

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

**Материалы V Республиканской научной конференции
молодых ученых и студентов
28 - 30 ноября 2007 года**

Брест 2007

УДК 517+519+004
ББК 22.11/.19+32.97

Редакционная коллегия:

В.А. Головко, БрГТУ, д.т.н., профессор, главный редактор
В.С. Рубанов, БрГТУ, к.ф.-м.н., доцент, зам. гл. редактора
В.В. Старовойтов, ОИПИ НАНБ, д.т.н., профессор
Н.В. Лазакович, БГУ, д.ф.-м.н., профессор
С.А. Мазаник, БГУ, д.ф.-м.н., профессор
А.А. Дудкин, ОИПИ НАНБ, к.т.н., с.н.с.
С.С. Дереченник, БрГТУ, к.т.н., доцент
В.М. Ракецкий, БрГТУ, к.ф.-м.н., доцент

Рецензенты:

зав. кафедрой ЭВМ, д.т.н., профессор **Р.Х. Садыхов**, БГУИР;
кафедра информатики и прикладной математики БрГУ им. Пушкина

ISBN 978-985-493-074-9

Современные проблемы математики и вычислительной техники: материалы V Республиканской научной конференции молодых ученых и студентов, Брест, 28–30 ноября 2007 г. – Брест: БрГТУ, 2007. – 224 с.

Представлены тезисы докладов по современным проблемам информационных технологий в научных и прикладных исследованиях, моделирования нелинейных динамических процессов, распознавания образов и анализа изображений, искусственного интеллекта и нейронных сетей, аналитических и численных методов исследований в математике и их приложениях.

УДК 517+519+004
ББК 22.11/.19+32.97

ISBN 978-985-493-074-9

Учреждение образования
© «Брестский государственный технический университет», 2007

РАЗДЕЛ I. ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И НЕЙРОННЫЕ СЕТИ

МЕТОДЫ ИСКУССТВЕННЫХ ИММУННЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ: КЛАССИФИКАЦИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ ВИРУСОВ

Безобразов С. В.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Введение

С развитием компьютерных наук и компьютерной техники общество столкнулось с проблемой развития киберпреступности. Одним из направлений киберпреступности является создание и распространение вредоносных программ, называемых компьютерными вирусами. На сегодняшний день проблема защиты компьютерных систем от вредоносных программ является одной из основных в области защиты информации. Традиционный подход, основанный на сигнатурном поиске компьютерных вирусов, применяемый для их обнаружения, достаточно хорошо позволяет обнаруживать известные вирусы, однако совершенно не подходит для обнаружения неизвестных вредоносных программ. С момента появления нового компьютерного вируса до его обнаружения специалистами антивирусной индустрии проходит некоторое, иногда продолжительное, время (от нескольких часов до нескольких дней). За это время современные вредоносные программы способны заразить сотни тысяч компьютеров, вызвать настоящие вирусные эпидемии и привести к огромным убыткам. Компьютерные системы с устаревшими антивирусными базами не способны противостоять новой угрозе. Эвристические анализаторы, применяемые для обнаружения неизвестных компьютерных вирусов, на сегодняшний день далеки от совершенства и зачастую классифицируют чистый, незагрязненный файл как вредоносную программу или, наоборот, не замечают зловредную программу. Современные исследования в области защиты информации направлены на создание таких систем безопасности, которые были бы способны обнаруживать неизвестные компьютерные вирусы.

Искусственные иммунные системы для защиты информации

Искусственные иммунные системы (ИИС) являются системами, способными обнаруживать неизвестные компьютерные вирусы. ИИС базируются на основных принципах биологической иммунной системы (БИС). БИС является уникальной системой, которая ежедневно борется с болезнетворными бактериями и вирусами, защищая организм от инфекций [1]. Уникальность БИС является в том, что она способна обнаруживать не только известные вирусы и бактерии, но и неизвестные. Иммунитет основан на способности лимфоцитов распознавать собственные клетки организма от чужеродных клеток. БИС имеют ряд мощных вычислительных возможностей: распознавание, разнообразие, обучение, память, распределенный поиск, саморегуляция, децентрализация, вероятностное обнаружение.

Построенная по основным принципам БИС искусственная иммунная система обладает всеми ее возможностями и, на наш взгляд, является перспективной для построения современной системы компьютерной безопасности. ИИС состоит из следующих процессов: создание детекторов, обучение и отбор детекторов, уничтожение нежелательных детекторов, циркуляция иммунных детекторов в компьютерной системе, уничтожение детекторов по истечении времени, обнаружение вредоносной программы, клонирование и мутация детекторов, формирование иммунной памяти. Взаимодействие процессов изображено на рисунке 1.

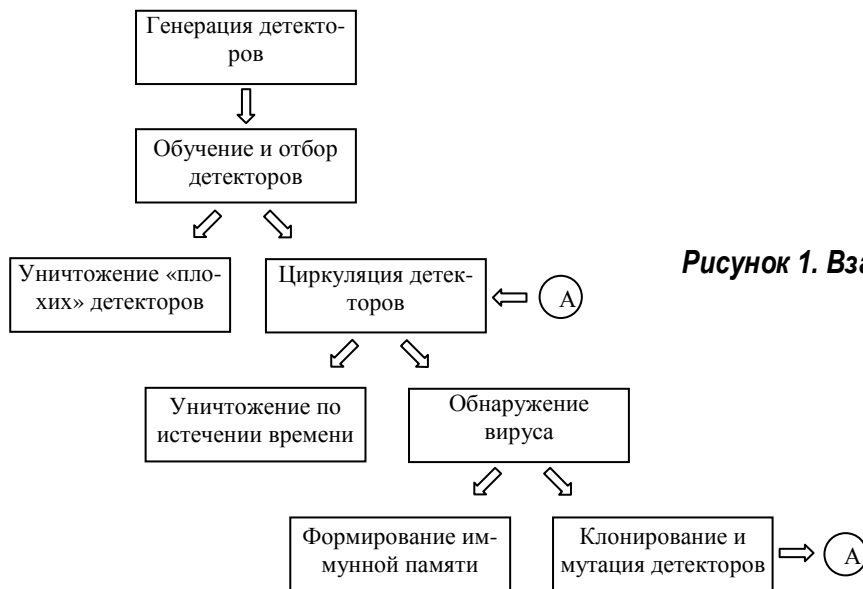


Рисунок 1. Взаимодействие процессов ИИС

Рассмотрим подробнее каждый из перечисленных процессов.

Процесс генерации детекторов предназначен для создания иммунных детекторов, которые выполняют функцию обнаружения вредоносных программ. Первоначально детекторы не способны отличать чистые файлы от вредоносных программ. На стадии обучения детекторы обучаются распознавать зловредные программы и не реагировать на чистые файлы. В качестве детекторов мы использовали искусственные нейронные сети, а именно - LVQ сети [2]. На стадии генерации формируется определенное количество детекторов, каждый из которых представляет отдельную нейронную сеть. Структура иммунного детектора, основанного на LVQ, изображена на рисунке 2. На стадии обучения созданные нейронные сети проходят обучение. Для обучения выбирались разнообразные чистые файлы и компьютерные вирусы [3]. Использование разных файлов в процессе обучения позволяет создавать разнообразные иммунные детекторы.

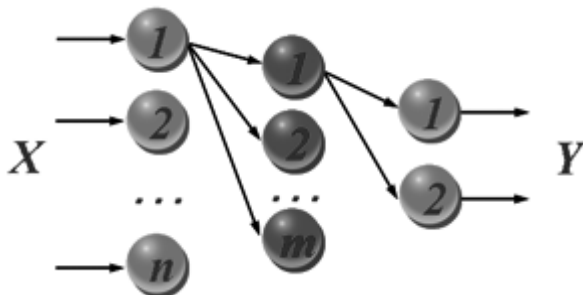


Рисунок 2. Применение LVQ для формирования детектора

После стадии обучения, детекторы проходят стадию отбора. Механизм отбора необходим для предотвращения попадания в компьютерную систему нежелательных детекторов, т.е. тех детекторов, которые реагируют на чистые файлы.

Обученные детекторы циркулируют в компьютерной системе, проверяя и классифицируя файлы. Каждому детектору отводится определенное время, на протяжении которого он может находиться в системе. После истечения выделенного времени детектор, который не произвел обнаружение, уничтожается, а на его место приходит новый. Такой механизм помогает избавиться от слабых детекторов.

При обнаружении вредоносной программы происходит процесс клонирования. Клонирование подразумевает создание большого количества однотипных детекторов (клонировается тот детектор, который обнаружил компьютерный вирус). Процесс клонирования позволяет иммунной системе в кратчайшие сроки избавиться от всех проявлений компьютерного вируса.

Наиболее приспособленный к обнаруженному вирусу детектор трансформируется в детектор иммунной памяти. Иммунная память хранит информацию обо всех вирусах, которые в прошлом заражали компьютерную систему, и предотвращает ее повторное заражение.

Классификация компьютерных вирусов

На сегодняшний день существует большое количество разнообразных зловредных программ, и хотя в настоящее время не существует единой системы классификации вирусов, всех их можно разделить по характерным признакам заражения и распространения на несколько групп. Существует следующая общепринятая классификация компьютерных вирусов: сетевые черви, классические компьютерные вирусы, троянские программы, хакерские утилиты. Компьютерные вирусы, принадлежащие к разным группам, используют различные алгоритмы заражения, различные вредоносные функции, различные предназначения. Зная, к какой категории принадлежит обнаруженная вредоносная программа, можно сделать выводы о пути проникновения ее в компьютерную систему и о тех вредоносных действиях, которые выполняет компьютерный вирус. Такая информация позволит принять оперативные действия по предотвращению утечки и разрушению информации.

Нами была предложена система классификации обнаруженного, с помощью искусственной иммунной системы, неизвестного компьютерного вируса. В качестве классификатора была использована искусственная нейронная сеть (LVQ) – отдельная нейронная сеть на отдельный тип вредоносной программы. Каждая нейронная сеть обучалась на своем типе вирусов, и при поступлении неизвестного образа на вход нейронной сети она соотносила его с эталонным вектором и выдавала решение о принадлежности его к классу [4]. Классификатор вредоносной программы изображен на рисунке 3.

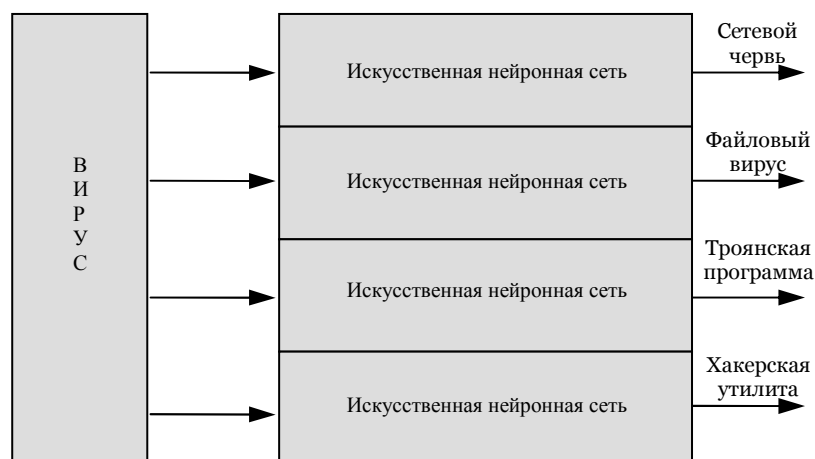


Рисунок 3. Классификация обнаруженного вируса

Выводы

Разработана система классификации обнаруженных при помощи искусственной иммунной системы компьютерных вирусов. Разработанная система позволяет получить общие сведения об обнаруженной зловредной программе и принять оперативные действия для предотвращения утечки и уничтожения информации.

Литература

1. Иммуитет. Энциклопедия «Кругосвет» – <http://krugosvet.ru>, 2004.
2. Kohonen T. Self-organised formation of topologically correct feature maps// Biological Cybernetics. - 1982. - N43.-P.59-69.
3. С.В. Безобразов, В.А. Головки. Нейросетевой подход для формирования детекторов в искусственных иммунных системах для защиты информации // Вестник БрГТУ. Физика, математика, информатика.-2006.- №6
4. В.А. Головки. Нейронные сети: обучение, организация и применение. Кн. 10: Учеб. пособие для вузов / Общая ред. А. И. Галушкина. - М.: ИПРЖР, 2000. –С.114-129.

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ АНОМАЛИЙ В СИГНАЛАХ ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАММ

Безобразова С. В.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Введение

Наше исследование хаотических процессов направлено на идентификацию уровня хаоса в них и, тем самым, обнаружению аномалий при его снижении. Мы, в частности, рассматриваем задачу диагностики эпилепсии. Для изучения и обнаружения эпилепсии широко используется электроэнцефалография, предметом изучения которой являются электрические явления в мозге человека.

Задача повышения точности идентификации хаотического процесса является одной из основных в нашей исследовательской работе [1]. Решение этой проблемы позволит обнаруживать не только участки проявления аномалий в сигналах, но и их длительность.

1. Сегментация сигналов

Процедуру сегментации временного ряда на фрагменты по степени хаотичности можно разделить на три этапа [2], как представлено на рисунке 1:

1. На первом этапе сигнал разбивается на элементарные участки.
2. Затем на каждом из этих участков производится расчет меры хаотичности, определяющей поведение сигнала на данном отрезке. В качестве меры хаоса может служить корреляционная размерность или старший показатель Ляпунова [3].
3. На третьем этапе элементарные участки классифицируются в соответствии с уровнем хаотичности сигнала, получая каждый свое классификационное наименование.

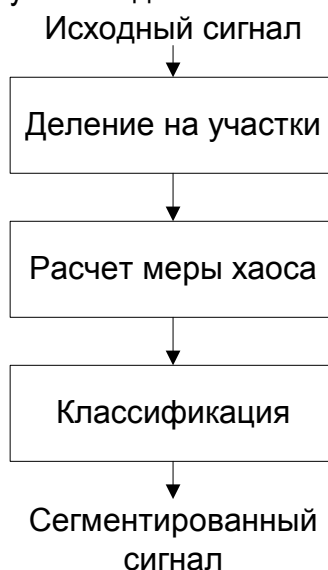


Рисунок 1. Сегментация сигнала

Главной задачей является первый этап, то есть разбиение исходного на элементарные участки, для его реализации наиболее эффективной считается адаптивная сегментация. Такой подход к сегментации предполагает определение границы между сегментами при обнаружении изменения характеристических параметров [2]. Происходит оценка степени сходства фиксированного участка исходного сигнала с последующим фрагментом этого сигнала, рассматриваемом в движущемся вдоль записи временном "окне". Очевидно, что как только в это окно попадет граница сегментов, контролируемая степень сходства резко уменьшится, и это будет формальным признаком перехода к следующему сегменту - участку с другой степенью хаотичности.

Однако этот метод порождает ряд сложностей, так как необходимо подобрать параметры, которые будут характеризовать каждый сегмент определенными значениями. В на-

шем исследовании характеристическим параметром выступает старший показатель Ляпунова, поэтому мы предлагаем степень сходства определять по точности прогноза при прогнозировании фиксированного участка исходного сигнала.

2. Нейросетевой подход в сегментации

Для прогнозирования данных в нашем случае наиболее подходящим методом являются искусственные нейронные сети, так как они позволяют анализировать небольшие объемы данных [4]. В качестве базовой архитектуры для прогнозирования временных процессов в работе использован многослойный персептрон (Multilayer Perceptron, MLP). Для обучения многослойного персептрона мы использовали алгоритм обратного распространения ошибки. Предположим, у нас есть временной ряд $X = \{x(1), x(2), \dots, x(m)\}$, где m – количество точек временного ряда. Сегментирование осуществляется согласно следующему алгоритму:

- 1) Определяется размер элементарного интервала N ; $t=1$ – начальная позиция временного окна;
- 2) Формируется обучающая выборка N точек, начиная с позиции t : $\{x(t), x(t+1), \dots, x(t+N-1)\}$;
- 3) Производится обучение нейронной сети на прогнозирование выбранных данных;
- 4) Осуществляется прогноз значений, получаем точки $x'(t+N), x'(t+N+1), x'(t+N+2) \dots$ до тех пор, пока не выполнится условие (2)

$$|x'(i) - x(i)| > \Delta x_{\max}, \quad (1)$$

где $i = \overline{0, 1, 2, \dots, \Delta x_{\max}}$ - величина, определяющая приемлемую точность прогноза.

- 5) Если $i = 0$, то i -ая точка принимается за границу сегментов и временное окно смещается к полученной границе $t=t+N$, иначе окно смещается на i точек $t=t+i$.
- 6) Если $t < m - N$, то переходим к пункту 1, иначе сегментация завершена.

Согласно вышеописанному алгоритму произведем сегментацию смешанного ряда, изображенного на рисунке 2.а, при $N = 50$. Результат адаптивной сегментации при помощи нейронных сетей показан на рисунке 2.б.

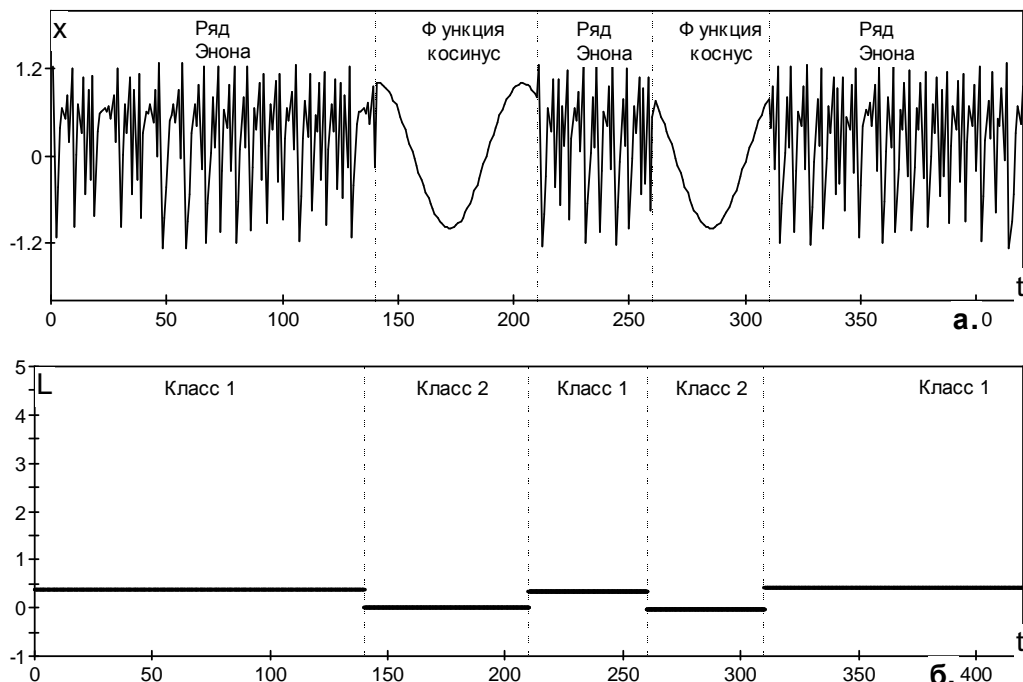


Рисунок 2. а) смешанный сигнал; б) адаптивная сегментация при помощи нейронных сетей

Сегментация произведена с точностью до трех отсчетов, все сегменты идентифицированы правильно, отсутствуют неопределенные сегменты.

