УДК 624.21+534.1

Сидорович Е.М.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СООРУЖЕНИЙ

В статье рассматриваются расчётные и математические модели исследования отклика деформируемых объектов в общем случае на нестационарные динамические воздействия (ударные и подвижные нагрузки, прогрессирующее обрушение, переходные процессы и т.п.). Динамическому воздействию могут быть подвержены произвольные свободные и несвободные деформируемые объекты (каркасы зданий и сооружений; мосты и эстакады с движущимися экипажами, сочлененные устройства в виде жёстких блоков с податливым или шарнирными связями и т.п.). Динамическая степень свободы деформируемой системы не ограничивается. Учитываются силы инерции масс основных несущих конструкций, масс взаимодействующих объектов и масс подвижных нагрузок. Вывод дифференциальных уравнений движения основан на методе конечных элементов и методе связанных подструктур. Предложен численный алгоритм прямого интегрирования уравнений движения, позволяющий снизить порядок решаемых уравнений и улучшить обусловленность получаемого решения.

Современные тенденции проектирования и строительства инженерных сооружений характеризуются использованием новейших высокопрочных материалов, совершенствованием конструктивных форм и методик расчётов. Все это приводит к снижению массы конструкций, уменьшению их жёсткости и, как следствие, к их большей чувствительности к динамическим воздействиям.

В настоящее время компьютерное моделирование задач динамики сооружений, как правило, осуществляется на основе метода конечных элементов, который позволяет учесть многие особенности реальных объектов, но приводит к необходимости интегрирования дифференциальных уравнений движения высоких порядков, порой, плохо обусловленных и подверженных численной неустойчивости. С целью снижения порядка разрешающих уравнений и повышения точности их решений в современных универсальных программных комплексах используются разнообразные приёмы статической и динамической конденсации [1, 2], аналоги известного метода суперэлементов [3] и метод связанных подструктур [2, 4].

Для решения основных задач линейной динамики сооружений в программных комплексах применяют, как правило, метод разложения искомого решения по формам собственных колебаний с ограничением количества учитываемых низших собственных форм [1, 3, 5, 6], особенно для исследования стационарных колебаний. Как альтернатива указанному методу в некоторых программных комплексах и научной литературе предлагается проводить исследование динамических процессов прямым интегрированием дифференциальных уравнений движения (без их преобразования к системе дифференциальных уравнений первого порядка) численными шаговыми методами, явными или неявными [1, 5, 6, 7]. Причём шаговые методы остаются единственно возможными для решения нестационарных задач динамики сооружений, исследования переходных процессов и нелинейных задач.

Опыт применения компьютерных технологий к расчету деформируемых систем высокой размерности показывает, что численное компьютерное решение любой громоздкой задачи подвержено численной неустойчивости (жёсткие системы, плохо обусловленные системы [6, 8]) и требует тщательной верификации. При прямом интегрировании дифференциальных уравнений движения численными шаговыми методами возникают очень непростые вопросы выбора значения шага интегрирования и принятия мер по обеспечению численной устойчивости искомого решения, а также вопросы ограничения учитываемых высокочастотных форм колебаний с целью сокращения временных затрат на получение решения, независимо от вида динамических воздействий.

В данной работе как раз ставится и решается задача по сокращению временных затрат на получение хорошо обусловленного решения при исследовании динамической реакции любой деформируемой системы (сооружения или свободного объекта), на произвольное нестационарное воздействие (силовое, кинематическое, инерционное и т. п.). Предполагается для общности алгоритма, что сооружение или свободный объект, а также его фрагменты заданы их матрицами внешней жёсткости, которые могут быть построены с помощью любых известных проектно-вычислительных комплексов.

Предполагается так же, что история изменения внешних воздействий и изменения масс исследуемого объекта или сооружения во времени и в пространстве известны, заданы. Например, подвижная нагрузка и соответствующая подвижная масса передаются на сооружение последовательно в заданной очерёдности на заданную цепочку узлов несущей системы по пути следования подвижной нагрузки.

Таким образом, предлагаемый алгоритм предполагает, что одновременно с передаваемой нагрузкой (узловыми силами) изменяются и эффективные массы соответствующих степеней свободы несущей системы по пути следования поезда.

Колебательное или поступательное движение любой деформируемой системы, свободной или несвободной, с конечным числом степеней свободы при действии произвольной вынуждающей нагрузки может быть описано системой дифференциальных уравнений второго порядка, представленной в стандартном прямом виде [1, 3, 5, 6]

$$M\ddot{V}+H\dot{V}+RV=F(t), \tag{1}$$

где матрицы масс M, демпфирования H и внешней жёсткости R могут быть функциями времени и искомых перемещений V, то есть допускается переменная во времени масса и не исключаются переменное и нелинейное демпфирование и нелинейная жёсткость, $F(t)$ – вектор узловых вынуждающих сил.

Таким образом, даже в случае вязкого (линейного) демпфирования и линейной упругости дифференциальные уравнения движения (1) являются уравнениями с переменными коэффициентами, и их решение возможно только численными шаговыми методами. При выборе численного метода решения дифференциальных уравнений движения вида (1) необходимо учитывать следующее.

