ближенного решения разностным методом, использовать метод наименьших квадратов. В случае непериодической задачи Дуффинга при решении ее разностным методом, разумнее наряду с аппроксимацией полиномами Чебышева I рода использовать периодическое продолжение с дальнейшим восстановлением сеточного решения рядами Фурье.

При решении задачи Дуффинга одним из проекционных методов приближенное решение получается в аналитическом виде, что позволяет избежать процедуры аппроксимации, на этапе которой теряется 3 – 4 порядка точности по норме невязки. Дальнейшие наши исследования будут проходить в этой области. Наибольшие трудности, как нам представляется, ожидают нас при определении системы базисных функций, и процедуры уточнения полученных последовательностей приближенных решений.

Литература

1. Березин, И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. М.:Наука, 1966.-Т.1.-632 с.
2. Натансон, И.П. Конструктивная теория функций / И.П. Натансон. М.: 1949.-688 с.
3. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские методы решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. - Брест. 2005. – 180 с.

О НОРМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, РЕШЕНИЯ КОТОРЫХ ОБЛАДАЮТ БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Швычкина Е. Н.
Брестский государственный технический университет, г. Брест

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{dz}=\frac{\sum\limits_{\tau_2,\tau_3=0}^{\tau_2+\tau_3=p^{(1)}-p_{11}} P^{(1)}_{\tau_2,\tau_3}x_1^{p_{11}}x_2^{\tau_2}x_3^{\tau_3}}{\sum\limits_{\tau_2,\tau_3=0}^{\tau_2+\tau_3=q^{(1)}-q_{11}} Q^{(1)}_{\tau_2,\tau_3}x_1^{q_{11}}x_2^{\tau_2}x_3^{\tau_3}},\quad \frac{dx_j}{dz}=\frac{\sum\limits_{\tau_1,\tau_2,\tau_3=0}^{p_{j1},p_{j2},p_{j3}} P^{(j)}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}x_3^{\tau_3}}{\sum\limits_{\tau_1,\tau_2,\tau_3=0}^{q_{j1},q_{j2},q_{j3}} Q^{(j)}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}x_3^{\tau_3}} \qquad (1)$$

(j=2,3), $x_1(z)$, $x_2(z)$, $x_3(z)$ – искомые функции, z – независимая комплекснозначная переменная; p_{ik} ,q_{ik} *(i, k=1,2,3)* – целые неотрицательные числа, причем $p_{i1}+p_{i2}+p_{i3}\equiv p^{(i)}$, $q_{i1}+q_{i2}+q_{i3}\equiv q^{(i)}$.

Для системы (1) ищутся решения $x_i=x_i(z)$ *(i=1,2,3)*, обладающие бесконечными предельными свойствами

$$x_i\to\infty \ (i=1,2,3) \text{ при } z\to z_0 \qquad (2)$$

с помощью метода, основанного на использовании теоремы Коши и замены

$$x_1=\frac{1}{u^{\alpha}},\ x_2=\frac{V_2}{u^{\mu_2}},\ x_3=\frac{V_3}{u^{\mu_3}}, \qquad (3)$$

где α, μ_2, μ_3 натуральные числа, которые получаются как решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=2}^{n}\mu_k(p_{k1}-q_{k1})+\alpha(p_{11}-q_{11}-1)=1, \\ \sum\limits_{\substack{k=2\\k\neq j}}^{n}\mu_k(p_{kj}-q_{kj})+\mu_j(p_{jj}-q_{jj}-1)+\alpha(p_{j1}-q_{j1})=1 \quad j=(2,...,n). \end{cases} \qquad (4)$$

Замечание 1. В случае, если появляются рациональные решения системы (4), необходимо взять ближайшее натуральное число, удовлетворяющее системе неравенств (4) вида «$\le$».

Замена (3) сведет систему (1) к системе вида

$$\frac{dz}{du} = -\frac{Q^{(1)}_{q^{(1)}}(1,\overline{\beta})}{P^{(1)}_{p^{(1)}}(1,\overline{\beta})} \cdot u^{w_1-\gamma_1-\alpha-1} \cdot \{1+\Phi(u,\overline{\varphi})\}, \tag{5}$$

$$u\frac{d\varphi_j}{du} = a_{j2}\varphi_2 + a_{j3}\varphi_3 + F_j(u,\overline{\varphi}) \quad (j=2,3), \tag{6}$$

где F_j – голоморфные функции от u, $\overline{\varphi}$ ($\overline{\varphi}=(\varphi_2,\varphi_3)$) в окрестности точки *(0,0,0)*; $\Phi(u,\overline{\varphi})$ – трехкратный степенной ряд, сходящийся в окрестности точки *(0,0,0)*. Система (6) является системой Брио и Буке с искомыми функциями $\varphi_j=\varphi_j(u)$ $(j=2,3)$. Используя результаты интегрирования систем Брио и Буке [3], а также теорему о неявной функции, получим условия гарантирующие существование решений системы (1), которые обладают предельными свойствами (2).