3. Применение сегментации к сигналам электроэнцефалограмм

Рассмотрим на примере электроэнцефалограммы (ЭЭГ), где аномалией являются эпилептиформные активности, вызывающие снижение уровня хаоса в сигнале[5].

На рисунке 3.а изображен исследуемый сигнал ЭЭГ с двумя спайками (островершинные высокоамплитудные волны, появившиеся в сигнале в результате эпилептического приступа). На рисунке 3.б показаны результаты адаптивной сегментации этого сигнала: к классу I отнесены сегменты с положительным значением старшего показателя Ляпунова (нормальная активность), к классу II – с отрицательным (эпилептиформная активность). Из рисунка 3 видно, что адаптивная сегментация при помощи нейронных сетей позволила обнаружить все эпилептиформные активности в анализируемом сигнале и определить их длительность.

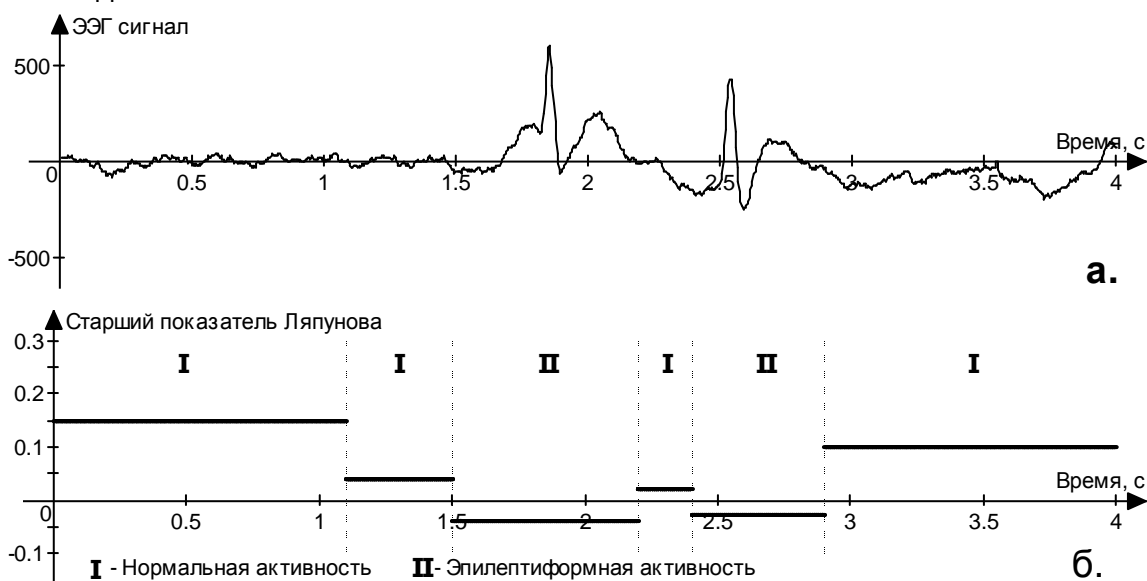


Рисунок 3. а) сигнал ЭЭГ; б) адаптивная сегментация сигнала ЭЭГ при помощи нейронных сетей

Выводы

1. Разработан нейросетевой подход к сегментации сигналов. Сегменты идентифицируются по уровню хаоса на участке сигнала.

2. Предложенный подход позволяет повысить точность обнаружения эпилептиформной активности в сигнале ЭЭГ, так как применение сегментации предполагает определение длительности соответствующе-го сегмента.

Исследования проводятся в соответствии с ГКПНИ «Инфотех» по теме «Методы математического моделирования процессов самоорганизации в активных средах» (№ госрегистрации 20063567) под руководством профессора, д.т.н. Головки Владимира Адамовича.

Литература

1. Безобразова С.В., Головки В.А. *Нейросетевой подход в задаче диагностики эпилепсии* // Вестник БрГТУ. Физика, математика, информатика. – 2006. – №5(41). – С. 36-39
2. Каплан А.Я. Проблема сегментного описания электроэнцефалограммы человека // Физиология человека, 1999, Том 25, № 1, С. 125-133.
3. V. Golovko, Y. Savitsky, N. Maniakov. *Neural Networks for Signal Processing in Measurement Analysis and Industrial Applications: the Case of Chaotic Signal Processing* // chapter of NATO book "Neural networks for instrumentation, measurement and related industrial applications". - Amsterdam: IOS Press, 2003, P. 119-143.
4. Головки В.А. *Нейросетевые методы обработки хаотических процессов* // В книге «Лекции по Нейроинформатике». – М.: МИФИ, 2005. – С. 43-88.
5. Sackellares J.Ch, Iasemidis L.D, Shiau D. *Epilepsy when chaos fail*. Singapore: World Scientific, 1990.

ПОДХОД К ОБЕСПЕЧЕНИЮ БЕЗОПАСНОСТИ КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Войцехович Л.Ю.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Оперативный обмен информацией становится неотъемлемым атрибутом успешной деятельности в любой сфере. В последнее время прорыв в этой области обеспечили компьютерные технологии: компьютерные сети, электронная коммерция, корпоративные web-сайты и др. Однако наряду с необходимостью повышения надежности и скорости коммуникации, остро встал вопрос обеспечения защиты информационных ресурсов [1].

Для защиты компьютерных систем применяются различные подходы. Все подходы можно разбить на две основные категории: организационные и технические. В свою очередь технические подходы подразделяются на сетевые и хостовые. Далее в статье речь пойдет о сетевых средствах обеспечения безопасности, а именно о системах обнаружения вторжений.

Задачей Систем Обнаружения Вторжений (Intrusion Detection Systems - IDS) является защита компьютерных сетей.

Наряду с правильной политикой безопасности, архитектурой межсетевых фильтров, антивирусным программным обеспечением и другим средствам IDS часто отводится роль основного элемента защиты. IDS используются в качестве средства раннего оповещения о сетевых проблемах. Это обусловлено размещением IDS в общей схеме обороны на сетевом уровне, на котором подозрительные действия могут быть обнаружены раньше, чем на более высоких уровнях. Кроме того, IDS способна предоставлять необходимые доказательства злоумышленных действий, а также выявлять скрытые тенденции, что становится возможным при анализе большого количества данных, обрабатываемых IDS.

К недостаткам существующих моделей IDS в первую очередь можно отнести уязвимость к новым атакам, низкую точность и скорость работы. Современные системы обнаружения вторжений плохо приспособлены к работе в реальном режиме времени, в то время как возможность обрабатывать большой объем данных в реальном времени – это определяющий фактор практического использования систем IDS. Указанные недостатки трудно устранить, используя только классические методы в области компьютерной безопасности. Поэтому в последнее время системы IDS активно изучаются.

В данной статье предлагается подход к обнаружению атак на компьютерные сети, основанный на нейронных сетях.

Процесс обработки информации в IDS приведен на рис. 1. Он включает три этапа.

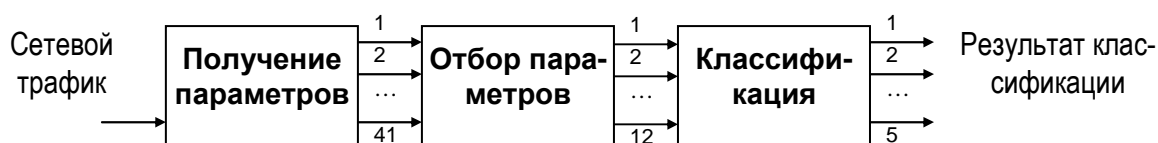


Рис. 1. Процесс обнаружения

На первом этапе осуществляется захват трафика сети (feature selection). Сбор необходимых данных выполняет специальное программное средство (sniffer). В этой работе мы использовали базу данных KDD-99 [2]. Эта база содержит около 5 000 000 записей. Каждая запись представляет собой образ сетевого соединения, который включает 41 параметр трафика и промаркирован как “атака” или “не атака”. Отдельная запись состоит из около 100 байт данных. Например, первый параметр определяет длительность соединения, второй – указывает используемый протокол, третий – целевую службу и т.д.

Второй этап связан с уменьшением размерности входного вектора данных и получением главных компонент (feature extraction). Между используемыми параметрами суще-

ствуют сложные взаимосвязи, которые достаточно тяжело проследить. Некоторые данные являются избыточными. Большое количество параметров может значительно увеличить время вычислений, поэтому этап получения главных компонент является важным этапом в процессе функционирования предлагаемых IDS.

Третий этап состоит в обнаружении и распознавании атак (classification). Атаки в базе KDD-99 делятся на четыре основных класса: DoS, U2R, R2L и Probe.

Рассмотрим различные архитектурные решения для построения систем обнаружения атак. Они основаны на применении модулярных нейронных сетей. В качестве входных данных используется 41-размерный вектор, который характеризует параметры соединения сети. Задачей IDS является обнаружение и распознавание атак. Поэтому в качестве выходных данных используется 5-мерный вектор, где 5 - это количество классов атак плюс нормальное состояние.

На основании предыдущих результатов экспериментов [3] мы отобрали три наиболее удачные модели систем обнаружения атак.

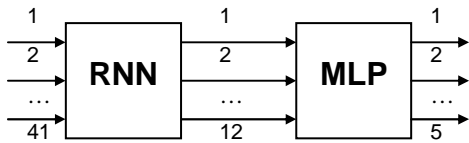


Рис. 2. Первый вариант IDS

На рис. 2 приведена простейшая система обнаружения атак, которая состоит из рекуррентной нейронной сети (RNN) и многослойного перцептрона (MLP) [4], которые соединены последовательно. Задачей RNN является сжатие входного 41-размерного вектора в 12-размерный выходной вектор. Многослойный перцептрон осуществляет обработку сжатого пространства входных образов (главных компонент) с целью распознавания класса атаки.

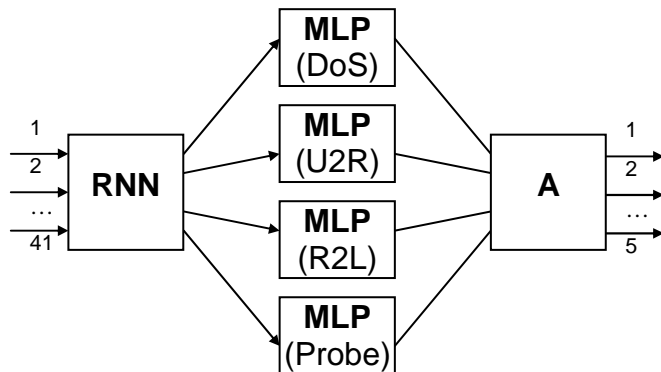


Рис. 4. Третий вариант IDS

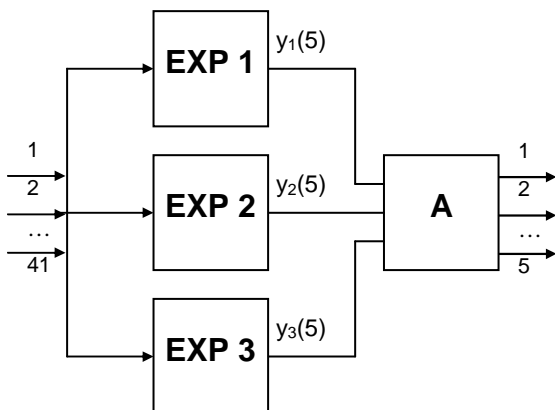


Рис. 3. Второй вариант IDS

На рис. 3 приведена вторая схема системы обнаружения атак. Она характеризуется тем, что главные компоненты с выходов RNN одновременно поступают на 4 отдельных многослойных персептрона, каждый из которых соответствует определенному классу атаки: DoS, U2R, R2L и Probe. С выходов MLP данные поступают на арбитр, который и принимает окончательное решение о состоянии системы. В качестве арбитра может использоваться линейный или многослойный персептрон.

Рассмотрим Ансамблевую нейронную сеть (рис. 4). Каждый эксперт представлен отдельной системой классификации (в нашем случае в качестве эксперта применена модель 1). Арбитр (многослойный персептрон) осуществляет процедуру голосования для формирования совместного решения всех трех экспертов. Такая нейронная сеть обучается по алгоритму усиления за счет фильтрации [5], который предполагает обучение каждого последующего эксперта на множестве данных, формируемых на основании результатов обучения предыдущих экспертов.

После обучения нейронных сетей они способны обнаруживать враждебную активность в сети.

Эксперименты проводились в соответствии с данными, приведенными в таблице 1.

Таблица 1. Структура обучающей выборки и тестовых данных

	DoS	U2R	R2L	Probe	Normal	Всего
обучающая выборка	3571	37	278	800	1500	6186
тестовая выборка	391458	52	1126	4107	97277	494020

Обучающая выборка использовалась для настройки нейронных сетей. После этапа обучения на каждую из предложенных моделей подавались образы из тестовой выборки и рассчитывались показатели эффективности (доля обнаруженных, доля распознанных атак и число ложных срабатываний системы).

Сводные данные по каждому из вариантов построения системы обнаружения атак приведены в таблице 2:

Таблица 2. Сводные данные по результатам тестирования

Модель	Обнаруженные атаки	Распознанные атаки	Ложные срабатывания	Общая доля распознанных %
мод. 1	396696 (99.98%)	375522 (94,65%)	46446 (47.75%)	86.30%
мод. 2	395949 (99.80%)	375391 (94.61%)	13398 (13.77%)	92.97%
мод. 3	396549 (99.95%)	375730 (94.70%)	12549 (12.90%)	93.21%

Таким образом, модель 3 характеризуется высокой точностью (93,21%) и наименьшим числом ложных срабатываний. При использовании модели 1 были распознаны 86,3% входных образов, а модели 2 – 92,97%. Модели 2 и 3 могут успешно применяться для работы с большими наборами сложных по структуре данных.

Предлагаемый подход к построению сетевой системы обнаружения вторжений, основанный на взаимодействии рециркуляционной нейронной сети и многослойного персептрона, позволяет достичь высоких показателей. Нейронная сеть способна учесть сложные нелинейные зависимости, существующие между рассчитываемыми параметрами трафика, и распознать действия злоумышленника в общем потоке данных, поступающих из сети. Кроме того, обученная нейронная сеть функционирует достаточно быстро. Дальнейшие исследования связаны с повышением эффективности нейросетевых моделей и проведением детальных испытаний в условиях реальной сети.

Литература

1. Web Application Security Consortium. Классификация угроз [Электрон. ресурс]. - Режим доступа: www.webappsec.org.
2. 1999 KDD Cup Competition [Electronic resource]. - Mode of access: <http://kdd.ics.uci.edu/databases/kddcup99/kddcup99.html>.

3. Golovko V., Vaitsekhovich L. Neural Network Techniques for Intrusion Detection // Proceedings of International Conference on Neural Networks and Artificial Intelligence (ICNNAI-2006). - 2006. - P. 65-69.
4. Головки В.А. Нейронные сети: обучение, организация и применение. Кн. 4: Учеб. пособие для вузов / Общая ред. А.И. Галушкина. – М.: ИПРЖР, 2001. – 256 с.
5. Drucker H., Schapire R. and Simard P. Improving performance in neural networks using a boosting algorithm // In S.J.Hanson, J.D.Cowan and C.L.Giles eds., Advanced in Neural Information Processing Systems 5, Denver, CO, Morgan Kaufmann, San Mateo, CA. - 1993. - P. 42-49.

НЕЙРОСЕТЕВАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ И АНАЛИЗЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ФЛУОРЕСЦЕНТНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Горошко В.В.

Белорусский государственный университет, г. Минск

Введение

Фотофизические процессы играют важную роль в природных и искусственных преобразователях энергии (хлоропласты растений, солнечные батареи). Часто фотофизические процессы в реальных системах весьма сложны и не могут быть адекватно описаны аналитически. В этом случае используют имитационное моделирование, позволяющее моделировать и анализировать поведение сколь угодно сложной системы при использовании соответствующих вычислительных ресурсов. Однако при применении на практике имитационного моделирования для анализа данных, исследователь сталкивается с рядом проблем, среди которых наиболее значимыми являются: (i) значительные временные затраты, так как имитационное моделирование, как правило, чрезвычайно громоздко в вычислительном плане; (ii) наличие не одного, а множества локальных минимумов ошибки (вследствие стохастичности имитационной модели), что делает необходимым многократный анализ данных с различными начальными приближениями неизвестных параметров.

Для решения этих проблем было предложено аппроксимировать имитационную модель некоторой гладкой зависимостью, которая бы отражала поведение, как экспериментальной системы, так и ее имитационной модели в зависимости от входных переменных и скрытых (искомых) параметров (Nazarov, 2004). В качестве аппроксиматора, способного заменить имитационную модель, было решено использовать искусственные нейронные сети (ИНС). Являясь универсальным аппроксиматором (Cybenko, 1989; Hornik, 1989), ИНС позволяют решать многие трудно формализуемые задачи.

Нами предложен метод замены имитационной модели системы искусственной нейронной сетью (ИНС) для ускорения алгоритмов оптимизации. Разработанный метод был применен для задачи моделирования флуоресценции молекулярной системы с двумя возбуждаемыми уровнями.

Теория

Основной проблемой анализа данных с использованием имитационной модели (simulation-based fitting) являются высокие временные затраты при подгонке параметров. Эта проблема может быть решена путем замены имитационной модели моделью "черного ящика" – нейронной сетью (Nazarov, 2004).

Большинство зависимостей в химии и физике могут быть представлены гладкими кривыми (если конкретная экспериментальная реализация такой зависимости будет носить стохастический характер – будем рассматривать средние значения). Это дает возможность аппроксимировать такие зависимости, а значит и имитационную модель, многослойным перцептроном.

Перед началом работы необходимо, используя имитационную модель, создать обучающую выборку и обучить ИНС. Причём и генерацию обучающей выборки, и обучение приходится повторять при любом изменении модели, в том числе, при её коррекции либо усложнении. Корректность обученной сети можно проверить, создав некоторое контрольное множество.

Описание модели

Рассмотрим систему с двумя возбуждаемыми уровнями S_1^1 и S_1^2 . Примером такой системы может служить смесь флуорофоров, часть из которых находится в неполярном окружении (масло, липиды, и т.д.), а часть – в полярном (вода). Для простоты будем считать, что ширина уровней одинакова (следовательно – одинакова ширина спектров по частотам или волновым числам).

