

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ НАХОЖДЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ В АНАЛИТИЧЕСКОМ ВИДЕ ЖЕСТКИХ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Якубук Р. М.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Традиционно процесс численного интегрирования задачи Коши

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(a) = A, \quad x \in [a, b] \quad (1)$$

заключается в дискретизации отрезка $[a, b]$: $a < x_1 < \dots < x_N < b$ и получении набора приближений $\{y_i\}_{i=1}^N$ точного решения $y(x)$ в узлах сетки. Но на практике часто оказывается недостаточно одного такого сеточного решения, особенно, когда требуется визуализация или изучение свойств решения задачи. В этих случаях требуется вычислить и выдать решение в дополнительных точках, которые к тому же могут быть расположены достаточно плотно (плотная выдача). Одна из возможностей состоит во включении этих точек в сетку узлов интегрирования. Однако такой подход может нарушить эффективность управления длиной шага и привести к существенному росту вычислительных затрат. Кроме того, местоположение дополнительных точек может быть неизвестно априори.

Поэтому представляет интерес вывод так называемых непрерывных численных методов («numerical continuous methods») [1], которые были бы способны выдавать значения решения во всех промежуточных точках отрезка $[x_{i-1}, x_i]$: $x = x_{i-1} + th$, $0 < t \leq 1$. Для отдельных классов численных методов (методы Адамса, ФДН-методы, методы Энрайта и др.), основанных на обратной интерполяции, вывод таких формул осуществляется тривиальным образом (введением параметра). Для методов Рунге-Кутты (как явных, так и неявных) процедура существенно усложняется. Здесь непрерывное расширение используемого численного метода строится на всем отрезке $[a, b]$ в виде набора многочленов $\tilde{y}(x)$ на каждом из частичных отрезков, на которые делится отрезок $[a, b]$ данным набором точек. Далее производится интерполирование по узлам, находящимся на каждом из частичных отрезков полиномом невысокой степени.

Для построения такого многочлена используются либо условия порядка, либо классическая теория интерполяции (полином Эрмита), либо комбинация этих приемов. При этом контроль величины погрешности осуществляется по малости невязки $\delta(x) = \tilde{y}'(x) - f(x, \tilde{y}(x))$.

Особенностью перечисленных способов построения формул, осуществляющих плотную выдачу, является их зависимость от метода получения сеточного решения задачи (1).

Опишем метод построения приближенных решений жестких задач Коши для ОДУ в аналитическом виде, не зависящий от численного метода интегрирования задачи (1) и выполняемый в один этап.

Для решения жесткой начальной дифференциальной задачи на отрезке $[a, b]$, $a < b$ зададим максимальный и минимальный шаг, h_{\max} и h_{\min} , «множитель безопасности» $\gamma \in]0, 1[$, абсолютную и относительную погрешности решения, $Atol$ и $Rtol$ (порядка 10^{-10}).

Начальная величина шага задается как $h_0 = \sqrt{h_{\min} h_{\max}}$, либо как $h_0 = C h_{\min}$, $C \gg 1$.

Зададим $x_0 = a$.

Шаг 1. Зададим на отрезке $[x_i, x_i + h_i]$ некоторую сетку (например, Чебышевскую). Численно проинтегрируем задачу разностным методом на этом отрезке.

Шаг 2. Найдем аналитический вид приближенного решения, восстановленного по узлам сетки.

Шаг 3. Найдем оценки погрешностей компонент приближенного решения $\delta y = y_i + \int_{x_i}^{x_i+h_i} f(x, \tilde{y}(x))dx - y_{i+1}$, где $\tilde{y}(x)$ — аналитический вид приближенного решения на отрезке $[x_i, x_i + h_i]$.

Шаг 4. Вычислим оценку $err = \max_j \frac{|\delta y_j|}{(|y_j| + |\Delta y_j|)Rtol + Atol}$.

Шаг 5. Если $err < 1$, то принимаем приближенное решение на отрезке $[x_i, x_i + h_i]$, задаем новое значение $x_i: x_{i+1} = x_i + h_i$.