Явные прямые численные методы имеют достаточно высокий порядок точности (степенной [5], Рунге-Кутта [7] и др.), дают возможность исследовать движение свободных и геометрически изменяемых систем, но неизбежно требуют при этом разрешения уравнений движения относительно старших производных (а не только первых производных), то есть требуют выполнения операции обращения матрицы масс. Для этого все узловые массы должны быть ненулевыми, в противном случае необходима статическая конденсация. В реальных системах такие операции, не смотря на высокий порядок решаемых систем уравнений, выполнимы. Однако явные методы приводят к возникновению проблемы «жёсткости» решаемых систем уравнений движения, требующей для получения решения с удовлетворительной точностью выбора достаточно малого шага по времени и предъявляющей так называемые «жёсткие» требования к самим уравнениям [1, 6, 8].

Существующие неявные прямые методы численного интегрирования дифференциальных уравнений движения позволяют обойти названную проблему «жёсткости», но имеют относительно невысокий порядок точности. С другой стороны, неявные методы требуют многократного решения систем алгебраических уравнений метода конечных элементов. Матрицей коэффициентов таких уравнений является модифицированная матрица внешней жёсткости деформируемой системы [1, 6]. Она должна быть невырожденной. Таким образом, численными методами данного типа не могут быть исследованы деформируемые системы, в составе которых есть или появляются свободные тела, например, возможное баллистическое движение экипажа по мостовому сооружению.

Кроме того, именно при решении алгебраических уравнений метода конечных элементов снова возникает проблема «жёсткости», но уже в другом смысле. Образующие реальную деформируемую систему отдельные конечные элементы могут иметь параметры, различающиеся по значениям на несколько порядков. Это приводит к плохой обусловленности матриц внешней жёсткости и, следовательно, к потере точности решения системы алгебраических уравнений с такими матрицами коэффициентов.

Как известно, критерием хорошей обусловленности симметричной положительно определённой матрицы является не слишком большое значение числа обусловленности, равного отношению наибольшего собственного значения матрицы к наименьшему. В деформируемой системе, находящейся в устойчивом равновесии, за число обусловленности может быть принято отношению собственных частот деформируемой системы: максимальной к минимальной. В реальных системах это отношение часто бывает очень велико.

Из вышеизложенного следует, что прямые численные методы интегрирования, как явные, так и неявные, должны, по возможности, применяться к системам дифференциальных уравнений движения относительно невысоких порядков. При этом матрицы обобщённых масс и обобщённых жёсткостей должны быть далеки от вырождения, а их собственные частоты, по возможности, должны быть близкими по значениям. Тогда проблемы «жесткости» устраняются, и получаемые решения систем уравнений движения будут хорошо обусловлены.

С целью построения алгоритма, удовлетворяющего вышеназванным требованиям, подразделим узлы исследуемой системы на узлы основные, или пограничные [2, 4], и узлы промежуточные. Пограничные (основные) узлы должны разбивать систему на отдельные независимые и непересекающиеся фрагменты (подструктуры). Перемещения основных узлов (вектор V_1) определяют основное, переносное движение системы. Перемещения остальных узлов (промежуточных, внутренних), принадлежащих только фрагментам, (блочный вектор V_2) выражаются как сумма переносных перемещений, зависящих от переносного движения основных узлов, и некоторых дополнительных перемещений, определяющих относительное движение фрагментов. Относительные перемещения внутренних узлов могут быть представлены в главных координатах подструктур, которым внутренние узлы принадлежат.

С учётом разделения узлов деформируемой системы на основные и промежуточные уравнения движения (1) можно преобразовать к виду

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{V}_1 \\ \ddot{V}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где матрицы, относящиеся к промежуточным узлам, являются блочно диагональными (количество независимых подструктур определяет количество блоков).

Предположим теперь, что с помощью соответствующего программного обеспечения решена первая задача динамики, задача о собственных колебаниях каждой из независимых подструктур при условии полного закрепления основных узлов и отсутствии сил сопротивления:

$$M_{22}\ddot{V}_2+R_{22}V_2=0 \;\Rightarrow\; R_{22}\Phi_{2n}=M_{22}\Phi_{2n}\Omega_{nn} \;\Rightarrow\; R^*_{nn}=M^*_{nn}\Omega_{nn}; \qquad (3)$$
$$R^*_{nn}=\Phi^T_{2n}R_{22}\Phi_{2n};\;\; M^*_{nn}=\Phi^T_{2n}M_{22}\Phi_{2n},$$

где Φ_{2n} – прямоугольная матрица n удержанных собственных форм, Ω_{nn} – диагональная матрица квадратов n удержанных собственных частот, R^*_{nn} – диагональная матрица обобщённых жёсткостей, M^*_{nn} – диагональная матрица обобщённых масс.