Времена жизни возбуждения обозначим τ_1 и τ_2 . Во временной области испускание каждого из уровней будем считать моноэкспоненциальным.

Общее спектрально-временное поведение флуоресценции системы может быть описано выражением (3.3).

$$F(t, \lambda) = \sum_{i=1}^2 a_i E_i(\lambda) D_i(t), \quad (1)$$

где a_i – относительная интенсивность эмиссии с уровня (квантовый выход).

Видно, что временная (D) и спектральная (E) части независимы и легко разделимы (для более сложных процессов, например, при переносе энергии $S_1^1 \rightarrow S_1^2$ это не выполняется).

Для простоты считаем, что спектральные уширения описываются функцией Гаусса. Тогда для спектральной составляющей, выраженной в длинах волн, получаем:

$$E_i(\lambda) = \exp \left[-\Delta\nu^{-2} \left(\frac{10^7}{\lambda} - \frac{10^7}{\lambda_i} \right)^2 \right], \quad (2)$$

где $\Delta\nu$ – ширина линий, $\lambda_{1,2}$ – положения максимумов эмиссии, выраженные в нм. Множитель 10^7 служит для перехода от длины волны в нм к волновому числу с см^{-1} . Временная составляющая выражается

$$D_i(t) = \exp(-t/\tau_i) \quad (3)$$

В результате получаем картину спектрально-временного поведения флуоресценции, представленную на рис. 1.

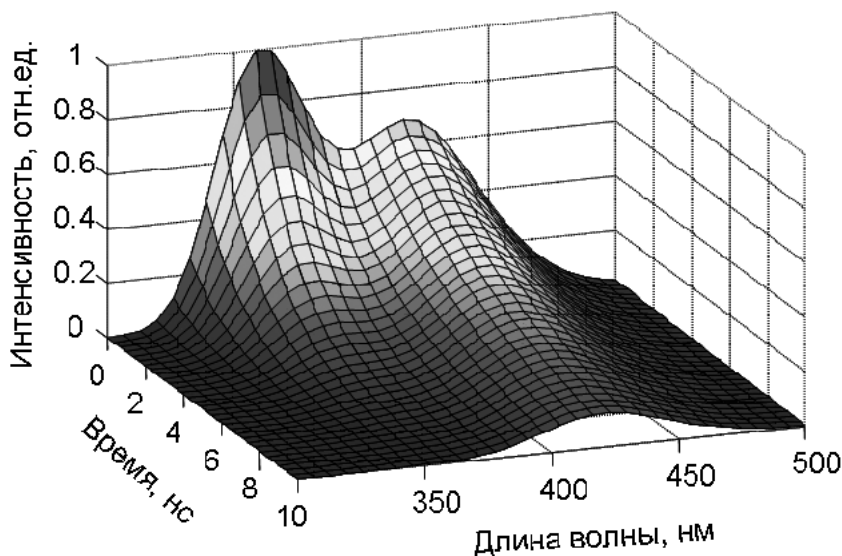


Рис. 1. Спектрально-временное поведение рассматриваемой системы. Считаем $a_1=0.6$, $a_2=0.4$

Для добавления физически оправданного шума следует учитывать природу эксперимента – для детектирования используют Streak-camera в режиме счета фотонов. Шум можно добавлять по следующей упрощенной формуле:

$$\tilde{F}(t, \lambda) = \left| F(t, \lambda) + \mathfrak{N}(0,1) \cdot \sqrt{\frac{F(t, \lambda) \cdot (a_1 \tau_1 + a_2 \tau_2)}{n}} \right|, \quad (4)$$

где \mathfrak{N} – нормально распределенная (Гауссова) случайная величина с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, n – число фотонов в одном временном канале (упрощенно). Итоговая флуоресценция является функцией t , λ , и a_i .

Результаты применения ИНС

Для замены имитационной модели было построено 2 реализации. Первой был трёх-слойный перцептрон. Необходимое число нейронов в слоях устанавливалось экспериментальным путём. Сеть обучалась методом обратного распространения ошибки с использованием алгоритма оптимизации Левенберга-Марквардта (Hagan, 1989). А также модель аппроксимировалась РБФ-сетью. Необходимое число нейронов в слоях устанавливалось экспериментальным путём

Особенностью являлось то, что сеть обучалась на зашумленном множестве, что приближает эту модель к реальности. В итоге мы получали гладкую аппроксимацию. На рисунке 2 представлен результат расчета входных данных из этого множества зашумленной функцией. А на рисунке 3 – результат работы нейросетевого аппроксиматора. То есть можно сказать, что нейронная сеть сработала в качестве своеобразного фильтра – применение искусственной нейронной сети позволило получить гладкую незашумленную функцию.

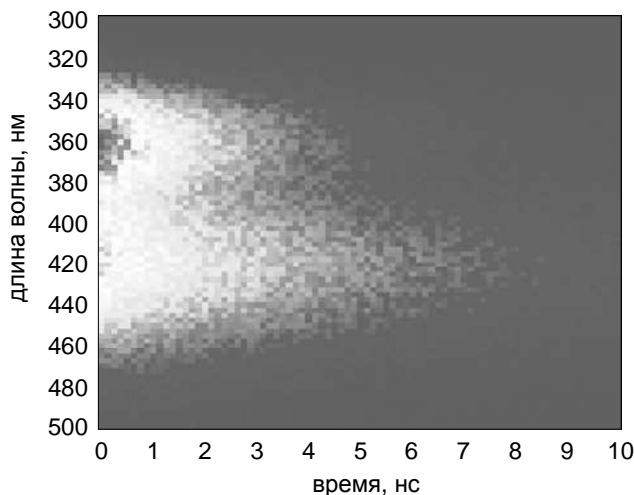


Рис. 2. Результат работы имитационной модели – спектр с разрешением по времени для двухуровневой системы (вид сверху, цвет характеризует интенсивность флуоресценции).

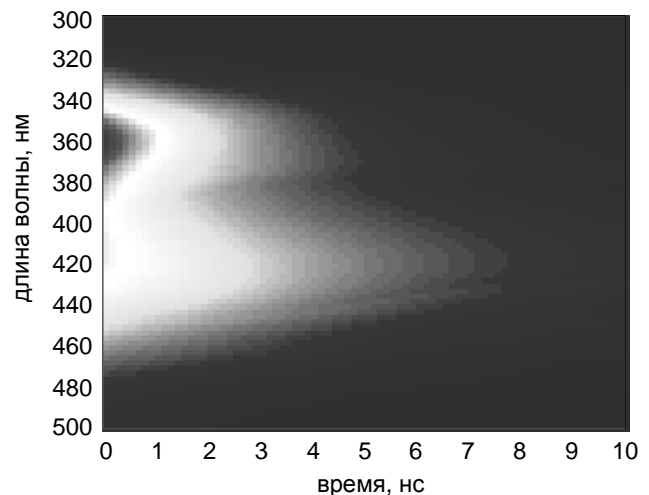


Рис. 3. Нейросетевая аппроксимация спектра (вид сверху, цвет характеризует интенсивность флуоресценции). Результат практически полностью аналогичен теоретической зависимости (рис.1).

Также отметим, что применение нейросетевого моделирования позволило ускорить получение результата в 10^4 - 10^5 .

К недостаткам метода можно отнести то, что количество варьируемых параметров ограничено. Это связано с необходимостью обучения сети на значительной репрезентативной выборке данных, растущей экспоненциально с увеличением количества изменяемых параметров модели. Также существует опасность переобучения.

Несмотря на это, метод может быть использован для быстрого получения начальных оценок при изучении функциональных зависимостей выходов систем от её входов.

Литература

1. Nazarov, P.V.; Apanasovich, V.V.; Lutkovski, V.M.; Yatskou, M.M.; Koehorst, R.B.M.; Hemminga, M.A. (2004) Artificial neural network modification of simulation-based fitting: application to a protein-lipid system. *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, 44(2), 568-574.
2. Cybenko, G. (1989) Approximations by superpositions of sigmoidal functions. *Math. Contr. Signals Syst.*, 2, 303-314.
3. Hagan, M.T.; Menhaj, M. (1994) Training feedforward networks with the marquardt algorithm. *IEEE Trans. Neural Networks*, 5(6), 989-993.
4. Hornik, K.; Stinchcombe, M.; White, H. (1989) Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural Networks*, 2(5), 359-366.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ОЧИСТКИ СТОКОВ В АЭРОТЕНКАХ НА ОСНОВЕ МНОГОСЛОЙНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Давыденко А. А.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Ключевые слова: система поддержки принятия решений, биологическая очистка, нейронная сеть, алгоритм обратного распространения ошибки.

За последние годы в жизни общества роль и место персональных компьютеров и информационных технологий коренным образом изменились. Расширился перечень сфер общественной жизни, где применяются такие технологии, помимо персонального использования людьми, также осваиваемого быстрыми темпами.

Не исключением для использования передовых технологий стали и очистные сооружения, и, в частности, участок биологической очистки в аэротенках, как один из этапов компьютеризации производства. Более общей предпосылкой для этого является напряжённая экологическая обстановка в стране, а более локальной причиной явилась необходимость оперативного реагирования на изменения в работе системы очистки.

Процесс биологической очистки может быть описан как непосредственный контакт загрязнений с оптимальным количеством организмов активного ила в присутствии соответствующего количества растворенного кислорода в течение необходимого периода времени с последующим эффективным отделением активного ила от очищенной воды [1].

Аэротенк - это резервуар прямоугольного сечения, по которому протекает сточная жидкость, смешанная с активным илом. Воздух, вводимый с помощью пневматических или механических устройств, перемешивает обрабатываемую жидкость с активным илом и насыщает ее кислородом, необходимым для жизнедеятельности бактерий [1].

Главной целью системы является помощь диспетчеру при принятии решений в любых текущих и особенно в нестандартных ситуациях в реальном режиме времени для качественно-го контроля и управления технологическим процессом биологической очистки в аэротенках.

Задачами системы являются:

1. Оптимизация расхода воздуха.
2. Выравнивание концентрации растворённого кислорода по аэротенкам.
3. Минимизации расхода электроэнергии на подачу воздуха.

Для достижения поставленной цели и решения вышеперечисленных задач предполагается использование многослойной нейронной сети. Одной из самых главных причин, по которой была выбрана нейронная сеть – её весьма эффективная способность обучаться на примерах и «узнавать» в наборе противоречивой информации приметы ранее встреченных образов и ситуаций. Так же многослойная нейронная сеть способна осуществлять любое отображение входных векторов в выходные [2].

Определение нейронной сети как «совокупности нейронных элементов и связей между ними»[2] можно перенести на рассматриваемый пример как совокупность входных, выходных и промежуточных данных и технологических связей между ними. Нейронные сети позволяют строить алгоритмы обработки информации, обладающие возможностью нахождения скрытых зависимостей между входными и выходными данными, которые остаются вне внимания традиционных методов.

Применение нейросетевых технологий особенно популярно в области финансовых рынков, современной торговли и рынков капитала [3].

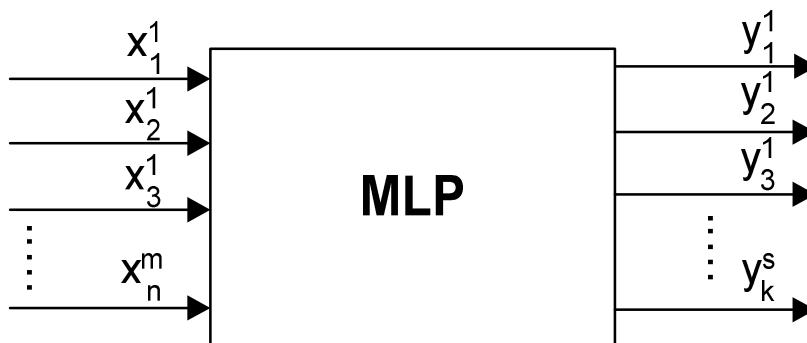


Рис.1. Упрощённая модель системы поддержки принятия решений, где MLP - multilayer perceptron

Для разрабатываемой системы поддержки принятия решения входными данными являются x_n^m (данные на входе MLP):

1. Состояние технологического оборудования (состояние нагнетателей (включён/выключен), % открытия затворов на воздуховоде, шиберов циркуляционного ила и на всасе нагнетателей, наличие аварийного состояния оборудования).

2. Текущие показания расходомеров воздуха, циркуляционного ила, осветлённой воды и воды на водосливе, датчиков концентрации растворённого кислорода в контрольных точках и на водосливе, показания интенсивности аэрации.

3. Технологические установки, задаваемые диспетчером участка биологической очистки, это:

- а) опорные значения, допустимые отклонения, минимальные и максимальные пределы концентрации растворённого кислорода в каждой контролируемой точке;
- б) минимальная интенсивность аэрации в аэротенке;
- в) степень рециркуляции в аэротенке;
- г) шаги управляемых затворов и их условные «нуль %»;
- д) идентификаторы включения затворов в схему управления;
- е) идентификаторы включения датчиков концентрации растворённого кислорода в схему управления;
- ж) величина для задействования в управлении шиберов на всасе нагнетателей;
- з) величина для задействования в управлении нагнетателей.

Эти данные можно соотнести с нейронами входного слоя.

Выходные данные системы (y_k^s) – это рекомендации по управляющим командам технологическому оборудованию:

1. Рекомендации на включение/выключение нагнетателя.
2. Рекомендации на приоткрытие/призакрытие затвора на воздуховоде, шиберов циркуляционного ила и на всасе нагнетателя.
3. Рекомендации по степени открытия шиберов циркуляционного ила.

Выходные данные системы соотносятся с нейронами выходного слоя.

Сигналы на входы нейронной сети в обработанной форме будут подаваться в режиме реального времени от автоматизированной системы управления технологическим процессом (АСУ ТП) биологической очистки в аэротенках, а сигналы с выходного слоя – обратно в АСУ ТП. Разрабатываемая система поддержки принятия решений будет непо-

средственным образом связана с данной АСУ и функционирует как составная её часть при дистанционном режиме управления оборудованием. Также данная система сможет использоваться как самостоятельное программное приложение.

В качестве обучающего метода для нейронной сети был выбран метод обратного распространения ошибки [2]. Это наиболее подходящий метод, т.к. за многие годы работы очистных сооружений была наработана достаточно большая база данных о процессе биологической очистки. После приведения среднеквадратичной ошибки сети к минимуму и наиболее корректной настройки, тем самым, весовых коэффициентов, сеть стала пригодна для работы в реальных условиях.

Нейронная сеть для системы поддержки принятия решений будет реализована и протестирована в MATLAB, а именно, с помощью окна инструментария Neural Network, специально предназначенного для моделирования и обучения нейронных сетей.

Данная система поддержки принятия решений будет иметь не только теоретический, но и практический характер. Впоследствии планируется внедрение системы на Минской станции аэрации №1.

Специально для демонстрации принципа работы системы поддержки принятия решений для биологической очистки в аэротенках разработано приложение в Scada-системе Trace Mode. Данное приложение позволяет наглядно представить результаты работы моделируемой системы при заданных исходных данных, а также проследить за изменением характеристик биологической очистки после выполнения управляющих команд. Это позволяет оценить работоспособность системы в псевдореальных условиях.

Экономический эффект от внедрения системы поддержки принятия решений может наблюдаться не сразу, но такое решение может окупиться даже в течение одного - двух лет, что является неоспоримым плюсом в пользу внедрения системы.

Литература

1. Бондарев А.В. Учебное пособие. Курс лекций. Очистные сооружения: Оценка эффективности работы отдельных звеньев очистки. Технологические расчёты. – Мн.:, 2004.
2. Головки В.А. Нейроинтеллект: теория и применение. Книга 1. Организация и обучение нейронных сетей с прямыми и обратными связями. – Брест: Изд. БПИ, 1999.
3. <http://www.tvp.ru/vnizd/mathem1.htm>

SIMULATION OF THE DECISION-MAKING SYSTEM FOR BIOLOGICAL REFINEMENT OF SEWAGE IN AEROTANKS BY MEANS OF MULTILAYER NEURAL NETWORKS

Anastasia Davydenko

Brest State Technical University, Brest

Keywords: decision-making system, biological refinement, neural network, back-propagation algorithm.

Last years in a life of society the role and the place of personal computers and information technologies have radically changed. The list of spheres of public life where such technologies are applied, besides personal use by people which also rapidly increased, has extended.

Not exception for use of high technologies sewage disposal plants are and, in particular, biological refinement in aerotanks as one of production stages computers can be involved in. The reason for it is the strained ecological situation in the country, and more local one is a need to react on-the-fly to changes in system work.

The process of biological refinement can be described as a direct contact of pollution and optimal amount of organisms of active silt which have to interact during required time and in the presence of proper amount of dissolved oxygen. The last stage is to separate active silt from pure water [1].

An aerotank is a tank of a rectangular section in which the waste liquid mixed with active silt proceeds. Air, added by means of pneumatic or mechanical devices, mixes the treated liquid with active silt and saturates it with oxygen essential for bacteria's life [1].

The main purpose of the system is to provide help to a dispatcher in decision-making in any current and, especially, non-standard situations in real time for the high quality control and management of technology processes of biological refinement in aerotanks.

The tasks of the system are:

1. Optimization of air expenses.
2. Smoothing of dissolved oxygen concentration in aerotanks.
3. Minimization of electric power expenses on air feeding.

It is supposed, that the multilayer neural network will be used to reach for the above aim and solutions of these tasks. One of the most important reason the neural network has been chosen is its high ability to be trained with samples and to recognize unknown ones. Also the multilayer neural network is capable to carry out any reflection from input vectors into target ones [2].

The definition of a neural network as a «set of neural elements and connections between them» [2] is possible to extend as a «set of the input, intermediate and output data and technology connections between them». Neural networks allow to build processing algorithms bringing the opportunity to find out latent dependences between input and output data which beyond the bounds of traditional approaches.

Neural networks are especially popular in fields of financial markets, contemporary trade and markets of capital [3].

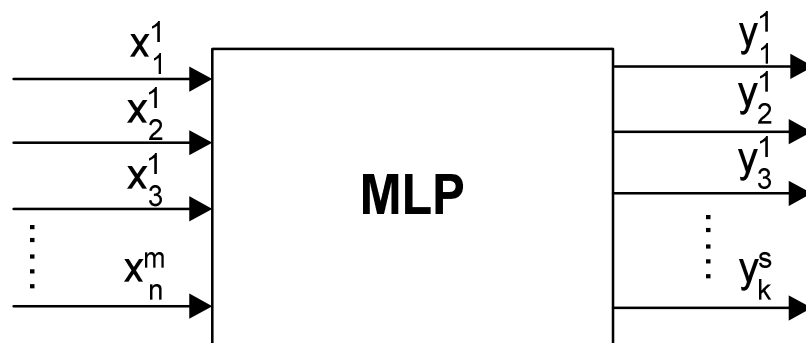


Fig.1. Simplified model of the decision-making system, where MLP is a multilayer perceptron

For the developed decision-making system the input data are x_n^m (entry data for MLP):

1. Production equipment state (states of superchargers (switched on/off), percents of gates is opened for airway, circulating silt and superchargers, existence of an equipment emergency state).