Шаг 6. Задаем новую величину шага: $\min(h_{\max}, \max(h_{\min}, \mathcal{H}_i D(err)))$, где $D(err)$ — убывающая на каждом из отрезков непрерывности положительно определенная функция одной переменной, для которой $err < 1 \Rightarrow D(err) > 1$ и $err > 1 \Rightarrow D(err) < 1$. Например, $D(err) = \exp(-\ln(err)/(1 + \lfloor \ln(err) \rfloor))$, $D(err) > e^{-1}$, $D(err) \leq e$. Можно построить функцию $D(err)$, удовлетворяющую условиям $D(err) > m, D(err) \leq M, m < 1, M > 1$: $D(err) = m + (M - m) \left(\frac{1 - m}{M - m} \right)^{err}$.

Такой способ позволяет эффективно управлять величиной шага.

Шаг 7. Если достигнут конец промежутка интегрирования, то - выход, иначе переход на шаг 1.

Этот метод позволяет контролировать величину как абсолютной, так и относительной погрешности решения. Если на всём отрезке $err < 1$, то на отрезках плавного изменения решения абсолютная ошибка решения не превосходит $K_1 Atol$, а на отрезках быстрого изменения решения относительная погрешность решения не превосходит $K_2 Rtol$, где K_1 и K_2 - некоторые ограниченные величины.

Рассмотрим один из новых способов конструирования неявных методов Рунге – Кутты. Как известно, конструирование неявных методов Рунге-Кутты существенно опирается на упрощающие предположения [1]

$$B(p): \sum_{i=1}^s b_i c_i^{s-1} = \frac{1}{q}, \quad q = 1, \dots, p; \quad (2)$$

$$C(\eta): \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j^{q-1} = \frac{c_i^q}{q}, \quad i = 1, \dots, s, \quad q = 1, \dots, \eta; \quad (3)$$

$$D(\zeta): \sum_{i=1}^s b_i c_j^{q-1} a_{ij} = \frac{b_j}{q} (1 - c_j^q), \quad j = 1, \dots, s, \quad q = 1, \dots, \zeta. \quad (4)$$

Условие $B(p)$ просто означает, что квадратурная формула (b_i, c_i) имеет порядок p . Важность двух других условий видна из следующей фундаментальной теоремы.

Теорема [1]. Если коэффициенты b_i, c_i, a_{ij} метода Рунге-Кутты удовлетворяют условиям $B(p), C(\eta), D(\zeta)$ и при этом $p \leq \eta + \zeta + 1$ и $p \leq 2\eta + 2$, то метод имеет порядок p .

Для реализации наших идей рассмотрим Гауссовы методы. Эти процессы представляют собой коллокационные методы, основанные на квадратурных формулах Гаусса, то-есть c_1, \dots, c_s являются нулями смещённого полинома Лежандра степени s

$$\frac{d^s}{dx^s} (x^s (1-x)^s). \quad (5)$$

Поскольку s -стадийный гауссов метод имеет порядок $2s$ и является A -устойчивым, то, исходя из этого, s -стадийный метод Гаусса можно определить, пользуясь условиями $B(2s)$ и $C(s)$. Условие $B(2s)$ задаёт нелинейную систему из $2s$ уравнений с $2s$ неизвестными, решение которой единственно с точностью до порядка следования коэффициентов b_i и c_i соответственно. Итерационными методами [2] можно получить решение этой системы. При просчетах с вещественными числами в формате повышенной точности (20 цифр) возможно получение решения системы только небольших порядков ($s \leq 7$). Это можно объяснить возрастанием степени обусловленности матрицы Якоби системы. При этом коэффициенты c_1, \dots, c_s различны. Условие $C(s)$ можно записать в форме матричного уравнения $AC = B$, где A — матрица коэффициентов a_{ij} , C — матрица типа Вандермонда, определяемая коэффициентами c_1, \dots, c_s . Так как коэффициенты c_1, \dots, c_s различны, то A определяется однозначно.

Ранее гауссовы методы выше восьмого порядка мало использовались из-за трудностей, связанных с нахождением параметров методов, что приводит к решению нелинейных систем, либо к нахождению корней смещенного полинома Лежандра выше четвертой степени.

