# ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ НАХОЖДЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ В АНАЛИТИЧЕСКОМ ВИДЕ ЖЕСТКИХ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

**Якубук Р. М.**
*Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест*

Традиционно процесс численного интегрирования задачи Коши

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(a) = A, \quad x \in [a,b] \tag{1}$$

заключается в дискретизации отрезка $[a,b]$: $a < x_1 < \ldots < x_N < b$ и получении набора приближений $\{y_i\}_{i=1}^N$ точного решения $y(x)$ в узлах сетки. Но на практике часто оказывается недостаточно одного такого сеточного решения, особенно, когда требуется визуализация или изучение свойств решения задачи. В этих случаях требуется вычислить и выдать решение в дополнительных точках, которые к тому же могут быть расположены достаточно плотно (плотная выдача). Одна из возможностей состоит во включении этих точек в сетку узлов интегрирования. Однако такой подход может нарушить эффективность управления длиной шага и привести к существенному росту вычислительных затрат. Кроме того, местоположение дополнительных точек может быть неизвестно априори.

Поэтому представляет интерес вывод так называемых непрерывных численных методов («numerical continuous methods») [1], которые были бы способны выдавать значения решения во всех промежуточных точках отрезка $[x_{i-1}, x_i]$: $x = x_{i-1} + th, \ 0 < t \le 1$. Для отдельных классов численных методов (методы Адамса, ФДН-методы, методы Энрайта и др.), основанных на обратной интерполяции, вывод таких формул осуществляется тривиальным образом (введением параметра). Для методов Рунге-Кутты (как явных, так и неявных) процедура существенно усложняется. Здесь непрерывное расширение используемого численного метода строится на всем отрезке $[a,b]$ в виде набора многочленов $\tilde{y}(x)$ на каждом из частичных отрезков, на которые делится отрезок $[a,b]$ данным набором точек. Далее производится интерполирование по узлам, находящимся на каждом из частичных отрезков полиномом невысокой степени.

Для построения такого многочлена используются либо условия порядка, либо классическая теория интерполяции (полином Эрмита), либо комбинация этих приемов. При этом контроль величины погрешности осуществляется по малости невязки $\delta(x) = \tilde{y}'(x) - f(x, \tilde{y}(x))$.

Особенностью перечисленных способов построения формул, осуществляющих плотную выдачу, является их зависимость от метода получения сеточного решения задачи (1).

Опишем метод построения приближенных решений жестких задач Коши для ОДУ в аналитическом виде, не зависящий от численного метода интегрирования задачи (1) и выполняемый в один этап.

Для решения жесткой начальной дифференциальной задачи на отрезке $[a,b], a < b$ зададим максимальный и минимальный шаг, $h_{\max}$ и $h_{\min}$, «множитель безопасности» $\gamma \in ]0,1[$, абсолютную и относительную погрешности решения, $Atol$ и $Rtol$ (порядка $10^{-10}$).

Начальная величина шага задается как $h_0 = \sqrt{h_{\min} h_{\max}}$, либо как $h_0 = C\,h_{\min}, \quad C >> 1$.

Зададим $x_0 = a$.

Шаг 1. Зададим на отрезке $[x_i, x_i + h_i]$ некоторую сетку (например, Чебышевскую). Численно проинтегрируем задачу разностным методом на этом отрезке.

Шаг 2. Найдем аналитический вид приближенного решения, восстановленного по узлам сетки.

Шаг 3. Найдем оценки погрешностей компонент приближенного решения $\delta y = y_i + \int_{x_i}^{x_i+h_i} f(x, \tilde{y}(x))dx - y_{i+1}$, где $\tilde{y}(x)$ — аналитический вид приближенного решения на отрезке $[x_i, x_i + h_i]$.

Шаг 4. Вычислим оценку $err = \max_j \dfrac{|\delta y_j|}{(|y_j| + |\Delta y_j|)Rtol + Atol}$.

Шаг 5. Если $err < 1$, то принимаем приближенное решение на отрезке $[x_i, x_i + h_i]$, задаем новое значение $x_i$: $x_{i+1} = x_i + h_i$.

Шаг 6. Задаем новую величину шага: $\min(h_{\max}, \max(h_{\min}, \gamma h_i D(err)))$, где *D(err)* — убывающая на каждом из отрезков непрерывности положительно определенная функция одной переменной, для которой $err < 1 \Rightarrow D(err) > 1$ и $err > 1 \Rightarrow D(err) < 1$. Например, $D(err) = \exp(-\ln(err)/(1 + \lfloor|\ln(err)|\rfloor)), D(err) > e^{-1}, D(err) \le e$. Можно построить функцию *D(err)*, удовлетворяющую условиям $D(err) > m, D(err) \le M, m < 1, M > 1$: $D(err) = m + (M - m)\left(\dfrac{1-m}{M-m}\right)^{err}$. Такой способ позволяет эффективно управлять величиной шага.

Шаг 7. Если достигнут конец промежутка интегрирования, то - выход, иначе переход на шаг 1.