2. Current measures of consumption indicators of air, circulating silt, clarified and spillway water, sensors for concentration of dissolved oxygen in checkpoints and spillway, registration of aeration intensity.

3. Technology commands by the dispatcher:

a. basic values, maximum deviations, minimum and maximum limits of concentration of dissolved oxygen in each checkpoints;

b. minimum intensity of aeration in aerotanks;

c. level of recirculation in aerotanks;

d. controlled gates steps and their conditional «percent null»;

e. gates involvement in the control scheme indicators;

f. concentration sensors for dissolved oxygen involvement in the control scheme indicators;

g. value for supercharge gates involvement in control;

h. value for supercharges involvement in control.

These data is possible to connect with input neurons.

The output data of the system (y_{sk}) are suggestions of operating commands to the production equipments (e.g. open/close a gate, switch on/off a supercharger):

1. Suggestions to switch on/off a supercharger.
2. Suggestions to open/close gates to airway, circulating silt and superchargers.
3. Suggestions of the percent, gates to circulating silt to be opened.

The system output data are considered as output neurons.

The signals will be flowed in real time to inputs of the neural network in the processed form from the automated control system of technology processes (ACS TP) of biological refinement in aerotanks and the signals from the output layer flow back in ACS TP. The developed decision-making system will be directly involved in the given ACS TP and will work as its component under the remote equipment control mode. Also the given system will be possibly used as an independent program.

The back-propagation algorithm has been chosen as a training method for the neural network [2]. It is the most appropriate method because there is enough big database containing a lot of information about biological refinement processes gathered for many years of sewage disposal plants work. After minimization of the mean-square error of the network and getting of rather correct weights the network is good for work in real environment.

The neural network for the decision-making system will be realized and tested with MATLAB by means of the Neural Network Toolbox specially intended for neural network training and simulation.

The given decision-making system will have not only theoretical, but also practical importance. In future the system is planned to apply to Minsk aeration station No. 1.

The special program is developed in Scada-system Trace Mode for demonstration of decision-making system operation for biological refinement in aerotanks. The given program allows visually to present results of simulated system operation on a set of initial data, and also to trace changes in biological refinement after execution of control commands. It allows to estimate system performance on pseudo-real conditions.

Economic profit on this decision-making system setup can be gained not at once, but it can pay back even during one, two years that is a definite advantage of this setup.

References

1. Bondarev A.V. Manual. Lectures on sewage disposal plants: efficiency estimation of separate cleaning units. Technology calculations. Minsk, 2004.
2. Golovko V.A. Neurointellect: theory and applications. Book 1. Organization and training of feedforward and feedback neural networks. BPI, Brest, Belarus, 1999.
3. <http://www.tvp.ru/vnizd/mathem1.htm>.

ROBOT'S MOTION CONTROL ALGORITHMS ON A TASK OF LINE-FOLLOWING

Dzmitry Kaliukhovich

Brest State Technical University, Brest

Keywords: task of line-following, algorithms "Avoidance of the line", "Hold the aim in the center", "The best approximation with an arc".

At the System Engineering Laboratory, Hochschule Ravensburg-Weingarten, Germany the mobile robot "MAX" was developed and realized [1] (see Fig. 1). There is a rich set of control commands for it. It has an incorporated web-camera to observe space in front of. So it was a natural step to improve it to follow under the defined route – it's so called line-following task.

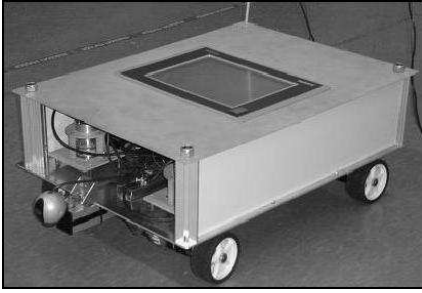


Fig. 1. Mobile robot "MAX"

To solve this task three empirical algorithms were developed: "Avoidance of the line", "Hold the aim in the center", "The best approximation with an arc" [2]. Before shortly to describe algorithms it's important to notice that the line is represented as a sequence of "median" points lying on it in the order of y-coordinate increase. To prevent losing the line tracing of commands is used. If the robot loose the line he takes the opposite motion direction to previous one.

The situation of line absence is occurred when the number of the detected "median" points is less than defined one by the user of the program.

The "Avoidance of the line" algorithm consists in permanent detection of line existence and absence and making a choice to move in direction opposite to previous one. It's similar to the preventing of losing the line technique but after finding one the robot has to loose it again (see Fig. 2). Actually in this algorithm robot follows under one border of the line. It works well at low speeds and gets bad at high ones.

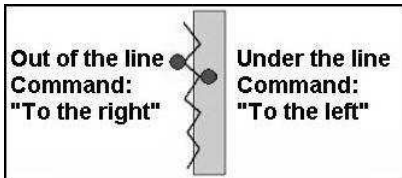


Fig. 2. "Avoidance of the line" algorithm

The "Hold the aim in the center" algorithm uses definitions of "Aim" and "Central window". The "Central window" is the central part of a shot from the web-camera with the defined dimensions by the user. The "Aim" is a point in the shot with the "median" coordinates of all points lying in the "central window". The algorithm works according to:

1. Find all points lying in the "central window".
2. Calculate the coordinates of the "aim".
3. If the "aim" point lies on the right side out of the "central window" so move to the right.
4. If the "aim" point lies on the left side out of the "central window" so move to the left.
5. If the "aim" point lies in the "central window" so move forward (see Fig. 3).

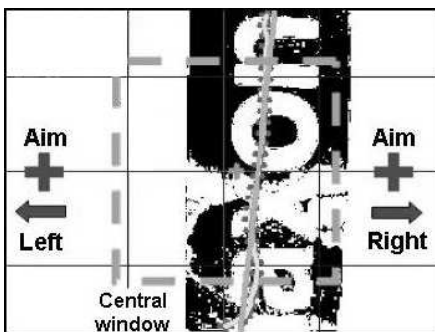


Fig. 3. "Hold the aim in the center" algorithm

The "Best approximation with an arc" is more complicated than previous ones. It's based on reflection from the approximate turning radius of the line into one for the robot. While the robot can move to the right and to the left the best arc has the center either in the $(0; 0)$ or in the $(w; 0)$, where

w is a shot width.

$$j = 0 \dots w/2, \quad (1)$$

$$R = j, \text{ if } \sum_{i=1}^N (\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - j)^2 = \min_j, \quad (2)$$

where R is the radius of the best approximating arc.

The turning radius for the robot is calculated according to:

$$R_{ROBOT} = a + \frac{2 \cdot R}{w} \cdot b \quad (3)$$

where a and b are the algorithms parameters which set by the user.

Because of the robot's construction has constraints on the turning radius by default $a = 50$ and $b = 100$. These parameter values corresponds to the robot's minimal and maximum turning radius while $R = 0$ and $R = w/2$ respectively (see Fig. 4).

This algorithm provides more high-quality and precise motion control in comparison with the previous ones thank to taking into consideration geometric parameters of the line to be followed.

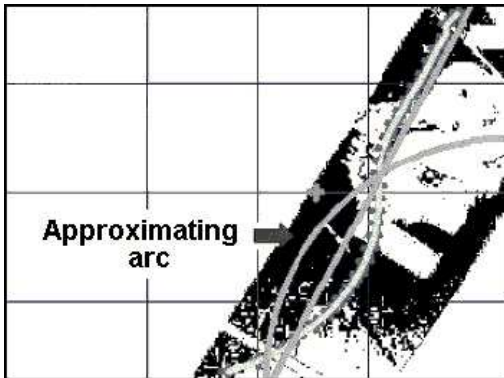


Fig. 4. “The best approximation with an arc” algorithm

The algorithms described above were implemented with C++ Builder v. 5. For tests the special route was created. It pre-sented the closed one-color (red) line made with an insulation tape on the one-color (brown) background. It consisted of different radius turnings and straight lines (see Fig. 5).

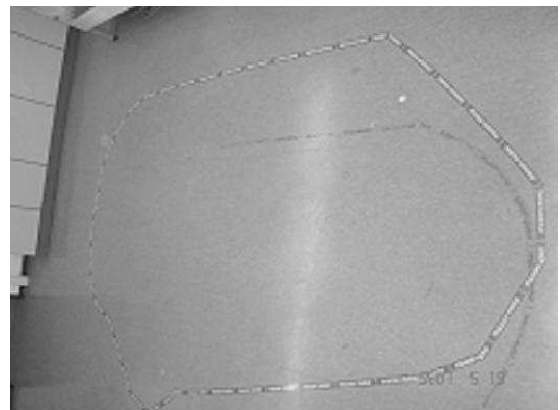


Fig. 5. Test route

The control program run under MS Windows XP, Pentium 4 2GHz and RAM 128 Mb. The speed was 4 cm/s (41% of the possible speed the robot is under control). The other parameters were by default. The tests showed that the motion was robust and rather precise. When the robot lost the line thanks to tracing of last commands it returned to the line. It should be noticed that the robot's motion was like “sinusoid” because of the small number of processing shots (approx. 2.3 per second) from the incorporated web-camera per second.

This work has done in cooperation of the Intelligent Information Technologies Department, Brest State Technical University, Belarus and the System Engineering Laboratory, Hochschule Ravensburg-Weingarten, Germany under common supervision of Prof. Dr. Vladimir Golovko and Prof. Dr. Andreas Paczynski respectively and was supported by the Landesstiftung Baden-Württemberg gGmbH.

References

1. Zajac M., Paczynski A., Stetter R., Ucinski D. Sensor/Actuator network concept for robust control of a four-wheel-steering mobile robot. Paper. Hochschule Ravensburg-Weingarten, Weingarten, Germany. 2006.
2. Dzmitry Kaliukhovich. Design and comparative analysis of robot's motion control algorithms on a task of line-following. Diploma paper. Brest State Technical University, Brest, Belarus. 2007.

ПРОБЛЕМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕЙРОСЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АНАЛИЗА СОЦИАЛЬНЫХ И ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Скулович О. З.

*Международный государственный экологический университет
им. А.Д.Сахарова, г. Минск*

В процессе изучения среды жизнедеятельности человека неизбежно происходит столкновение с огромным количеством воздействующих факторов различной природы, которые также могут давать многообразные результирующие эффекты в результате взаимного наложения и усиления. В самом широком смысле можно разделить среду обитания человека на природную, характеризующуюся непрерывностью своих подсистем, и прерывную - антропогенную. Антропогенная система в результате своего функционирования и развития оказывает увеличивающееся отрицательное воздействие на экологическую ситуацию внутри микросистем, ухудшая экологическую обстановку. Однако при разработке интегральной модели, описывающей среду жизнедеятельности человека, невозможно не учитывать воздействие социальной подсистемы. При таком многообразии факторов и зависимостей использование традиционных методов моделирования и прогнозирования может оказаться нерентабельным вследствие своей сложности, длительности разработки, а также невозможности в некоторых случаях справиться с задачами исследования[1].

Базируясь на вышеперечисленных аргументах, была поставлена задача изучения возможности применения нейросетевых технологий для решения задач анализа социальных и экологических явлений.

Исследуя возможность использования в качестве входных и выходных данных сети те или иные параметры, были приняты следующие решения. В качестве интегрального показателя, описывающего качество среды, и, соответственно, выходного параметра нейронной сети, было выбрано значение ожидаемой продолжительности жизни. Подробно о релеванности использования этой величины для описания качества жизни в системе «Человек – окружающая среда» (см. [2,3]). В качестве входных данных использовались статистические данные за последние 10 лет, описывающие различные факторы среды жизнедеятельности человека. В том числе социальные – ВВП, реальные располагаемые денежные доходы населения, показатель сельского хозяйства, показатель промышленности, уровень преступности, количество браков, разводов, уровень безработицы, уровень алкоголизма, численность врачей. А также следующие экологические факторы – выбросы вредных веществ, в том числе свинца и его соединений, сернистого ангидрида, окиси углерода, окислов азота, летучих органических соединений (ЛОС), углеводородов (без ЛОС), соединений серы (в пересчете на серу); уровни сброса сточных вод, образования токсичных отходов, мощности экспозиционной дозы излучения. На базе Neural network Toolbox пакета MatLab 7.0 была построена однонаправленная нейронная сеть прямой передачи сигнала.

Т.к. объем статистических данных оказался очень ограниченным, для проверки адекватности модели, помимо стандартных операций, исследовалось в том числе поведение сети в условиях с заранее предсказуемыми результатами. При прогнозе на будущее и постоянном увеличении объективно неблагоприятных факторов среды созданная нейронная сеть давала ожидаемый результат уменьшения ожидаемой продолжительности жизни. Аналогичный опыт, проводившийся для увеличения благоприятных факторов, также дал непротиворечивый результат.

Для этой же нейронной сети было проведено исследование наиболее значимых, с точки зрения влияния на продолжительность жизни, факторов, а также факторов, действие которых усиливается с течением времени [2,3]. В ходе анализа каждый фактор по очереди фиксировался на уровне 1995 г. и по величине отклонения результатов работы сети на этих данных и на всем массиве судилось о значимости этого фактора. Среди социальных факторов максимальное отклонение, а, следовательно, и степень влияния на

продолжительность жизни отмечается для ВВП и продукции сельского хозяйства. Кроме того, явно заметно наличие кумулятивного эффекта для таких факторов, как уровень ВВП и алкоголизм. Те же исследования для экологических факторов показывают максимальный уровень влияния для величин выбрасываемых вредных веществ, относительно высокий уровень для сернистого ангидрида, окиси углерода, окислов азота, углеводородов (без ЛОС), мощности экспозиционной дозы излучения, сброса сточных вод. Сильный кумулятивный эффект заметен для соединений серы.

В опытах, направленных на определение ситуаций, в которых сеть давала бы неприемлемый выход, был отмечен серьезный недостаток сети – ее крайняя неустойчивость. Данная нейросетевая модель, содержащая 21 нейрон только во входном слое, а также 2 скрытых слоя с нейронами, оказалась сильно подвержена изменениям даже при малых флуктуациях параметров.

Оптимизация нейросетевой модели проходила в двух направлениях – выделение среди всех входных параметров ведущих и несущественных факторов, а также уменьшение количества нейронов и слоев сети[2].

Была собрана база данных по шести областям Республики Беларусь и г. Минску, включающая 16 параметров, доступных в статистических справочниках регионов Республики. Благодаря расширению статистической базы, стало возможным проведение оценки значимости параметров методами пошагового регрессионного, а также корреляционного анализа.

В результате были выявлены ведущие признаки по каждой области, отдельно для мужского, женского и всего населения в целом. Проведение поиска наиболее значимых параметров по республике в каждый отдельно взятый год позволило как выявить признаки, характеризующиеся наиболее устойчивым влиянием, так и определить, что ведущие признаки в 90-е гг. XX в. и после 2000 г. разнятся. По результатам обработки полученного набора ведущих факторов, а также с применением Neural Network toolbox пакета Statistica, количество входных параметров нейронной сети было сокращено до следующих восьми: реальные располагаемые денежные доходы населения, производство промышленности, количество преступлений, количество разводов, алкоголизм, выбросы вредных веществ, выбросы сернистого ангидрида, сброса сточных вод.

Для того, чтобы избежать переобучения, а также для повышения устойчивости, количество внутренних слоев и нейронов в модели также было уменьшено. В результате, нейронная сеть имеет 8 нейронов во входном слое (по числу компонент входного вектора), один скрытый слой, содержащий 5 нейронов, и 1 нейрон в выходном слое (по числу компонент выходного вектора) [2].

Результаты проверки подтвердили большую устойчивость оптимизированной модели по сравнению с изначальной при моделировании и прогнозе, что иллюстрируют рис. 1 (а,б).

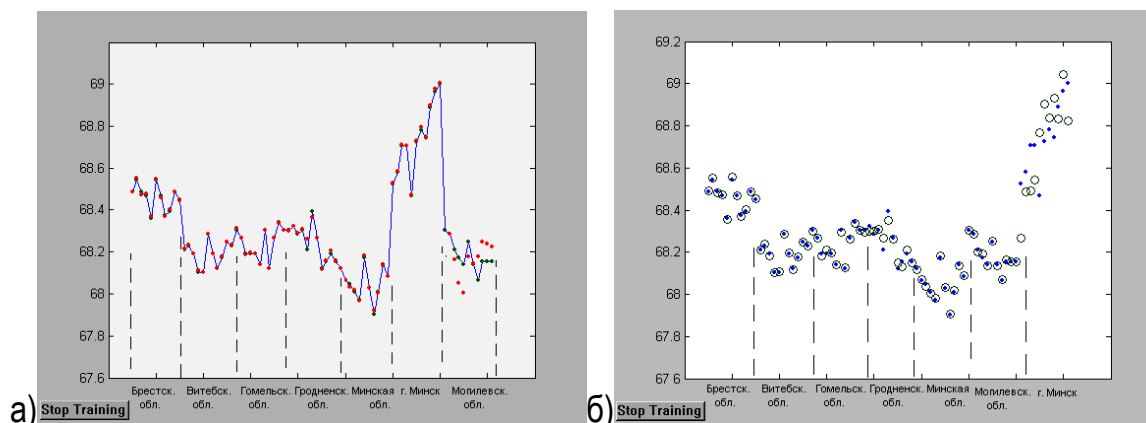


Рис. 1. Предсказание нейросетью величины ожидаемой продолжительности жизни для Могилевской области (а) и г. Минска (б)

Таким образом, не зависимо от того, лежат ли искомые значения прогноза в области средних по республике значений ОПЖ или значительно превосходят эти значения (как в случае прогноза ОПЖ для г. Минска), оптимизированная нейронная сеть справляется с прогнозом и показывает достаточную устойчивость.

В заключение стоит отметить, что оптимизация нейронной сети путем сокращения входных параметров до восьми ведущих (предварительно отобранных статистическими методами и специальными методами нейронных сетей) и упрощение ее внутренней структуры позволила значительно увеличить устойчивость сети при прогнозе.

Все эти тезисы применимы при разработке долгосрочных и краткосрочных программ по уменьшению негативного влияния окружающей среды на жизнь и здоровье человека, т. к. позволяют определить те приоритетные направления, на которые следует особо обратить внимание.