В качестве численного примера была рассмотрена задача Ван-дер-Поля:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ \tilde{f}(y_1, y_2) \end{pmatrix}, \text{ где } \tilde{f}(y_1, y_2) = ((1 - y_1^2)y_2 - y_1)/\varepsilon, \varepsilon > 0. \quad (6)$$

Начальные условия задачи:

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0' \end{pmatrix}, \text{ где } \begin{cases} z_0 = 2, \\ z_0' = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Она была исследована на отрезке $x \in [0; 2]$. Задача интегрировалась методами Гаусса от 4-го до 14-го порядка. Величина минимального шага равна 10^{-19} , максимального — $0,001$, $Atol = Rtol = 10^{-10}$. Системы нелинейных уравнений решались с точностью 10^{-14} .

Ниже приведены вычислительные затраты, требуемые для приближенного решения задачи указанными выше методами в зависимости от порядка метода.

Порядок метода Гаусса	Суммарное количество итераций при решении нелинейных систем
6	335139
8	283646
10	241356
12	214454
14	201526

Размерность системы линейно зависит от порядка метода, так что увеличение порядка точности метода в результате достигается за счет незначительного увеличения количества вычислений.

Таким образом, за счет использования указанных выше подходов можно находить приближенное решение жесткой задачи с разумной точностью и разумными вычислительными затратами.

Литература

1. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. - М.: Мир, 1999. — 685 с.
2. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские методы решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. - Брест, 2005. — 180 с.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И НЕЙРОННЫЕ СЕТИ	3
Безобразов С. В. Методы искусственных иммунных систем для защиты информации: классификация компьютерных вирусов	3
Безобразова С. В. Повышение точности обнаружения аномалий в сигналах электроэнцефалограмм	6
Войцехович Л. Ю. Подход к обеспечению безопасности компьютерных сетей с применением элементов искусственного интеллекта	9
Горошко В. В. Нейросетевая аппроксимации при моделировании и анализе результатов флуоресцентных экспериментов	12
Давыденко А. А. Моделирование системы поддержки принятия решений для биологической очистки стоков в аэротенках на основе многослойных нейронных сетей	15
Davydenko A. Simulation of the decision-making system for biological refinement of sewage in aerotanks by means of multilayer neural networks	17
Kaliukhovich D. Robot's motion control algorithms on a task of line-following	19
Скулович О. З. Проблемы использования нейросетевых моделей для анализа социальных и экологических явлений	22
Теленкевич Р. С. Методы распознавания изоморфизма неориентированных графов	24
Трофимук В. А., Цветков А. А. Нейронные сети: модификация алгоритма сжатия изображений	27
РАЗДЕЛ II. РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ И АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ	29
Воронов А. А. Методы покрытия прямоугольниками объектов топологии микросхем типа шина	29
Kaliukhovich D., Golovko V., Paczynski A. Some approaches to line detection on a task of line-following	36
Курочка К. С. Организация распределённой обработки графической информации средствами пакета R	38
Новиков В. А., Харитонов Д. С. Раскрашивание черно-белого изображения средствами C#	41
Самко А. Р. Распознавание объектов с помощью иерархического классифицирующего дерева решающих правил	43
Якуцевич А. Сравнение двух методов неинвазивного ВСІ	45
РАЗДЕЛ III. АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ	48
Баранов В. В. Сравнение аналитического и имитационного моделирования процессов безызлучательного переноса и миграции энергии в молекулярных системах	48
Волков Е. Г. Моделирование фрактальных кластеров с изменением коэффициента длины пробега	51
Дежурко А. М., Верхотуров А. Е. Моделирование работы параллельных алгоритмов для кластерных структур	53
Докукова Н. А., Мартыненко М. Д., Кафтайкина Е. Н. Нелинейные колебания гидроупругих амортизаторов	56
Коротков А. В. Влияние параметров армирования на собственные частоты колебаний многослойных труб из армированных пластиков	59
Курлович А. А., Кожух И. Г. Нелинейные динамические процессы, описываемые уравнением Навье-Стокса	61
Чухутина О.В. Имитационное моделирование биохимических реакций	63
РАЗДЕЛ IV. СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУЧНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ	67
Антонова Ю. Л. Возможности метода нечеткой логики для оценки состояния окружающей среды	67
Анфилец С. В., Свирский В. М. Моделирование регулируемого светофором перекрёстка	68
Анфилец С. В., Шуть М. В. Адаптивное управление автотранспортом на регулируемом перекрёстке	71
Базарэўскі В. Э., Сцепанчук Н. У. Выкарыстанне канечных аўтаматаў пры распрацоўцы праграмных сродкаў	74