Этот метод позволяет контролировать величину как абсолютной, так и относительной погрешности решения. Если на всём отрезке $err < 1$, то на отрезках плавного изменения решения абсолютная ошибка решения не превосходит $K_1\, Atol$, а на отрезках быстрого изменения решения относительная погрешность решения не превосходит $K_2\, Rtol$, где $K_1$ и $K_2$ - некоторые ограниченные величины.

Рассмотрим один из новых способов конструирования неявных методов Рунге – Кутты. Как известно, конструирование неявных методов Рунге-Кутты существенно опирается на упрощающие предположения [1]

$$B(p): \quad \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{s-1} = \frac{1}{q}, \quad q = 1, \ldots, p; \tag{2}$$

$$C(\eta): \quad \sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{q-1} = \frac{c_i^q}{q}, \quad i = 1, \ldots, s, \quad q = 1, \ldots, \eta; \tag{3}$$

$$D(\zeta): \quad \sum_{i=1}^{s} b_i c_j^{q-1} a_{ij} = \frac{b_j}{q}(1 - c_j^q), \quad j = 1, \ldots, s, \quad q = 1, \ldots, \zeta. \tag{4}$$

Условие $B(p)$ просто означает, что квадратурная формула $(b_i, c_i)$ имеет порядок *p*. Важность двух других условий видна из следующей фундаментальной теоремы.

**Теорема [1]**. Если коэффициенты $b_i$, $c_i$, $a_{ij}$ метода Рунге-Кутты удовлетворяют условиям $B(p)$, $C(\eta)$, $D(\zeta)$ и при этом $p \le \eta + \zeta + 1$ и $p \le 2\eta + 2$, то метод имеет порядок *p*.

Для реализации наших идей рассмотрим Гауссовы методы. Эти процессы представляют собой коллокационные методы, основанные на квадратурных формулах Гаусса, то-есть $c_1, \ldots, c_s$ являются нулями смещённого полинома Лежандра степени *s*

$$\frac{d^s}{dx^s}\left(x^s (1-x)^s\right). \tag{5}$$

Поскольку s-стадийный гауссов метод имеет порядок $2s$ и является *A*-устойчивым, то, исходя из этого, *s*-стадийный метод Гаусса можно определить, пользуясь условиями *B(2s)* и *C(s)*. Условие *B(2s)* задаёт нелинейную систему из $2s$ уравнений с $2s$ неизвестными, решение которой единственно с точностью до порядка следования коэффициентов $b_i$ и $c_i$ соответственно. Итерационными методами [2] можно получить решение этой системы. При просчетах с вещественными числами в формате повышенной точности (20 цифр) возможно получение решения системы только небольших порядков ($s \le 7$). Это можно объяснить возрастанием степени обусловленности матрицы Якоби системы. При этом коэффициенты $c_1, \ldots, c_s$ различны. Условие *C(s)* можно записать в форме матричного уравнения $AC = B$, где *A* — матрица коэффициентов $a_{ij}$, *C* — матрица типа Вандермонда, определяемая коэффициентами $c_1, \ldots, c_s$. Так как коэффициенты $c_1, \ldots, c_s$ различны, то *A* определяется однозначно.

Ранее гауссовы методы выше восьмого порядка мало использовались из-за трудностей, связанных с нахождением параметров методов, что приводит к решению нелинейных систем, либо к нахождению корней смещенного полинома Лежандра выше четвертой степени.

В качестве численного примера была рассмотрена задача Ван-дер-Поля:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ \tilde{f}(y_1, y_2) \end{pmatrix}, \text{ где } \tilde{f}(y_1, y_2) = \left(\left(1 - y_1^2\right)y_2 - y_1\right)/\varepsilon,\ \varepsilon > 0. \qquad (6)$$

Начальные условия задачи:

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0' \end{pmatrix}, \text{ где } \begin{cases} z_0 = 2, \\ z_0' = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Она была исследована на отрезке $x \in [0;2]$. Задача интегрировалась методоми Гаусса от 4-го до 14-го порядка. Величина минимального шага равна $10^{-19}$, максимального – 0,001, $Atol = Rtol = 10^{-10}$. Системы нелинейных уравнений решались с точностью $10^{-14}$.

Ниже приведены вычислительные затраты, требуемые для приближенного решения задачи указанными выше методами в зависимости от порядка метода.

| Порядок метода Гаусса | Суммарное количество итераций при решении нелинейных систем |
|---|---|
| 6 | 335139 |
| 8 | 283646 |
| 10 | 241356 |
| 12 | 214454 |
| 14 | 201526 |

Размерность системы линейно зависит от порядка метода, так что увеличение порядка точности метода в результате достигается за счет незначительного увеличения количества вычислений.

Таким образом, за счет использования указанных выше подходов можно находить приближенное решение жесткой задачи с разумной точностью и разумными вычислительными затратами.

## Литература

**1.** Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. - М.: Мир, 1999. – 685 с.

**2.** Мадорский, В.М. Квазиньютоновские методы решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. - Брест, 2005. – 180 с.

## СОДЕРЖАНИЕ