Литература

1. Тенденции заболеваемости, смертности и продолжительности жизни населения РБ. под общ. ред. д.с.н. Л.П. Шахотко – Минск, 2003.
2. Гринберг А.С., Иванюкович В.А., Скулович О.З. Нейросетевое прогнозирование и анализ ожидаемой продолжительности жизни. // Управление информационными ресурсами: материалы IV Международной научно-практической конференции. Минск, 17 мая 2006 г. – Мн., Акад. упр. при Президенте РБ, 2006.
3. Иванюкович В.А., Скулович О.З. Нейросетевая модель ожидаемой продолжительности жизни. / Тезисы докладов III международного экологического симпозиума в городе Полоцке: В 2-х т. Т. 2. – Полоцк: ПГУ, 2006.

МЕТОДЫ РАСПОЗНАВАНИЯ ИЗОМОРФИЗМА НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

Теленкевич Р.С.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Введение

Важным разделом современной дискретной математики является теория графов. Родившись при решении головоломок и игр, эта теория стала мощным средством исследования и решения многих задач, возникающих при изучении больших и сложных систем.

Практическая роль графов возросла за последние годы в связи с интенсивным развитием таких направлений, как автоматизированные системы планирования, проектирования и управления, разработка и создание интеллектуальных систем обработки информации, представление задач, данных, знаний и методов поиска решений в искусственном интеллекте и т. д.

Одной из центральных комбинаторных проблем теории графов является проблема распознавания изоморфизма или эквивалентности двух графов. Она состоит в следующем: для заданных графов H и G требуется определить, существует ли взаимно однозначное отображение между множествами вершин графов, сохраняющее отношение смежности вершин.

Алгоритмы распознавания изоморфизма и изоморфного вложения графов необходимы при решении многих прикладных задач, например, таких, как:

- организация логического вывода на семантической сети;
- синтаксическое распознавание образов;
- эффективное представление в памяти ЭВМ структур данных;
- оптимизация вычислений в сети процессоров;
- автоматизация проектирования дискретных устройств ЭВМ и РЭА на основе унифицированного набора блоков;
- автоматизация контроля в САПР БИС;

- разработка информационно-поисковых систем и систем логического вывода на основе сравнения с образцом;
- идентификация структуры дискретных систем, в частности, логических сетей и булевых функций;
- структурный синтез линейных избирательных цепей; исследование топологии сетей ЭВМ и многопроцессорных систем;
- исследование молекулярных структур химических соединений;
- автоматический анализ содержания документов.

Определим более формально изоморфизм неориентированных графов.

Пусть даны два неориентированных графа $G = (X, F)$ и $H = (Y, P)$,

где X и Y — множества вершин:

$|X| = |Y| = n$, а $F : X \rightarrow X$ $P : Y \rightarrow Y$ — отображения множеств вершин в себя.

Через F_x и P_y , где $F_x \in X$, $P_y \in Y$, обозначим множества вершин, смежных соответственно с x из X и y из Y .

Графы G и H называются изоморфными, если существует взаимнооднозначное отображение $\varphi : X \rightarrow Y$, переводящее G в H , т. е. для любой такой пары x из X и y из Y , что $\varphi x = y$, имеет место $\varphi(F_x) = P_y$.

Методы распознавания изоморфизма графов

Задача распознавания изоморфизма графов (РИГ) занимает особое положение среди прочих комбинаторных задач теории графов — неизвестно, относится ли она к классу P или является NP -полной задачей. Это обстоятельство поддерживает оптимизм исследователей при поиске полиномиальных алгоритмов РИГ и оправдывает существование двух подходов к разработке алгоритмов решения задач РИГ.

Первый подход связан с построением непереборных алгоритмов, рекурсивно улучшающих свою эффективность в смысле полноты или чувствительности используемых характеристик графа, инвариантных относительно изоморфизма графов и называемых инвариантами. Поскольку инвариант графа не меняет своих значений на изоморфных графах, то равенство инвариантов является необходимым условием изоморфизма графов. Примерами инвариантов графа G могут являться: число вершин $n(G)$, число ребер $m(G)$, вектор локальных степеней вершин $s(G)$, число циклов заданной длины в графе и т. п. К числу наиболее важных инвариантов графа относится: плотность $\varphi(G)$ - число вершин наибольшего полного подграфа в G ; неплотность $\varepsilon(G)$ - наибольшее число попарно несмежных вершин графа G , хроматическое число $\gamma(G)$ графа G , число компонент $\chi(G)$ графа, число Хадвигера $\eta(G)$ — количество вершин наибольшего полного графа, на который можно стянуть G . Наряду с приведенными, в качестве инварианта графа можно рассматривать не одно число, а систему чисел. Например, в качестве инварианта можно выбрать вектор значений $(\varphi(G), \varepsilon(G), \gamma(G), \chi(G), \eta(G))$. Все перечисленные, а также многие другие инварианты не гарантируют изоморфизма графов, т. е. не являются полными. Полным инвариантом графа G является такая функция $f(G)$, для которой равенство $f(G) = f(H)$ выполняется тогда и только тогда, когда графы G и H изоморфны.

Классификация непереборных методов РИГ основана на разнообразии классов инвариантов, используемых в алгоритмах. Различают три класса инвариантов: локальные, квазиглобальные, глобальные. Примером локального инварианта является кортеж степеней вершин графа $s(G)$. Примером квазиглобального инварианта является кортеж степеней пар вершин. Канонический вид матриц смежности графа, при котором двоичный код матрицы является минимальным или максимальным, является примером глобального инварианта.

Второй подход к разработке алгоритмов решения задач РИГ отличается от первого тем, что обязательно включает процедуру перебора на одном из этапов поиска изоморфной подстановки.

Большинство известных переборных алгоритмов РИГ основано на разбиении множеств вершин каждого из графов на подмножества, которые в случае изоморфизма графов также должны соответствовать друг другу. Наиболее простым и естественным критерием для построения разбиения в неориентированных графах является локальная степень вершин, а для ориентированных графов разбиение можно вести по числу входящих и выходящих дуг. В ряде случаев это разбиение может дать повершинное соответствие, которое затем следует проверить в качестве подстановки.

В большинстве переборных алгоритмов используется следующая организация перебора. Пусть имеем два соответствующих разбиения вершин графов. При их получении последовательно k раз применялось ветвление, т. е. произвольный выбор пар соответствующих вершин, причем оказалось, что подстановку изоморфизма достроить не удастся, т. к. либо число подмножеств в разбиениях множеств вершин каждого из графов оказалось разным, либо число вершин в соответствующих подмножествах не равно. Тогда в последнем ветвлении попытаемся выбрать другую вершину второго графа в качестве соответствующей той же вершине первого. Если это невозможно, т. к. все вершины соответствующего подмножества уже выбирались, то попытаемся выполнить ту же операцию в предпоследнем ветвлении, возвращаясь к существовавшим в тот момент разбиениям и так далее, до тех пор, пока не получим подстановку изоморфизма или не исчерпаем все возможности перебора вершин.

Итак, все известные переборные алгоритмы РИГ используют ту или иную модификацию метода ветвлений с отсечениями. При этом множество алгоритмов можно разделить на две группы. В алгоритмах, относящихся к первой группе, строится частичная подстановка вершин, на основе которой множества вершин графов разбиваются на подмножества, по мощности не превышающие степени вершин. Разбиение на подмножества осуществляется по связности с вершинами частичной подстановки. При этом в разбиении отыскиваются одновершинные подмножества, которые позволяют достроить подстановку и продолжить процесс подразбиения путем деления вершин в подмножествах на смежные и несмежные выбранному одновершинному подмножеству. Если все одновершинные подмножества уже использовались для получения подразбиений, то предлагается выполнять выбор пары вершин из соответствующих подмножеств минимальной неединичной мощности и продолжать далее процесс достраивания подстановки изоморфизма и получения подразбиений, пока это возможно.

Ко второй группе относятся алгоритмы, суть которых состоит в разбиении множества вершин по числу связей с подмножествами, вошедшими в уже имеющееся на данном шаге разбиение. При этом для каждой вершины определяется число смежных вершин в каждом из подмножеств. Эти характеристики используются для подразбиения соответствующих подмножеств вершин каждого из графов. Очевидно, что изоморфными могут быть только те вершины, которые принадлежат соответствующим подмножествам и имеют равные характеристики. Возникшие в результате подразбиения подмножества могут вновь использоваться для подразбиения и так далее, до тех пор, пока этот процесс будет применим. Затем либо необходимо будет использовать ветвление и изменить соответствие между последней парой вершин в построенной частичной подстановке, либо будет построена подстановка изоморфизма. При построении подразбиений необходимо проверять равенство мощностей соответствующих подмножеств.

Литература

1. А.Н. Мелихов, Методы распознавания изоморфизма и изоморфного вложения графов. - Таганрог: ТРТУ, 1995.
2. А. А. Зыков, Основа теории графов. - М.: Наука, 1987.
3. Ali Shokoufandeh. Peer-to-peer networks based on random transformations of connected regular undirected graphs. Journal of Algebraic Combinatorics: An International Journal. Volume 19, Issue 3 (May 2004) Pages: 257 – 272.
4. Д.И. Цветкович, Спектры графов. Теория и применение - Киев: Наукова думка, 1984.

НЕЙРОННЫЕ СЕТИ: МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА СЖАТИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Трофимук В.А., Цветков А.А.

Белорусский государственный университет, г. Минск

В качестве базовой была взята методика сжатия, применявшаяся при обработке изображений спектрометрической системы орбитальной космической станции «МИР». Данный алгоритм был модифицирован.

Основные моменты базового алгоритма [1].

Исходное двумерное изображение представляется в виде совокупности $x(k) = (x_1(k), \dots, x_m(k))$, $k = 1, \dots, N$, $m = \mu_1 \mu_2$ непересекающихся фрагментов. Фрагменты представляют собой образцы, предъявляемые сети для обучения.

Возьмём двухслойную сеть. Первый слой содержит n нейронов. Его вход — вектор $\mathbf{p} = \mathbf{x}(k)$, а выход — вектор $\mathbf{a}^{(1)}$ с компонентами

$$a_i^{(1)}(k) = \sum_{j=1}^m w_{ij}^{(1)} x_j(k), \quad i = 1..n$$

Этот слой является кодером. Для каждого фрагмента $\mathbf{x}(k)$ вычисляется вектор коэффициентов кодирования $\mathbf{a}^{(1)}(k)$.

Роль декодера выполняет второй слой сети, который по вектору $\mathbf{a}^{(1)}(k)$ пытается восстановить фрагмент $\mathbf{x}(k)$:

$$a_j^{(2)}(k) = \sum_{i=1}^n w_{ji}^{(2)} a_i(k), \quad j = 1..m$$

Значения коэффициентов весовых матриц $\mathbf{W}^{(1)}$ и $\mathbf{W}^{(2)}$ не зависят от фрагментов и определяются условием достижения минимума ошибки

$$\min_{w^{(1)}, w^{(2)}} \hat{F}, \quad \hat{F} = \sum_{j=1}^m \left[x_j(k) - a_j^{(2)}(k) \right]^2$$

Для определения весовых коэффициентов применяется базовый вариант алгоритма обратного распространения ошибки [2].

Для восстановления изображения нужно сохранить все $x_j(k)$ и параметры декодера $\mathbf{W}^{(2)}$. Из-за заголовка с параметрами реальный коэффициент сжатия меньше m/n , он определяется не только количеством нейронов в каждом из слоев, но и размером изображения, и при увеличении размера асимптотически приближается к m/n (качество при этом ухудшается). Если число точек изображения равно P , то выражение для коэффициента сжатия имеет вид:

$$\gamma = \frac{m}{n} \frac{1}{1 + \frac{m^2}{P}}$$

Предложенная нами модификация алгоритма заключается в следующем. Изображение делится на l независимых сегментов, которые сжимаются описанным выше способом, и в архив записываются l наборов $\mathbf{W}^{(2)}$. Коэффициент сжатия для конкретного изображения определяется его размером и значениями l , m и n . Одному и тому же коэффициенту сжатия соответствуют различные тройки (l, m, n) , качество при этом разное. Выражение для коэффициента сжатия примет вид:

$$\gamma = \frac{m}{n} \frac{1}{1 + \frac{m^2 l}{P}}$$

Смысл использования модифицированного алгоритма становится понятен, если учесть, что внутри небольшого фрагмента цвета точек близки, а сами фрагменты, находящиеся в разных частях изображения, существенно отличаются. Так, пусть требуется сжать в два раза достаточно большое изображение, содержащее сегмент, описываемый восемнадцатью числами от 0 до 34 через 2. Если применять базовый алгоритм, то можно взять $m=2$, $n=1$. Изображение велико, за счет чего, во-первых, фактический коэффициент сжатия достаточно точно равен двум, во-вторых, из-за совершенно различных цветов в разных частях изображения сжатие сведется к замене чисел, задающих цвета пары соседних точек, на их среднее. При этом средняя ошибка передачи указанного сегмента составит 1 тчк⁻¹. Если использовать модифицированный алгоритм с $(m, n)=(3, 1)$ и восемнадцатью точками в сегменте, то, как показывает несложный расчет, средняя ошибка передачи указанного сегмента составит 0,71 тчк⁻¹, или, с учетом округлений, 0,67 тчк⁻¹.

Литература

1. Голубев Ю.Ф. Нейронные сети в мехатронике //Фундаментальная и прикладная математика. - М.: МГУ, 2005, Т. 11, Вып. 8, С. 81-103
2. Лутковский В.М. Нейронные сети: Конспект лекций. - Мн.: БГУ, 2003.

РАЗДЕЛ II. РАСПОЗНОВАНИЕ ОБРАЗОВ И АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ

МЕТОДЫ ПОКРЫТИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКАМИ ОБЪЕКТОВ ТОПОЛОГИИ МИКРОСХЕМ ТИПА «ШИНА»

Воронов А.А.

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, г. Минск

Введение

При производстве интегральных схем, фотоэлектрических преобразователей, ЖК-индикаторов, а также многих других микроэлектронных устройств возникает задача формирования топологических структур на металлизированных фотошаблонах. Эти структуры формируются с помощью специальных генераторов изображений. Особенностью этих генераторов является то, что они способны формировать лишь ограниченный спектр структур. Для создания произвольных топологических структур необходимо найти покрытие исходной структуры совокупностью более простых структур, которые может сформировать генератор изображений. Топологические структуры описываются многоугольниками. Генераторы изображений чаще всего формируют прямоугольники. Следовательно, задача формирования фотошаблона сводится к задаче покрытия произвольного многоугольника совокупностью прямоугольников [1].

Данная задача не является новой. Разработаны эффективные методы ее решения [1], однако при проектных нормах меньше 1 мкм возникают значительные трудности при генерации изображений, так как возрастает объем топологии и ее сложность. Поэтому разработка новых методов решения задачи покрытия прямоугольниками объектов топологии микросхем является актуальной.

Многоугольник является некоторой областью плоскости. Эта область может быть представлена контуром. Контур задается цепочкой отрезков прямой, начало которой соединяется с ее концом.

Ниже под покрытием многоугольника понимается его разложение в совокупность прямоугольников, объединение которых совпадает с исходным многоугольником [2].

Среди объектов топологии микросхем выделяются такие объекты, как окружности, кольца, шины. Для них разрабатываются специальные алгоритмы покрытия, которые по сравнению с универсальными алгоритмами оказываются более эффективными как по быстродействию, так и по качеству решения.

В настоящей работе рассматривается задача покрытия объектов топологии микросхем типа шины [1] и предлагаются алгоритмы ее решения. Предлагаемые методы запрограммированы на языке C++. Приводятся результаты экспериментальных исследований этих методов на реальных примерах.

1 Постановка задачи

Шина – это электрический проводник в виде металлической полосы, применяемый в микросхемах для передачи электроэнергии или информационных сигналов. Графически шина может быть представлена ломаной с постоянной ненулевой толщиной. Соответственно, шина задается трассой в виде ломаной и шириной этой трассы. Трасса представляется в виде последовательности вершин: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$. Вершина с номером i ($1 \leq i \leq k$) в этой последовательности задается координатами x_i, y_i . Каждая соседняя пара вершин $(x_j, y_j), (x_{j+1}, y_{j+1})$ этой последовательности, где $(1 \leq j < k)$, задает отрезок прямой. Таким образом, данная последовательность вершин задает последовательность отрезков, из которых и состоит трасса.

По трассе шины и ее ширине можно найти точки контура многоугольника, задающего эту шину.

Будем говорить, что прямоугольник принадлежит многоугольнику, если любая точка плоскости, находящаяся внутри или на границе этого прямоугольника, находится внутри или на границе многоугольника.

Прямоугольник называется d -допустимым, если длина любой из его сторон не превышает некоторой величины d , где d является положительным вещественным числом.

Точка плоскости r , находящаяся внутри или на границе многоугольника, называется d -покрываемой, если существует d -допустимый прямоугольник, принадлежащий данному многоугольнику, такой, что точка r находится на границе или внутри данного прямоугольника.

Заметим, что в многоугольнике могут существовать точки, расположенные около острых углов, которые не являются d -покрываемыми. Так, точка плоскости, находящаяся в вершине острого угла, не является d -покрываемой для любой величины d .

Под покрытием многоугольника понимается совокупность d -допустимых прямоугольников, удовлетворяющих следующим условиям:

- всякий прямоугольник из данной совокупности принадлежит данному многоугольнику,
- для всякой d -покрываемой точки r многоугольника найдется хотя бы один прямоугольник этой совокупности такой, что точка r находится на границе или внутри данного прямоугольника [3].

В настоящей работе рассматривается следующая задача.

Необходимо найти для шины, заданной трассой и шириной трассы s , покрытие, состоящее из минимального числа d -допустимых прямоугольников.

Прямоугольники в покрытии, как правило, пересекаются между собой. Важной характеристикой покрытия является сумма площадей пересечений прямоугольников в нем. Чем эта величина меньше – тем лучше. Вычисление этой характеристики является сложной задачей, поэтому она на практике не используется, однако при выборе метода решения задачи покрытия предпочтение отдается методу, позволяющему находить покрытие, в котором сумма площадей пересечений прямоугольников была бы наименьшей.

2 Алгоритм формирования покрытия шины

В настоящей работе предлагаются три алгоритма покрытия шины, которые отличаются друг от друга методами покрытия острого угла. Способ покрытия участков шины, не содержащих острых углов, в этих алгоритмах один и тот же. Этот способ состоит из двух этапов.

На первом этапе из исходного списка координат вершин $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$ трассы шины [4] получаем набор векторов, представляющий эту трассу:

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1), (x_3 - x_2, y_3 - y_2), \dots, (x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1}). \quad (1)$$

Затем находим вектора, перпендикулярные полученным. Эти вектора будут иметь следующие координаты:

$$(y_2 - y_1, x_2 - x_1), (y_3 - y_2, x_3 - x_2), \dots, (y_k - y_{k-1}, x_k - x_{k-1}). \quad (2)$$

Далее нормируем вектора-перпендикуляры до единичной длины. Для этого координаты перпендикуляров делим на соответствующие длины отрезков трассы, и выполняем масштабирование этой нормы векторов по ширине s шины. Для первого перпендикуляра получим следующие координаты нормируемого вектора:

$$m_1 = \frac{s(y_2 - y_1)}{2\sqrt{((y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2)}} \quad (3)$$

$$n_1 = \frac{s(x_2 - x_1)}{2\sqrt{((y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2)}} \quad (4)$$

Аналогичным образом вычисляем и все остальные нормированные вектора-перпендикуляры.

