число точек аппроксимации производных по методу МНК. Второй важной проблемой на пути решения задачи является процедура восстановления сеточного решения. Хорошо известным методом восстановления периодического решения является аппроксимация отрезком ряда Фурье. Рассмотрим еще один алгоритм восстановления сеточного решения. Назовем его методом наименьших квадратов на базе периодических функций. В качестве тестовой рассмотрим одну из основных задач теории нелинейных колебаний – задачу Дуффинга.

$$y''(x) + 0.2y'(x) + y(x) + y^3(x) = 50\cos(x).$$

Пусть искомую (b-a)-периодическую функцию $y(x)$ требуется аппроксимировать на отрезке $[a;b]$ по системе точек $\{x_i, f(x_i)\},\ i = \overline{0,n}$. Приближенную функцию будем искать в следующем виде:

$$P_m(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}\left(A_k \cos\left(2\pi k \frac{x-a}{b-a} \right) + B_k \sin\left(2\pi k \frac{x-a}{b-a} \right)\right),\ x \in [a,b]. \tag{1}$$

Потребуем, чтобы функция (1) максимально близко в некоторой норме функционального пространства проходила через заданную систему точек, то-есть потребуем выполнения следующего условия:

$$I = I(A_0, A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_m) = \sum_{i=0}^{n}(P_m(x_i) - y(x_i))^2 \to \min. \tag{2}$$

Найдя частные производные $\frac{\partial I}{\partial A_0}, \frac{\partial I}{\partial A_1}, ..., \frac{\partial I}{\partial A_m}, \frac{\partial I}{\partial B_1}, ..., \frac{\partial I}{\partial B_m}$ и приравняв их к нулю, стандартным образом из системы (3) находим нужные коэффициенты.