Замечание 2. Если μ_j четное число, то следует рассмотреть максимальную степень соответствующего уравнения $x_j=x_j(z)$, т. е. числа $p^{(i)}$, $q^{(i)}$. В случае если наибольшее из чисел $p^{(i)}$, $q^{(i)}$ нечетное, то необходимо вводить соответствующую замену $x_j = \frac{\varepsilon V_j}{u^{\mu_j}}$, где $|\varepsilon|=1$ и рассматривать две системы вида (6). В противном случае, если $p^{(i)}$ или $q^{(i)}$ четное – берется замена (3).

Замечание 3. Если μ_j четное число, то при нахождении функции $u=u(z)$ необходимо выяснить характер ее стремления к нулю. Например, если z стремится к нулю слева, и $u(z)<0$, то это следует учитывать при переходе к исходным функциям $x_i=x_i(z)$ $(i=1,2,3)$.

Пример.

Рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dz} = \frac{x_1^2}{x_2^2}, \quad \frac{dx_2}{dz} = x_2^2 - x_2, \quad \frac{dx_3}{dz} = \frac{x_2^3}{x_2 x_1}. \tag{7}$$

Ее решениями, удовлетворяющими условиям (2), являются следующие функции

$$x_1(z) = -\frac{1}{-4e^z + e^{2z} + 2z + 3}, \quad x_2(z) = \frac{1}{1-e^z}, \quad x_3(z) = \pm\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-30e^z + 15e^{2z} - 2e^{3z} + 18z - 12e^z z + 6z^2 + 17}}.$$

Графики функций $x_1(z)$ и $x_2(z)$ приведены ниже (рис. 1, 2)

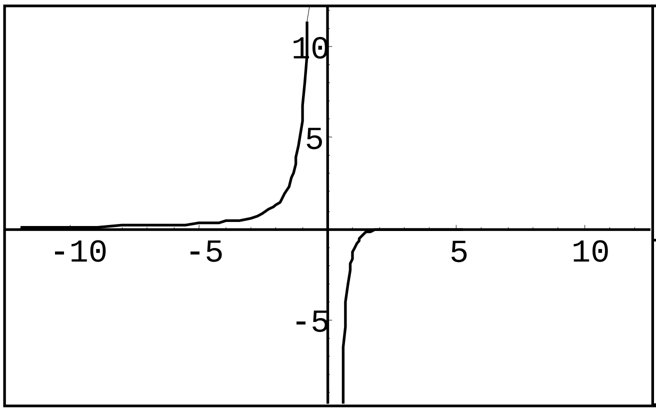

Рис. 1

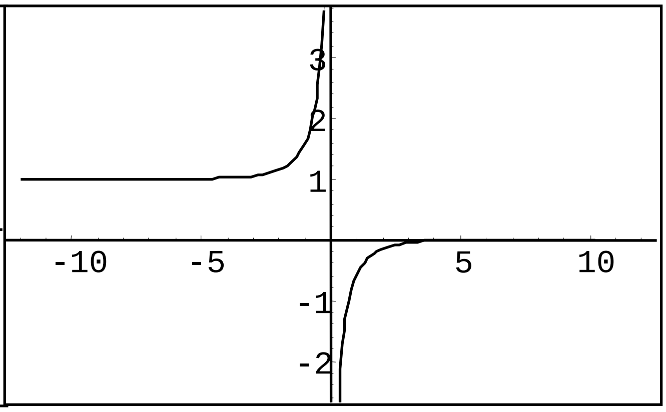

Рис. 2

Рассмотрим функцию $x_3(z)$ со знаком «+». График $Re[x_3(z)]$ приведен на рис. 3, а график $Im[x_3(z)]$ на рис. 4. Притом имеет место условие $\lim\limits_{z\to 0} x_3(z) = -i\infty$.