Для каждого отрезка трассы шины находим прямоугольник. Так, для первого отрезка трассы вершины A_1, B_1, C_1, D_1 прямоугольника задаются соответственно координатами:

$$(x_1 + m_1, y_1 + n_1), (x_2 + m_1, y_2 + n_1), \quad (5)$$

$$(x_2 - m_1, y_2 - n_1), (x_1 - m_1, y_1 - n_1). \quad (6)$$

Точно так же находим координаты вершин остальных прямоугольников.

Результаты выше приведенных вычислений для некоторой шины в графической форме представлены на рис. 1, а.

На втором этапе выполняется корректировка полученных прямоугольников таким образом, чтобы они образовали искомое покрытие. Для этого необходимо увеличить длины найденных прямоугольников так, чтобы ликвидировать непокрытые участки шины на изломах трассы. Пример такого излома показан на рис. 2. Исходные вершины трассы T_1, T_2, T_3 . Прямоугольники покрытия $A_1, B_1, C_1, D_1; A_2, B_2, C_2, D_2$. При обходе слева направо вершины B_1, C_1, B_2, C_2 будем называть внешними, а вершины A_1, D_1, A_2, D_2 внутренними соответственно. Найдем координаты возможных вершин прямоугольников, входящих в покрытие (внешней и внутренней) по отношению к текущей точке трассы. На рис. 2 это точки O_1 или O_2 относительно T_2 . Координаты точек O_1, O_2 вычисляются как точки пересечения прямых, которые заданы координатами прямоугольников, полученными на первом этапе. На рис. 2 координаты точки O_1 находятся как координаты пересечения прямых, проходящих через точки B_1, C_1 и B_2, C_2 соответственно. Координаты точки O_2 находятся как координаты пересечения прямых, проходящих через точки D_1, A_1 и D_2, A_2 .

Пусть T_1, T_2, T_3 - точки рассматриваемой трассы, заданные соответственно координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Причем пары точек (T_1, T_2) и (T_2, T_3) являются соседними. Найдем отклонение по знаку для точки T_3 следующим образом.

Находим уравнение прямой $x \cos(z) + y \sin(z) - p = 0$ (нормальное уравнение прямой), проходящей через точки T_1, T_2 , где

$$\cos(z) = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}, \quad (7)$$

$$\sin(z) = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}, \quad (8)$$

$$p = x_1 \times \sin(z) + y_1 \times \cos(z). \quad (9)$$

По координатам точки T_3 вычисляем величину

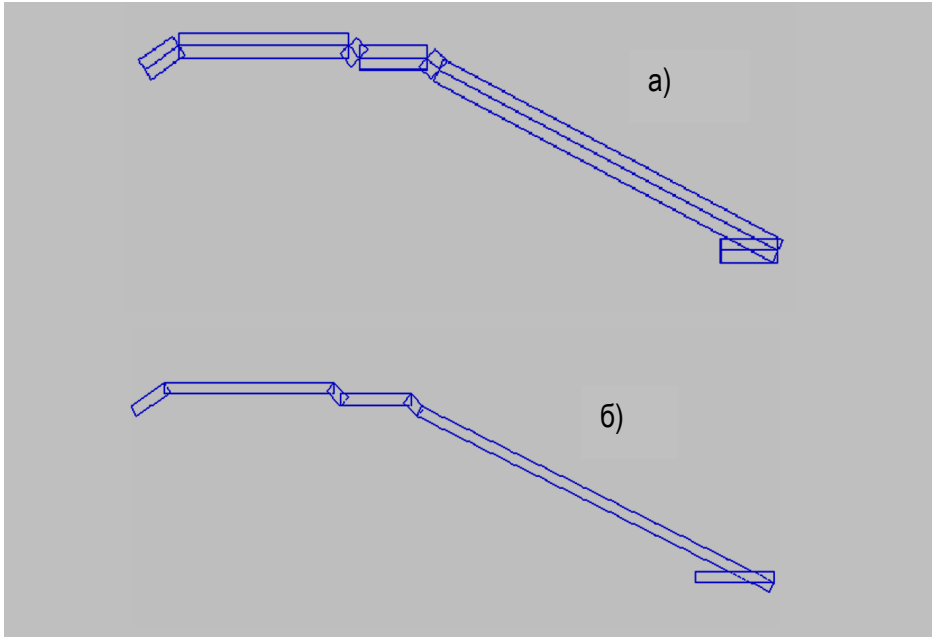
$$otklon = x_3 \times \cos(z) + y_3 \times \sin(z) - p. \quad (10)$$

Знак величины *otklon* задает искомое отклонение, то есть определяет вправо или влево (наружу или вовнутрь) отклоняется следующий участок трассы при ее обходе. В зависимости от знака выбираем внешнюю или внутреннюю (правую или левую) вершину пересечения прямых (на рис. 2 вершину O_1 или O_2). При этом рассматриваются только стороны, параллельные исходным участкам трассы. Для случая, приведенного на рис. 2, это будет точка O_1 . Опираясь на эти точки, а также на координаты норм векторов m_i и n_i , найдем координаты вершин прямоугольника, входящего в искомое покрытие шины.

Парными вершинами назовем вершины A_1, B_1 или C_1, D_1 и т. д. Для получения координат точек, являющихся вершинами прямоугольников входящих в покрытие, вычисляем координаты точки, ближайшей к рассматриваемой вершине пути (парной к базовой точке). Эта вершина будет отличаться от координаты избранной базовой точки на величину $2m_i$ и $2n_i$ соответственно для значений оси Ox и оси Oy . На рис. 2 эта точка полу-

чается зеркальным отражением точки O_1 относительно прямой, проходящей через отрезок (T_1, T_2) . Таким же образом проходим все точки трассы. На рис. 1,б представлен результат выполнения второго этапа алгоритма для шины. На этом рисунке дано результирующее покрытие, оно полностью совпадает с исходным изображением шины, кроме случая острого угла, где происходит выход за границы исходного изображения шины.

Алгоритмы получения покрытия острого угла описаны ниже. Для покрытия острого угла применяются различные подходы, но единственным определяющим фактором выбора того или иного подхода является минимальная длина d стороны прямоугольника, который может входить в искомое покрытие. Эта длина определяется минимально допустимым размером, который может быть позиционирован лазерным генератором изображений. Ниже предлагается три метода покрытия острого угла.



а) изображение шины после обработки на первом этапе;
б) изображение шины после обработки на втором этапе алгоритма
Рис. 1. Изображение шины

Один из этих методов оптимален по количеству прямоугольников, входящих в покрытие, а два других - по площади пересечения прямоугольников в покрытии. Выбор конкретного метода может быть обусловлен конкретным механизмом работы лазерного генератора.

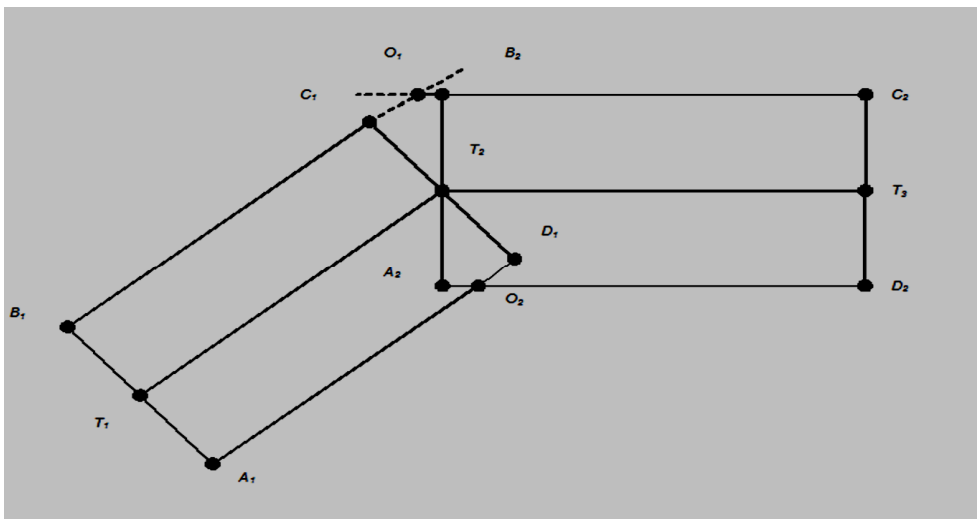


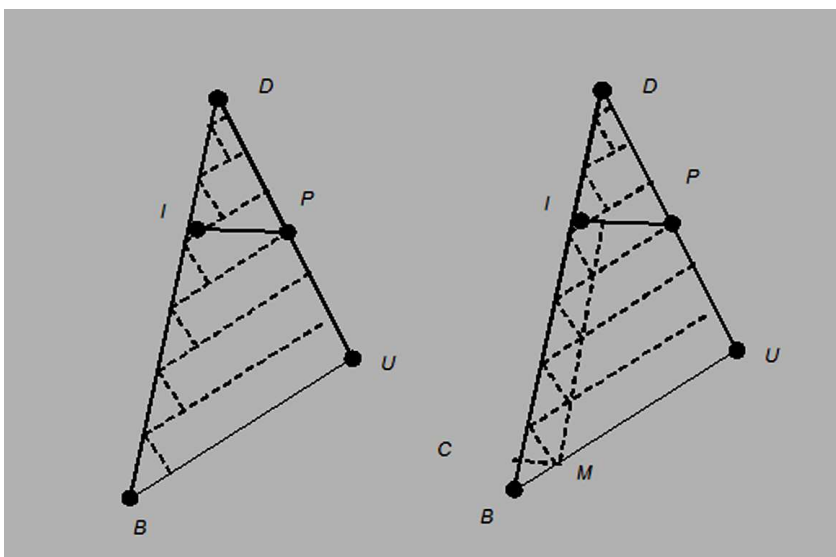
Рис. 2. Шина состоящая из двух участков (прямоугольников)

Предложенный алгоритм покрытия шины является оптимальным по количеству прямоугольников, входящих в покрытие и площади их пересечения [5], если трасса шины не имеет острых углов. Наличие хотя бы одного острого угла существенно увеличивает число прямоугольников в покрытии.

3 Алгоритмы формирования покрытия острого угла шины

Алгоритм 1. Строим прямоугольники минимальной высоты на одной из сторон острого угла так чтобы одна из вершин каждого из этих прямоугольников лежала на противоположной стороне этого угла (рис. 3,а). Минимальная высота d прямоугольника равна допустимой величине, которую может позиционировать лазерный генератор. Число прямоугольников находится делением длины стороны, противоположащей углу на величину d (сторона DU на рис. 3,б). Затем строим прямоугольник единичной высоты на другой стороне острого угла (этот прямоугольник равен первому прямоугольнику, построенному на начальной стороне угла (рис. 3,б)). Точки плоскости, находящиеся внутри треугольника CBM (рис. 3,б), а также на его сторонах BC и BM не являются d -покрываемыми в данном алгоритме.

Данный алгоритм дает решение не оптимальное по количеству прямоугольников, но минимальное по площади пересечений, так как пересечения появляются только при построении последнего прямоугольника покрытия, и их площадь не превышает половины площади этого прямоугольника.



а) изображение угла после построения прямоугольников на одной стороне,
б) изображение угла после построения прямоугольников на второй стороне

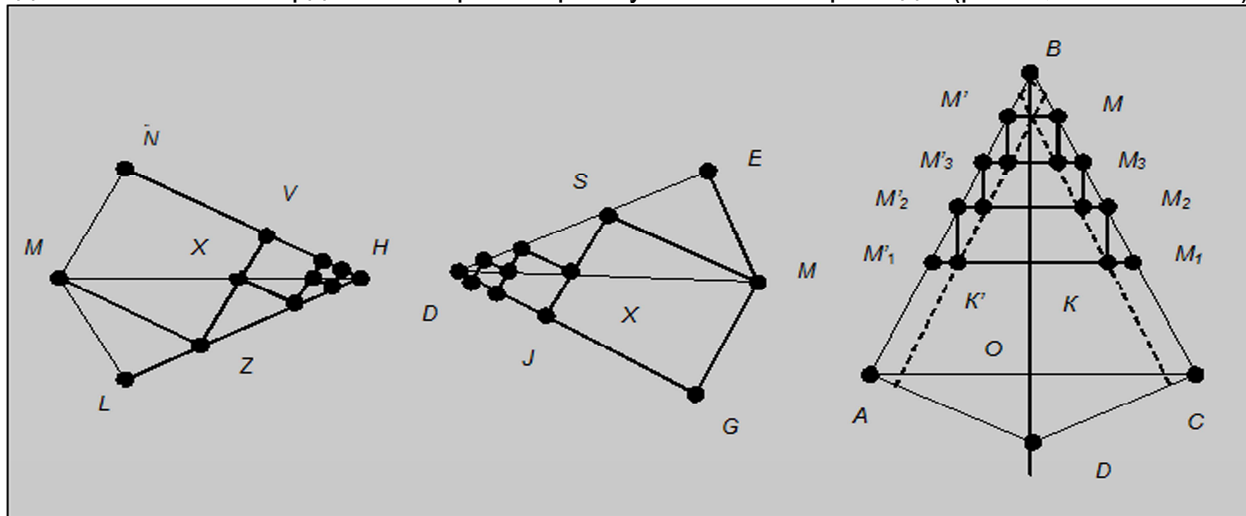
Рис. 3. Результаты поэтапной работы 1-го алгоритма

а)

б)

Алгоритм 2. На сторонах острого угла строим два прямоугольника A_1, A_2 так, чтобы одна из вершин каждого из этих прямоугольников лежала на противоположной стороне угла. Высоты этих прямоугольников равны d . На рис. 4,в эти прямоугольники внутри угла помечены пунктиром. Затем строим пирамиду из прямоугольников. Две вершины каждого прямоугольника пирамиды лежат на противоположных сторонах угла (вершины M, M' ; M_i, M'_i на рис. 4,в, где $i=1,2,3$), а две другие являются точками пересечения со сторонами прямоугольников A_1, A_2 . Прямоугольники пирамиды строятся до тех пор, пока не останется непокрытой площади в пределах угла (рис. 4,в). Координаты двух вершин самого маленького прямоугольника пирамиды (рис. 4,в, вершины M и M') находятся как точки пересечения сторон угла с прямой, проведенной перпендикулярно к биссектрисе острого угла через точку пересечения длинных сторон прямоугольников A_1, A_2 . Эта прямая отсекает от угла треугольник $M'BM$. Вершины треугольника A, C (рис. 4,в) являются вершинами прямоугольников, найденных на первом этапе алгоритма покрытия шины. Пример результата выполнения этого этапа представлен на рисунке 1,а. Все углы, образованные сторонами прямоугольников пирамиды, параллельных биссектрисе угла, со сторонами угла, равны. Следовательно, прямоугольники подобны, и коэффициент их подобия легко вычислить, как отношение соответствующих сторон треугольников. Например, для рисунка 4,в коэффициент подобия треугольников равен отношению стороны BC к стороне BM . Затем вычисляем высоту малого треугольника $M'BM$, разделив высоту BO боль-

шого треугольника ABC на полученный коэффициент. Эта величина и будет равна высоте прямоугольников пирамиды. Найдем вектор этой высоты и вычислим координаты точек-вершин прямоугольников пирамиды, лежащих на сторонах угла (рис. 4, вершины M_2' и M_2). Затем прибавляем к координатам этих вершин координаты вектора высоты и находим остальные координаты вершин прямоугольников пирамиды (рис. 4, в точки K' и K).



а) изображение угла после построения прямоугольников на одной стороне,
 б) изображение угла после построения прямоугольников на второй стороне,
 в) изображение угла при построения прямоугольников покрытия во втором алгоритме

Рис. 4. Результаты поэтапной работы третьего алгоритма

Достоинствами данных двух алгоритмов является минимальная площадь пересечения (перекрывания) фигур, входящих в покрытие острого угла, но количество элементов в них не оптимально. Алгоритм 2 дает покрытие с количеством прямоугольников примерно в 2 раза меньшим, чем Алгоритм 1.

Алгоритм 3. Производим построение прямоугольника, две вершины которого лежат на одной стороне острого угла – вершины N и V , третья – на другой стороне – вершина Z , а четвертая – на биссектрисе острого угла – вершина M (рис. 4,а). Для следующего прямоугольника одной из вершин будет точка X – точка пересечения стороны построенного прямоугольника с биссектрисой острого угла. Найдя ее, производим далее построение прямоугольника.

Строим прямоугольники исходя из указанной последовательности действий на одной стороне острого угла до тех пор, пока меньшая сторона прямоугольника не станет меньше d . Производим точно такое же построение прямоугольников на другой стороне угла (рис. 4,в).

Оценивая искажение, которое мы получаем во всех трех алгоритмах покрытия, можно сказать, что оно равно величине $d^2 \cdot \text{ctg}(0.5 \cdot \alpha)$, где d – минимально допустимый размер, который может позиционировать лазерный генератор, α – величина острого угла [6]. С учетом технологии изготовления интегральных микросхем это искажение еще меньше. Острые углы, как правило, не функциональны и подобная аппроксимация в них вполне допустима, а иногда даже и полезна [7].

4 Результаты экспериментальной проверки работы алгоритмов

Описанные выше алгоритмы запрограммированы на языке C++. Результаты работы алгоритмов (количество элементов покрытия) в зависимости от величины градусной меры острого угла сведены в Таблицу 1 (величина d одинакова для всех алгоритмов). Как видно из этой таблицы, оптимальным по количеству элементов покрытия является Алгоритм 3. Два других алгоритма превосходят его по количеству элементов в 3 и 2 раза соответственно, однако площадь пересечения прямоугольников в этих покрытиях значительно меньше, чем в покрытиях, полученных с использованием Алгоритма 3.

Величину перекрытия элементов покрытия в процентном отношении к общей площади покрытия можно оценить следующим образом: для первого и второго алгоритмов примерно 10% независимо от градусной меры острого угла; для алгоритма 3 от 50% при углах, близких к 0° , до 95% при остром угле, близком к 90° .

Заключение

Предлагаемые алгоритмы позволяют находить покрытие элемента топологии микросхем типа «шина».

Основные характеристики предлагаемых алгоритмов:

- использование технологических и технических ограничений лазерного генератора;
- векторизация координат в процессе исполнения алгоритмов;
- поэтапное формирование покрытия.

Алгоритмы формирования покрытия шины были протестированы на примерах шин из реальных интегральных схем. Нужно подчеркнуть, что выбор элемента топологии – шины – не ограничивает использование предложенных алгоритмов для других видов топологии ИС. Например, для покрытия участков произвольных контуров, содержащих острые углы.