Бракович А. И. Обоснование метода определения степени виновности источников загрязнения атмосферы	75
Бранцевич П. Ю., Борисюк В. Ю., Шакер Ш. А. Организация вибрационного контрольно-диагностического комплекса	77
Ванюков С. В., Теут А. А. О новом варианте системы тестирования — что и как	79
Гончарова С. А. Применение системы поддержки принятия решений на основе прецедентов в системах диагностики технического состояния механизмов с вращательным движением	82
Жиляк Н. А. Разработка пакета прикладных программ синтеза систем реального времени на базе UML	85
Иванюк Д. С. Автоматизация на ОАО "Савушкин продукт"	88
Кишкевич А. П., Ревотюк М. П. Рекуррентный алгоритм решения задачи коммивояжера с ветвлением на задачах о назначении	90
Козак А. Ф., Костюк Д. А., Марчик Д. В. Программно-аппаратная система акустического спектрального анализа корродирующих поверхностей	93
Кравцевич Л. И. Пакет прикладных программ для регистрации видеоизображений и тестирования параметров ПЗС-матриц	96
Куган С. Ф. Проблемы использования программных продуктов в строительных компаниях	99
Кузьмицкий Н. Н., Савчук Л. Н. Использование MS.NET-платформы для автоматизации некоторых компонентов образовательного процесса	101
Лежнин А. В. Нейроморфное моделирование зрительной системы человека	103
Лозовский А. В. Состояние электронного бизнеса в Республике Беларусь	104
Люлькович М. С. О подходах к проектированию системы администрирования из комплекса тестирования знаний	106
Науменко Д. Ю. Решение проблемы парковок с помощью системы видеонаблюдения	108
Нестеренков С. Н. Применение языка JAVA для разработки распределенных приложений	111
Печко Е. В. Разработка региональных систем поддержки принятия решений	113
Rybytak P. Numerical simulation of fluid flow and mass transport using Lattice-Boltzmann Method	116
Проскура Е. М., Чичурин А. В. Условия существования стационарных решений ограниченной кольцеобразной задачи шестнадцати тел	118
Ратобыльская Д. В., Сукач Е. И. Компьютерное моделирование прогнозов численности и структуры населения	121
Ревотюк М. П., Шешко Е. В. Выделение предопределенных решений на графах при многократном поиске кратчайших путей	122
Романцевич Е. В. «Сфера» - инструментальная среда автоматизированного создания и модификации компьютерных обучающих программ	125
Сайко Д. В. "Интеллектуальная" система управления складом на основе WMS решений для ОАО «Савушкин продукт»	127
Саникович В. В., Саникович О. И. Использование современных web-технологий в процессе формирования информационных образовательных сред	130
Сидорович С. А., Силаев Н. В. О некоторых подходах к построению подсистем тестирования в комплексе тестирования знаний	132
Тавониус К. А. Использование переменного масштаба пиктограмм для навигации по файловой системе	134
Федосенко В. И. Психолого-педагогические аспекты применения ЭВМ в обучении	137
Филипенко Е. В. Планирование эксперимента при исследовании свойств формовочных смесей	138
РАЗДЕЛ V. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ	141
Андрушкевич И. Е., Шиёнок Ю. В. Уравнения Максвелла и алгебра Клиффорда	141
Белемук О. В. О решениях в классах специальных функций нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка с инвариантами бинарной формы (аналитический и программный аспекты)	144
Болтромеюк В. В. Сравнительный анализ некоторых способов аппроксимации функций	144
Будько Д. А. Об одном методе определения резонансных кривых для дифференциаль-	147