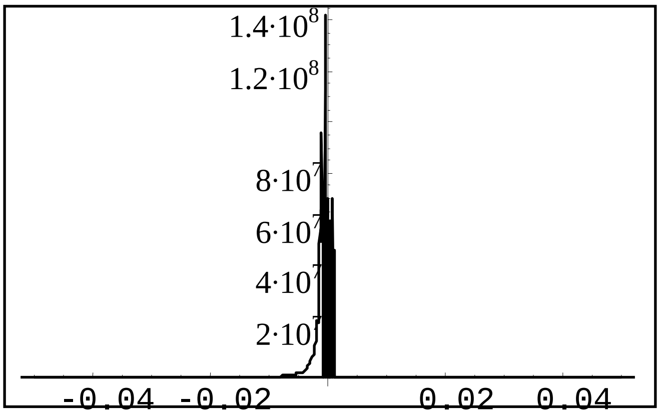

Рис. 3

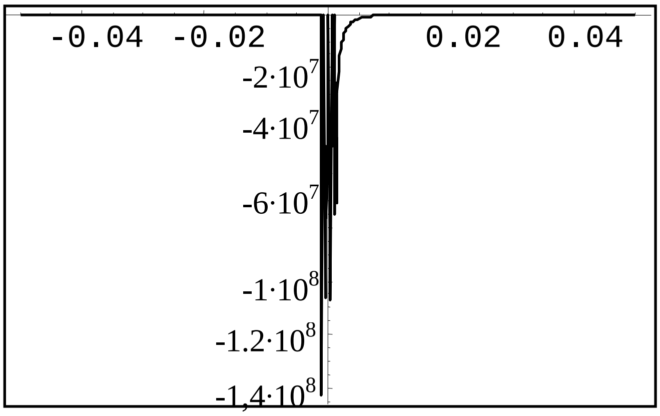

Рис. 4

Применим рассматриваемый метод к решению системы (7). Введем следующую замену $x_1 = \dfrac{1}{u^3}, \quad x_2 = \dfrac{V_2}{u}, \quad x_3 = \dfrac{V_3}{u^2}$, которая сведет эту систему к виду

$$\frac{dt}{du} = -3V_2^2, \quad u\frac{dV_2}{du} = V_2 - 3V_2^2(V_2^2 - V_2 u), \quad u\frac{dV_3}{du} = 2V_3 - 3V_2 \cdot V_3^3.$$

В третьем уравнении системы (7) $p^{(3)}=3$ и $\mu_3=2$. Следовательно необходимо рассмотреть замену $x_3 = \dfrac{\varepsilon \cdot V_3}{u^2}$, в которой характеристические корни имеют вид

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -4. \\ -1, & \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 8. \end{cases}$$

1. $\varepsilon = 1$, тогда система имеет решения, которые можно определить в системе компьютерной алгебры *Mathematica* как Root-объект [4]. Графики функций $x_1(z)$ и $x_2(z)$, являющиеся решениями системы (7) полностью совпадают с приведенными выше, а графики функции $x_3(z)$ имеют вид: на рис. 5 – график $Re[x_3(z)]$, а на рис. 6 – $Im[x_3(z)]$.

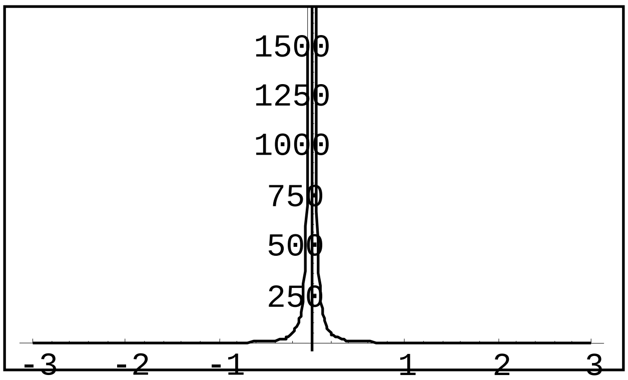

Рис. 5

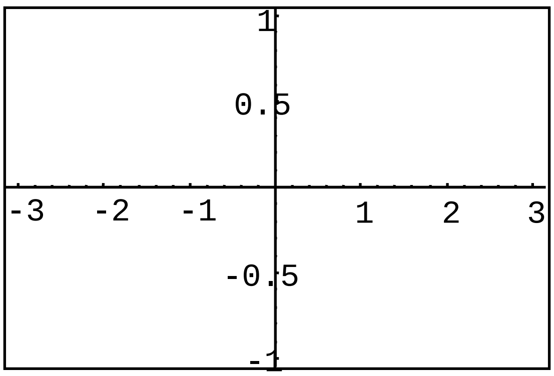

Рис. 6

2. $\varepsilon = -1$, тогда решения $x_1(z)$ и $x_2(z)$ системы (7) будут совпадать с решениями, найденными для $\varepsilon = 1$. График функции $x_3(z)$ имеет следующий вид: рис. 7 функция $Re[x_3(z)]$, рис. 8 – $Im[x_3(z)]$.