Таблица 1. Полученные экспериментальные данные о количестве элементов покрытия острого угла с помощью различных алгоритмов

Градусная мера острого угла	Количество прямоугольников для покрытия угла с помощью Алгоритма 3	Количество прямоугольников для покрытия угла с помощью Алгоритма 1	Количество прямоугольников для покрытия угла с помощью Алгоритма 2
85°	4	19	15
77°	5	23	15
71°	6	25	15
65°	7	27	17
53°	8	28	17
43°	8	28	17
33°	8	30	17
28°	8	30	17
23°	8	30	18
11°	8	31	18
2°	8	31	18

Литература

1. Фейнберг В. З. Геометрические задачи машинной графики больших интегральных схем // М.: Радио и связь, 1987.- С.117
2. Mark Keil J. Polygon Decomposition //Department of Computer Science University of Saskatchewan, Saskatoon, Sask, Canada - May 14, 1996.
3. O'Rourke J. Art Gallery Theorems and Algorithms // Oxford University Press, New York, NY, 1987.
4. Казеннов Г.Г., Осипов Л.Б., Щемелинин В.М., Стемпковский А.Л. Алгоритм подготовки данных для микрофотонаборных установок//Электронная промышленность.- 1974.- № 6.- С. 84-87.
5. Носова Е.Г., Свердлов А.Г., Фейнберг В.З. Алгоритмы разбиения плоских фигур в системах машинного проектирования интегральных схем // Изв. АН БССР. Сер. физ.- мат. наук. – 1978. № 5. – С. 16-23.
6. Роджерс Д., Адамс Дж., Математические основы машинной графики.– М.: Мир, 2001. - 604 с.
7. Mark de Berg, Marc van Kreveld, Marc Overmars, Otfried Schwarzkopf Computational Geometry: algorithms and applications. 2nd edition. Springer-Verlag, 2000, 367 p.

SOME APPROACHES TO LINE DETECTION ON A TASK OF LINE-FOLLOWING

Dzmitry Kaliukhovich, Brest State Technical University, Brest
Vladimir Golovko, Brest State Technical University, Brest
Andreas Paczynski, Hochschule Ravensburg-Weingarten, Germany

Keywords: task of line-following, line detection, Gaussian function, K-means algorithm, Hough transform.

The task of line-following consists in the robot's motion control to take a defined route which represented with one color line e.g. one color insulation tape. In spite of good contemporary investigation into this task nowadays developed and implemented solutions rarely deal with image processing techniques for line detection. Considering possible use of line detection algorithms in automated guided vehicles which can reduce cost of manufacturing and increase efficiency in a flexible manufacturing system [1] their development is still actual. In this paper some approaches to line detection based on Gaussian function [2], K-means algorithm [3] and Hough transform [4] were researched and tested.

As input data for the algorithms there were color images containing the line gotten from a web-camera. The image dimensions are 640x480 pixels. For the algorithms based on Gaussian function and Hough transform only the RGB colorspace is in use and for K-means one additionally the CIELAB colorspace is.



Fig. 1. Initial image

The algorithm based on Gaussian function:

1. Set initial values of means and standard deviations for all color channels $mred$, $sred$, $mgreen$, $sgreen$, $mblue$, $sblue$.

2. Set a threshold value $level$.

3. For each pixel to calculate values of belonging to the line according to:

$$belonging = red * green * blue, \quad (1)$$

where:

$$red = \exp(-(r - mred)^2 / (2 * sred^2)), \quad (2)$$

$$green = \exp(-(g - mgreen)^2 / (2 * sgreen^2)), \quad (3)$$

$$blue = \exp(-(b - mblue)^2 / (2 * sblue^2)), \quad (4)$$

(r, g, b) – corresponding red, green and blue values of each pixel.

4. For each pixel to use the rule:

if belonging $\geq level$

then a pixel lies on the line

else a pixel lies on the background

5. Repeat steps 1-4 for other values of means and standard deviations and then combine the separate results into one common result image.

While testing $(mred, sred, mgreen, sgreen, mblue, sblue) = \{(144.4, 10.6, 36.9, 7.5, 15.0, 7.8), (181.0, 6.7, 50.0, 7.6, 25.0, 7.6)\}$, $level = 0.1$ were used.

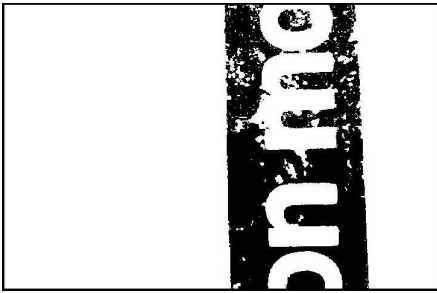


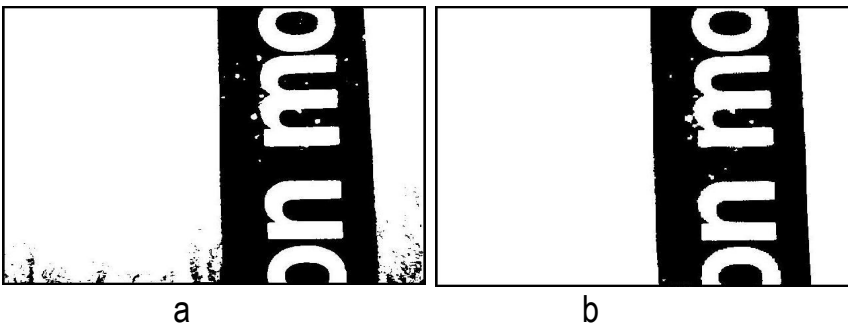
Fig. 2. Processed with the algorithm based on Gaussian function

K-means algorithm is an algorithm to cluster objects based on attributes into k partitions. A priori the amount of partitions is equal to $k = 2$ – for the line and the background. The dimension of the attributes space is equal to 3 for the

RGB colorspace and to 2 for the CIELAB colorspace (the chromaticity layers 'a*' and 'b*' are in use). The algorithm based on K-means:

1. Randomly to generate initial centers of partitions (centroids).
2. Associate points with the nearest centroid according to Euclidean distance.
3. Move the centroids to the center of their respective clusters.
4. Repeat steps 1-3 until a suitable level of convergence will be reached.
5. Estimate pixels related to the line considering that their amount is less than the amount of the background pixels.

The maximum number of iterations is 100 but the real number strongly depends on initial centroid distribution.



**Fig. 3. Processed with the algorithm based on K-means algorithm:
a – the RGB colorspace,
b – the CIELAB colorspace**

Taking into consideration that any line has borders with the background we can find left and right ones of it and then to approximate with straight lines. The first step have to be done is to convert a color RGB image into a grayscale image according to:

$$\text{grayscale} = 0.3 * r + 0.59 * g + 0.11 * b, \quad (5)$$

where see above the (r, g, b) parameters.

After that edge detection is going. There a lot of algorithms for it but one of the simple and rather efficient is Sobel operator. For the further processing both derivatives of the horizontal and vertical directions were calculated, the threshold value is equal to 100.

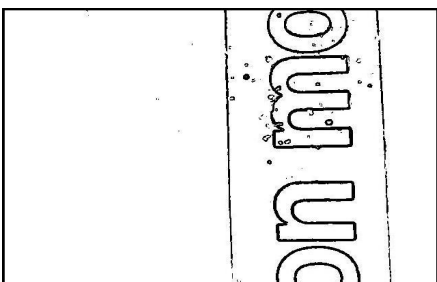


Fig. 4. Edge detection with Sobel operator

Line detection with Hough transform requires using of the normal parametrization of a straight line according to:

$$x * \cos \theta + y * \sin \theta = \rho, \quad (6)$$

where (x, y) is a point lying on a some edge, (θ, ρ) is the normal parameters specifying a straight line passing through the point (x, y) , $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, $-(w^2+h^2)0.5 \leq \rho \leq (w^2+h^2)0.5$, (w, h) is the image dimensions i.e. the width and the height respectively.

For the program implementation Hough transform algorithm uses an array called accumulator to detect the existence of a line. The dimension of the accumulator is equal to the number of unknown parameters e.g. for Hough linear transform it's equal to $d = 2$. The two dimensions of the accumulator array were quantized for the θ and ρ parameters. In tests the accumulator dimensions were 300x600 cells (the $\theta \times \rho$ accumulator).



Fig. 5. Processed with the algorithm based on Hough transform

More comprehensive information about the line can be estimated with the „mean points of the line” representation. The representation lies in a division of the detected line pixels into some groups and then finding the mean coordinates of these groups of pixels. The least-squares method can be used to get only one straight line fully describing the observed part of the defined route.

Fig. 6. „Mean points of the line” representation (marked with „+”) and a straight line gotten with the least-squares method

All described above algorithms were realized and tested in MatLab v.7 for a set of images containing an insulation tape with the symbols „maxon motors” as a line. The algorithm based on Gaussian function was implemented in C++ and used for the motion control algorithms of the robot „MAX” [5] on a task of line-following. Visually the most precise detection was brought with K-means algorithm and the CIELAB colorspace but it couldn't be used in real time systems because of the time of his work isn't determinate. The solution is to get at the beginning the high quality line color characteristics with K-means algorithm and then to use the nearest neighborhood classification at the same time recalculating initial characteristics. As the conclusions the combination of K-means algorithm and Hough transform can be used for the robust line detection in real time.

This work has done in cooperation of the Intelligent Information Technologies Department, Brest State Technical University and the System Engineering Laboratory, Hochschule Ravensburg-Weingarten and was supported by the Landesstiftung Baden-Württemberg gGmbH.

References

1. http://en.wikipedia.org/wiki/Automated_Guided_Vehicle (15-10-2007).
2. http://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_function (15-10-2007).
3. J. B. MacQueen. Some methods for classification and analysis of multivariate observations. Proceedings of 5-th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. University of California Press, Berkeley, USA. 1967.
4. Richard O. Duda, Peter E. Hart. Use of the Hough transformation to detect lines and curves in pictures. Published in the Comm. ACM, Vol. 15, No. 1, pp. 11-15. January, 1972.
5. Zajac M., Paczynski A., Stetter R., Ucinski D. Sensor/Actuator network concept for robust control of a four-wheel-steering mobile robot. Paper. Hochschule Ravensburg-Weingarten, Weingarten, Germany. 2006.

ОРГАНИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЁННОЙ ОБРАБОТКИ ГРАФИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ СРЕДСТВАМИ ПАКЕТА R

Курочка К.С.

Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, г. Гомель

Задачи анализа и распознавания цифровых изображений приводят к обработке сотен гигабайт информации, что накладывает значительные требования на используемую вычислительную технику, от которой требуется не только высокая суммарная производительность обрабатывающих процессоров, но и большая оперативная память, достаточная для одновременного хранения сотен и тысяч изображений [1]. Даже самые быстродействующие современные ЭВМ последовательной архитектуры оказываются неспособными решать задачи такой сложности [2]. Таким образом, наиболее эффективным способом решения данных задач оказалось их распараллеливание и распределённая обработка.

Существуют специальные процессоры обработки графической информации, которые являются весьма дорогостоящими и малораспространёнными. Поэтому для решения указанных выше задач широкое применение находят распределённые вычисления на суперкомпьютерах с параллельной архитектурой векторных процессоров (PVV - Parallel Vector Process) или на кластерных конфигурациях вычислительных средств, созданных на основе локальных или глобальных компьютерных сетей [3].

Для создания программного обеспечения таких систем разработан стандарт MPI (Message Passing Interface), обеспечивающий связь между ветвями параллельного приложения [4]. В рамках MPI для решения поставленной задачи разрабатывается одна программа, и эта единственная программа запускается одновременно на выполнение на всех имеющихся процессорах или системах. При этом каждый процесс может обрабатывать свой набор исходных данных. В MPI существует целое множество операций передачи данных. Они обеспечивают разные способы пересылки данных, реализуют практически все коммуникационные операции. Подобный способ организации параллельных вычислений получил наименование модели «одна программа множество процессов» (Single Program Multiple Processes – SPMP).

В многопроцессной обработке цифровых изображений выделяются следующие фундаментальные задачи: коммуникация данных, организация управляющей структуры, статическое и динамическое распределение вычислительных ресурсов, синхронизация и оптимизация процессов [2]. Причём наиболее узким местом в таких вычислительных системах из-за объёмов передаваемой информации будет коммуникация данных. Поэтому следует использовать различные методы, позволяющие минимизировать объёмы передаваемой информации. Одним из способов решения данной проблемы является организация многоуровневых приложений, где работой клиентов управляет специальный компьютер или процесс, называемый сервером заданий (рис. 1) [3].

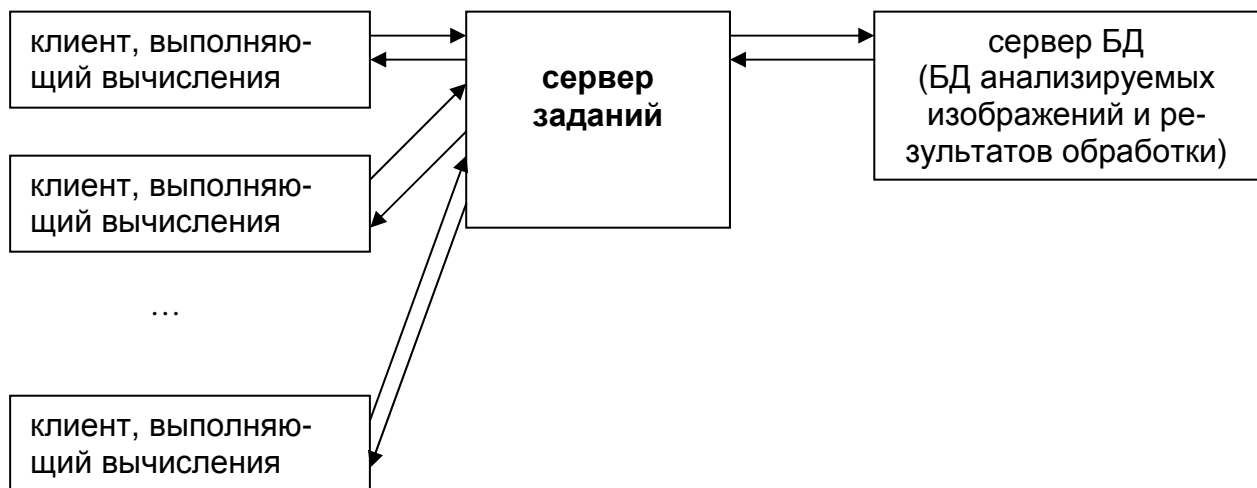


Рис. 1. Трёхуровневое приложение распределённой обработки

Применение программных пакетов, удовлетворяющих спецификации MPI, наряду с преимуществами простой реализации распараллеливания вне зависимости от архитектуры используемой вычислительной системы имеет и недостатки. Разработчику приходится реализовывать ряд уже стандартных алгоритмов и методов преобразований цифровых изображений (в частности, фильтрация на основе свертки и корреляция, а также базовые методы линейной алгебры), которые, обладая хорошей структурированностью, регулярностью и рекурсивностью, допускают эффективное распараллеливание. Все данные алгоритмы реализованы в специализированных пакетах обработки цифровых изображений, например, таких как «R» (<http://www.r-project.org/>). Поэтому весьма актуальной является задача организации распределённой обработки цифровых изображе-

ний с использованием средств специальных пакетов. Для этого предлагается использовать несколько изменённую архитектуру вычислительной системы (рис. 2). В качестве клиентов могут выступать процессы (например, отдельные запущенные копии программы R), выполняемые как в рамках одной многопроцессорной ЭВМ, так и выполняемые на различных компьютерах вычислительной сети. В качестве сервера заданий может выступать также экземпляр R, выполняющий функции TSP сервера. Взаимодействие между элементами распределённой системы осуществляется на сетевом и транспортном уровне сетевых протоколов (согласно модели OSI). При использовании стека протоколов TCP/IP это взаимодействие реализуется посредством сокетов. В качестве сервера БД может выступать любая СУБД (например, MySQL).

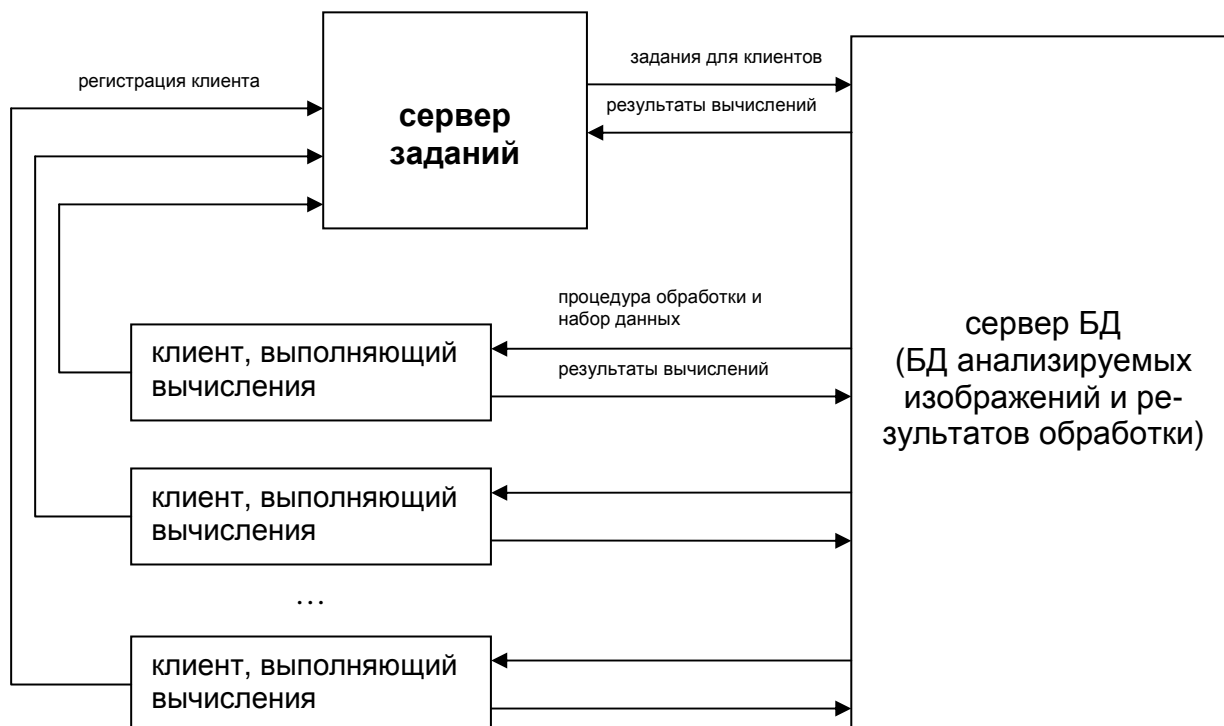


Рис. 2. Модифицированная схема распределённой обработки при анализе биомедицинских изображений

При такой структуре (рис. 2) вычислительной системы минимизируется внутрисетевой трафик за счёт исключения передачи данных между планировщиком задач и вычислительными клиентами. Кроме того, имеется возможность организации сервера БД в виде кластера компьютеров, что ещё значительно позволит увеличить производительность системы.