Строго говоря, в (3) представлено решение частичной задачи о собственных колебаниях подструктур с определением заданного количества низших частот и соответствующих собственных форм. Общее количество удерживаемых частот и форм по всем фрагментам равно n. Особенность решения задачи собственных колебаний (3) состоит в том, что она решается для каждого выбранного фрагмента в отдельности как независимого. Порядок решаемых уравнений для каждой подструктуры значительно меньше порядка исходных уравнений (1). В результате сокращаются временные затраты на получение решения. Кроме того, каждый фрагмент может быть выбран так, чтобы образующие его конечные элементы были близкими по деформационным свойствам. Обусловленность решения для каждого такого фрагмента лучше, чем для исходной системы в целом.

На основании решения (3), как это принято в методе разложения искомого движения по собственным формам, умножим слева второе уравнение в (2) на $\Phi_{n2}=\Phi_{2n}^{\;T}$ и, как это принято в теории связанных подструктур, введём в оба уравнения подстановку:

$$V_2=\Psi_{21}V_1+\Phi_{2n}q_n, \qquad (4)$$

где Ψ_{21} – пока неопределённая прямоугольная матрица; q_n – вектор обобщённых (главных) координат всех подструктур. Потребуем также, чтобы в процессе преобразований выполнялось условие

$$R_{21}+R_{22}\Psi_{21}=0. \qquad (5)$$

Тем самым во втором уравнении будет исключено слагаемое, содержащее вектор V_1, а прямоугольная матрица Ψ_{21} получит конкретный механический смысл. Как следует из уравнения (5), столбцы матрицы Ψ_{21} представляют собой статические перемещения промежуточных узлов, принадлежащих подструктурам, вызванные единичными перемещениями основных узлов как опорных. Такие перемещения принято называть статическими формами подструктур [4]. Следовательно, для построения матрицы Ψ_{21} необходимо решить статическую задачу расчета всех подструктур на единичные смещения основных узлов как опорных. Размерность таких статических задач существенно меньше, чем исходной задачи, а обусловленность решения значительно лучше. Выполнить это можно любым известным проектно-вычислительным комплексом.

После выполнения соответствующих преобразований получим:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{1n} \\ \bar{M}_{n1} & \bar{M}_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{V}_1 \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} S_{11} & S_{1n} \\ S_{n1} & S_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} K_{11} & K_{1n} \\ 0 & K_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ q_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_n(t) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где $\bar{M}_{11}=M_{11}+M_{12}\Psi_{21}$; $\bar{M}_{1n}=M_{12}\Phi_{2n}$; $\bar{M}_{n1}=\bar{M}_{1n}{}^{T}+\Phi_{n2}M_{22}\Psi_{21}$; $\bar{M}_{nn}=M^{*}{}_{nn}$;

$S_{11}=H_{11}+H_{12}\Psi_{21}$; $S_{1n}=H_{12}\Phi_{2n}$; $S_{n1}=S_{1n}{}^{T}+\Phi_{n2}H_{22}\Psi_{21}$; $S_{nn}=\Phi_{n2}H_{22}\Phi_{2n}$;

$K_{11}=R_{11}-\Psi_{12}R_{22}\Psi_{21}$; $K_{1n}=-\Psi_{12}R_{22}\Phi_{2n}$; $K_{nn}=R^{*}{}_{nn}=M^{*}{}_{nn}\Omega_{nn}$; $F_n(t)=\Phi_{n2}F_2(t)$.

Редуцированные уравнения движения (6) являются точными, в них могут быть учтены все собственные формы. На практике допускается их дальнейшее упрощение на основании дополнительных допущений, таких как:

1. Матрица масс и матрица демпфирования в исходной системе (1) являются диагональными.

2. Промежуточные узлы являются безынерционными, массы системы сосредоточены в основных узлах.

3. Нагрузка и силы сопротивления приложены только в основных узлах.

Даже без последних упрощений полученная система уравнений (6) обладает существенными преимуществами по сравнению с исходной системой (1). Она имеет значительно более низкий порядок. В ней исключены из рассмотрения высокочастотные формы колебаний. Она не чувствительна к наличию безынерционных степеней свободы (отдельных нулевых масс). Позволяет исследовать движение как геометрически неизменяемых сооружений, так и подвижных, свободных механических систем, состоящих из жестких деформируемых блоков, соединенных податливыми упругими или шарнирными связями. И главное, допускает быстрое решение явными прямыми численными методами высоких порядков точности при значительно ослабленных требованиях к выбору шага интегрирования и обеспечению численной устойчивости получаемого решения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Клаф, Р. Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
2. Круговова, Е.А. Компьютерное моделирование взаимодействия железнодорожных экипажей и мостов / Е.А. Круговова, Г.В. Михеев, Р.В. Ковалёв //Вестник Брянского государственного технического университета. – 2010. – № 3(27). – С. 39–49.
3. Дарков, А.В. Строительная механика / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – М.: Высш. шк., 1986. – 607 с.
4. Юдаков, А.А. Принципы построения общих уравнений динамики упругих тел на основе модели Крейга-Бэмптона и их практически значимых приближений / А.А. Юдаков // Вестник Удмуртского университета: Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2012. – Вып. 3. – С. 126–140.
5. Борисевич, А.А. Строительная механика / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с.
6. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
7. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1981. – 704 с.
8. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М.: Мир, 1999. – 685 с.