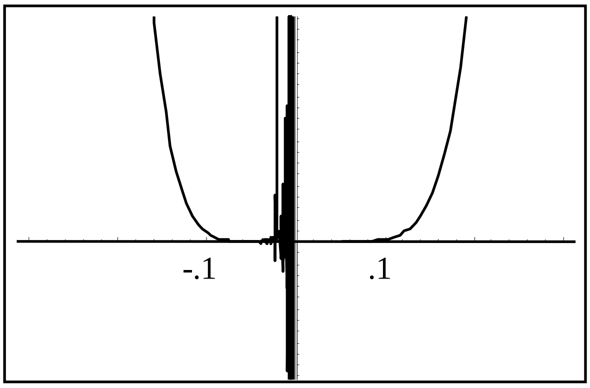

Рис. 7

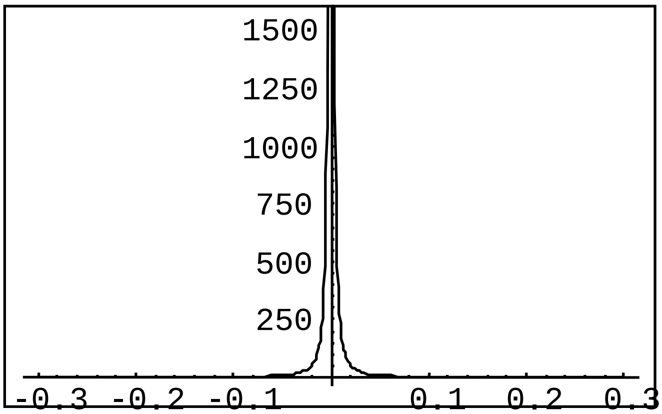

Рис. 8

Литература

1. Чичурин А. В. О решениях систем с заданными предельными свойствами у частных классов нормальных дифференциальных систем с рациональными правыми частями // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. – 1992. – №2 – С. 62-66.
2. Horn J. Uber die Reienenwichelung der Inteqrale lines Systems von Differentiagleichungen in der Umgeburg gewisser singularer stellen//J.fur M.,1896, 116, p. 265 – 306, 1897,117, p. 104 – 128.
3. Прокопеня А.Н., Чичурин А.В. Применение системы *Mathematica* к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. - Мн., БГУ, 1999. С 265.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В БЕСКОНЕЧНО СВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Юхимук М.М.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

В данной работе рассматривается некоторый класс мероморфных функций с особым расположением полюсов третьего порядка. Доказывается ограниченность этих функций вне некоторых окрестностей своих полюсов.

Теорема: Пусть $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$ – монотонно неубывающая по модулю последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих условию $\inf\limits_{\substack{k,j\in\mathbb{N}\\ k\neq j}}\left\{\left|\alpha_j-\alpha_k\right|\right\}>0$. Тогда $\forall\delta>0$ функция $f(z)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(z-\alpha_j)^3}$ ограничена вне δ- окрестностей точек α_j $(j\in\mathbb{N})$.

Доказательство

Будем называть последовательность комплексных чисел $\left(\beta_j\right)_{j=1}^{\infty}$ *d* - последовательностью, если она удовлетворяет условиям:

1) $\left|\beta_2-\beta_1\right|\le\left|\beta_3-\beta_1\right|\le\ldots\le\left|\beta_j-\beta_1\right|\le\ldots$; 2) $\inf\limits_{\substack{k,j\in\mathbb{N}\\ k\neq j}}\left\{\left|\beta_j-\beta_k\right|\right\}=d>0$.

При этом условимся говорить, что *d* - последовательность $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$ мажорирует *d* - последовательность $\left(\beta_j\right)_{j=1}^{\infty}$, если $\left|\alpha_2-\alpha_1\right|\ge\left|\beta_2-\beta_1\right|$, $\left|\alpha_3-\alpha_1\right|\ge\left|\beta_3-\beta_1\right|,\ldots,\left|\alpha_j-\alpha_1\right|\ge\left|\beta_j-\beta_1\right|,\ldots$

Построим *d* - последовательность $\left(\beta_j\right)_{j=1}^{\infty}$, заведомо мажорируемую произвольной *d* – последовательностью $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$. Для этого, очевидно, нужно максимально “плотно” заполнить