Была проведена апробация предлагаемой методики организации распределённых вычислений при анализе биомедицинских изображений. В качестве тестовой задачи рассматривалась фильтрация растрового изображения с использованием функции t-test. Обрабатываемое изображение разделялось на части и, используя возможности стека протоколов TCP/IP, передавалось на рабочие станции по локальной вычислительной сети. Каждая рабочая станция обрабатывала свою часть изображения и отправляла результаты на сервер. Для обработки изображений на клиентских компьютерах и передачи информации на сервер использовалась прикладная программа «R». Рассматривалось растровое изображение размером 1024 на 768 32-битных пикселей, которое группами по несколько десятков строк передавалось на обрабатывающие станции. Окрестность определялась в форме квадрата 55 на 55 пикселей. Поэтому в случае 10 компьютеров на каждый передавалось по 187 строк. Передача информации осуществлялась последовательно каждому компьютеру. Таким же образом было организовано и получение результатов.

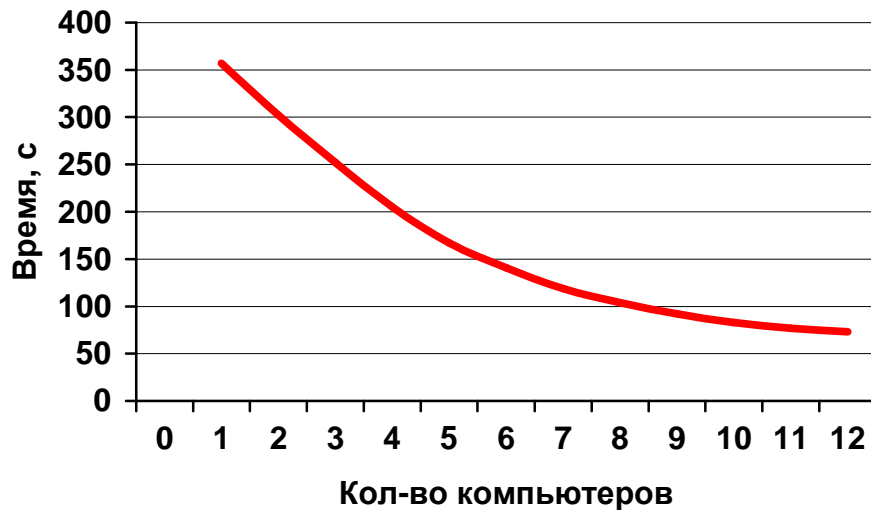


Рис. 3. Зависимость времени распределённой обработки от количества используемых компьютеров

Время распределённой обработки 1 изображения на 3 персональных компьютерах в среднем составило порядка 252 с, при однопоточной обработке – 357 с (рис. 3). На управляющем компьютере расчётов не производилось. Рабочие станции работали под управлением ОС Windows 2000, CPU Celeron 1000, ОЗУ 256 Мб. Сеть – Fast Ethernet 100 Мбит/с. Время передачи обрабатываемой информации при 10 узлах составило порядка 0.197 с. Время обработки на одном узле при 10 станциях составило порядка 8 с.

Литература

1. Tuzlukov V. P. Signal and image processing in navigational systems –CRC press, 2005 (ISBN 0-8493-1598-0)
2. William K. Pratt Digital image processing – John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2007 (ISBN: 978-0-471-76777-0)
3. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
4. Marc Snir, Steve Otto, Steven Huss-Lederman, David Waker and Jack Dongarra MPI: The Complete Reference, MIT Press

РАСКРАШИВАНИЕ ЧЕРНО-БЕЛОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ СРЕДСТВАМИ C#

Новиков В.А., Харитонов Д.С.

Международный институт трудовых и социальных отношений, г. Минск

Известно, что в изображении глаз наиболее чувствителен к цветовой, а не к яркостной составляющей. На использовании этой особенности, в частности, основано сжатие изображения в формате .jpg. В то же время графический пакет Photoshop при раскрашивании областей использует только один фиксированный цвет в модели Lab. В результате цветное раскрашенное изображение оказывается “безжизненным”. Это особенно заметно в областях тела и одежды. Реально эти области изменяют свой цвет в зависимости от освещенности, и не учитывать эту особенность нельзя при получении цветного изображения.

Объектная система C# содержит в себе все средства для полноценной обработки изображения в формате .bmp [1]. В том числе средства C# позволяют работать с альфа-каналом.

Идея раскрашивания черно-белого изображения заключается в задании для фиксированного набора оттенков серого соответствующих цветов в модели RGB. Промежуточные цвета получаются путем линейной интерполяции по каждой составляющей RGB. Подобное раскрашивание возможно как для всего изображения, так и для выделенной области с использованием альфа-канала. Алгоритм раскрашивания состоит в предварительном выводе на экран границ шкалы серого в исходном изображении. Далее с ис-

пользованием мыши в фиксированных точках оттенков серого задаются с использованием стандартной палитры C# соответствующие цвета. Внизу под шкалой серого выводится получившееся интерполяцией цветовое соответствие. Вариантов такой раскраски может быть огромное множество. В результате получаются очень эффектные цветные изображения.

Использование модели RGB при раскрашивании не позволяет учесть яркость исходного изображения. В этом случае раскрашенное изображение не соответствует по оттенкам серого исходному. Конечно, это можно учесть соответствующим заданием цвета в палитре RGB. Однако вторым вариантом раскрашивания может быть использование модели Lab, где выделен яркостный канал. Объектная модель C# не содержит палитры цветов в формате Lab, и поэтому приходится задавать цвета в палитре RGB с последующим пересчетом в модель Lab по формулам:

$$L = 0.299R + 0.587G + 0.114B$$

$$a = (R - L) / 0.701 / 2 + 128$$

$$b = (B - L) / 0.866 / 2 + 128$$

В C# палитра RGB содержит движок яркости, который в данном случае желательно оставить в неизменном состоянии.

При пересчете оставляются неизменными цветовые компоненты a и b, а яркостная составляющая берется из черно-белого изображения. По этим данным модели Lab необходимо сделать обратный пересчет в модель RGB. Промежуточные цвета по-прежнему получаются линейной интерполяцией из заданного множества точек по составляющим ab с сохранением яркости из черно-белого изображения.

Для тестирования программы в качестве исходного изображения была взята фотография рис.1. В результате раскрашивания было, например, получено очень эффектное цветное изображение рис.2.



Рис.1 Исходное черно-белое изображение

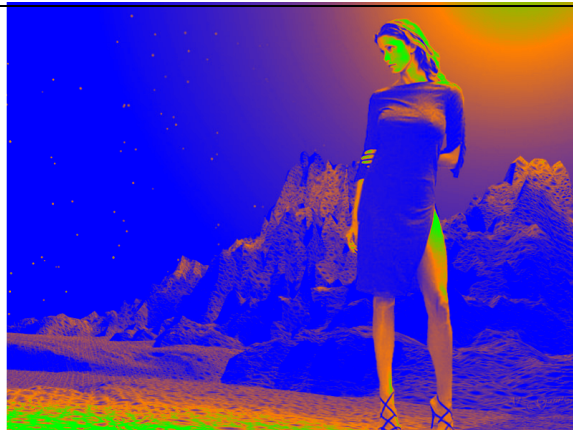


Рис.2 Раскрашенное изображение

Интерфейсная часть программы очень проста и интуитивно понятна. Для исправления непонравившегося изображения содержится кнопка возврата к предыдущему изображению.

Предложенное раскрашивание черно-белого изображения позволяет получить эффектные в художественном смысле картины, которые невозможно даже создать масляными красками. В том числе можно раскрашивать исходные цветные фотографии.

Литература

1. Прайс Дж., Гандерлой М. Visual C#.NET. Полное руководство: Пер. с англ. – К.: ВЕК+, СПб.: КОРОНА принт, К.: НТИ, М.: Энтроп, 2004. – 960 с.

РАСПОЗНАВАНИЕ ОБЪЕКТОВ С ПОМОЩЬЮ ИЕРАРХИЧЕСКОГО КЛАССИФИЦИРУЮЩЕГО ДЕРЕВА РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ

Самко А. Р.

*Аспирантура Белорусского государственного университета
информатики и радиоэлектроники, г. Минск*

Задача распознавания объектов является очень актуальной. К ней относятся задачи по прогнозированию погоды, распознаванию знаков рукописного текста, распознаванию звуков речи, сортировка фотографий, медицинская диагностика, распознавание людей, оценка дорожной обстановки, распознавание типов воздушных объектов [2].

Постановка задачи выглядит следующим образом. Имеется n объектов со свойствами $x_1 \dots x_m$, относящимся к k различным типам объектов ($k < n$). Требуется определить, к какому типу относится новый объект [2, 3].

К сожалению, на данный момент не существует идеального метода решения таких задач.

Алгоритм на основе иерархического классифицирующего дерева решающих правил позволяет решать такие задачи быстрее и с не меньшей точностью, чем другие методы.

Данный алгоритм предполагает на основе обучающего множества составление и решение системы неравенств.

Для объектов первого типа составляются неравенства вида:

$$\lambda_0 + \sum_{i=1}^m (\lambda_i \times x_i) \geq 0, \quad (1)$$

где x_i – это значение i -ого свойства для данного объекта, m – общее количество свойств, λ – искомые параметры.

Для объектов второго типа составляются неравенства вида:

$$\lambda_0 + \sum_{i=1}^m (\lambda_i \times x_i) < 0 \quad (2)$$

Далее неравенство (2) преобразуется в форму:

$$-\lambda_0 - \sum_{i=1}^m (\lambda_i \times x_i) \geq 1, \quad (3)$$

а неравенство (1) для симметричности преобразуется в форму:

$$\lambda_0 + \sum_{i=1}^m (\lambda_i \times x_i) \geq 1 \quad (4)$$

Как видно, любое решение, найденное для неравенств (3) и (4), будет верно и для неравенств (1) и (2) [3].

В ряде случаев данная система не имеет решения. Тогда с помощью модифицированного варианта двойственного симплексного алгоритма часть неравенств исключается из рассмотрения на этом шаге и решается затем отдельно [1].

Рассмотрим этот этап подробнее. Определяем первое неравенство с положительной правой частью, далее выражаем одну переменную через другие переменные и одну дополнительную переменную таким образом, чтобы оно превратилось в неравенство с одной дополнительной переменной. Например, для неравенства $-\lambda_0 - \sum_{i=1}^m (\lambda_i \times x_i) \geq 0,001$ выражаем переменную так:

$$\lambda_0 = -\lambda_0 - \sum_{i=1}^m (\lambda_i \times x_i) - 0,001, \quad (5)$$

после замены получаем неравенство $\lambda_0 \geq 0$ (оно называется базисным), затем производим замену старой переменной на эту новую переменную (разумеется, меняются коэф-

фициенты и при других переменных) в остальных неравенствах. Далее этот процесс повторяется, пока не будут перебраны все переменные или пока не останется неравенств с положительной левой частью. В последнем случае при всех текущих переменных, равных нулю, все неравенства системы выполняются, и тогда для нахождения корней системы достаточно просто воспользоваться ранее рассчитанными уравнениями. Например, если $\lambda_0 = 0$ и λ_i для i от 1 до m тоже равны нулю то в рассмотренном выше примере $\lambda_0 = 0 + 0,001 = 0,001$, и, следовательно, корни этой системы $(0,001; 0; 0; \dots 0)$. В случае, если после перебора всех переменных остались неравенства с положительной правой частью, надо обратить внимание на левую часть. Если в неравенстве коэффициенты всех переменных меньше либо равны нулю, то это неравенство противоречит другим неравенствам (это следует из базисных неравенств, где $\lambda_i \geq 0$, для всех i). Поэтому неравенства такого вида исключаются из рассмотрения на этом шаге.

В случае, если в левой части есть положительные коэффициенты, то заменяем переменные при них таким же образом, как описано выше (уравнение (5)). В результате одно неравенство становится базисным, а другое перестает им быть.

Процесс завершается, когда во всех неравенствах правая часть оказывается отрицательной или равной нулю. При этом исключенными неравенствами оказываются те и только те неравенства, которые явно противоречат другим неравенствам (базисным) [1].

В итоге мы получаем решающее правило вида:

$$\lambda_0 + \sum_{i=1}^m (\lambda_i \times x_i) = 0 \quad (6)$$

Если рассматривать графически, то это правило разбивает пространство на два подпространства прямой, плоскостью или гиперплоскостью в зависимости от количества свойств объектов.

Далее рассматриваются оба получившихся подпространства. Если в одном из них оказались объекты только одного типа (в большинстве случаев так и бывает, хотя и не всегда), то над этим подпространством больше никаких действий не совершается, и, если в это подпространство попадет объект, тип которого требуется определить, то ему присваивается тип объектов, находящихся в этом подпространстве. Если же в подпространство попали разные объекты, то для объектов данного пространства производятся вышеописанные действия, в результате чего появляется новое решающее правило, которое делит данное подпространство еще на две части. Процесс продолжается до тех пор, пока объекты разных типов не будут отделены друг от друга.

В результате получается множество решающих правил, делящих пространство на сектора, в которых находятся объекты только одного типа.

Далее, при поступлении объекта, тип которого нужно определить, его свойства просто подставляются в полученные правила, и в зависимости от их выполнения принимается решение о том, к какому типу относится данный объект.

В результате определение типа объекта этим методом занимает значительно меньше времени, чем с использованием других методов. Составление решающих правил также занимает меньше времени, чем например настройка нейронной сети. При этом точность его не уступает точности лучших методов в этом классе.

Результаты данной работы были использованы в ГБЦ НИР 02-3087 «Теоретические концепции противоречивых логических исчислений», а также при защите магистерской диссертации.

Литература

1. Герман О.В., Дорожкина Н.Н. Различные приложения стратегии устранения невязок. – Вестник Ставропольского государственного университета. – 1999, №18, - С.73-85.
2. Горелик А.Л., Скрипник В.А. Методы распознавания. – М.: Высшая школа, 1977. –220 с.
3. Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов. - М.: Изд. Мир, 1978.-411с.

СРАВНЕНИЕ ДВУХ МЕТОДОВ НЕИНВАЗИВНОГО ВСІ

Якуцевич А.

Брестский государственный технический университет, г.Брест

Мозго-компьютерный интерфейс (Brain-Computer interface (BCI)), называемый также мозго-машинным интерфейсом (Brain-Machine interface (BMI)), стремительно развивается в последнее десятилетие (см. вступительную статью в Nature от 13 июля 2006) и сейчас рассматривается как одно из наиболее успешных применений нейронаук, т.к. он дает возможность улучшать качество жизни людей с нейрофизиологическими повреждениями (перенесших инсульт, имеющих церебральный паралич, мышечную дистрофию и т.д.).

Методы ВСІ можно разделить на инвазивные и неинвазивные. В инвазивных методах производится хирургическая имплантация электродов преимущественно в моторные и премоторные фронтальные области коры головного мозга (обзор в Pesaran et al., 2006). В случае неинвазивных методов используется электроэнцефалограмма (ЭЭГ), записанная с поверхности головы. Исследование неинвазивных методов началось с 70-ых годов, когда Жак Видаль сконструировал первую систему ВСІ, которая использовала визуальные вызванные потенциалы (Vidal, 1973). С помощью этой системы стало возможным передвигать на экране курсор с помощью определенного системой направления устремления взгляда. Эта идея позже была улучшена Суттером (Sutter, 1992), Миддендорфом (Middendorf et al., 2000) и другими. Среди других неинвазивных ВСІ различают системы, основанные на вызванном потенциале P300 в париетальном кортексе для различения предпочтительных стимулов от остальных (Donchin et al., 2000; Sellers and Donchin, 2006; Piccione et al., 2006). Группа в Тюбингене (Германия) использует медленные потенциалы коры головного мозга (slow cortical potentials (SCP)), записанные с макушки головы (Kubler et al., 2001; Birbaumer et al., 2000). Группа в Вардсворте (Wardsworth BCI group) использует десинхронизацию событиями (event-related desynchronization (ERD)) в области мю- и бета-ритмов с применением авторегрессионного спектрального анализа (Wolpaw et al., 2000). С использованием этого способа возможно перемещать курсор в вертикальном направлении (вверх-вниз) и, как было представлено недавно, так же дополнительно и в горизонтальном направлении, что дает возможность достичь мысленно любой точки на плоскости (Wolpaw and McFarland, 2004). Эти две группы показали, что только с помощью тренировок можно достичь генерации головным мозгом соответствующих образов ЭЭГ. Иной метод ВСІ использует только машинное обучение самой системы (Anderson, 1997). Однако существует множество групп, которые совмещают как обучение субъекта, так и машинное обучение. Группа в Граце, используя парадигму, схожую с используемой в Вардсворте, включила в концепцию ВСІ так же и обучение самой системы. С использованием данного метода они добились управления курсором, а так же в ортопедическом приборе открытия и закрытия кисти руки (Pfurtscheller et al., 2000). Группа IDIAP в Мартини использует локальные нейронные классификаторы на основе квадратичного дискриминантного анализа (Millan et al., 2002), что позволяет субъекту управлять моторизированной инвалидной коляской. Для достижения этой цели использовалось мысленное движение правой/левой руки, мысленное вращение куба, вычитание цифр и словесные ассоциации (Milan et al., 2004). Группа в Берлине использует ERD совместно с участками отрицательности SCP для построения системы ВСІ, которая достигает точности 95% в решении бинарных задач (Blankertz et al., 2007). Данная методика была ими также использована для движения пальца и плеча виртуальной руки по данным ЭЭГ, записанным со скальпа над моторным кортексом.

В данной работе были использованы данные, полученные на факультете медицинской информатики института биомедицинской инженерии в технологическом университете Граца (представленные в интернете для соревнований в области ВСІ). Данные полу-

чены в эксперименте, когда субъект мысленно контролировал прямоугольник на экране монитора с использованием мысленных движений правой/левой руки после представления сигнала. Эксперимент состоял из 7 этапов с сорока попытками в каждом. Таким образом в рассмотрение бралось 280 записей ЭЭГ. Данные ЭЭГ были дискретизированы с частотой 128 Hz и отфильтрованы в интервале 0.5-30 Hz.

Среди всех данных для последующего анализа были отобраны только записи с двух электродов в области C3 и C4 (международная система 10-20), которые отображают активность моторного кортекса в левом и правом полушарии.

Данная работа сосредоточена на сравнении качества определения мысленного движения правой/левой рукой с помощью методов, используемых в Вардсворте (Wolpaw et al., 2000) и Берлине (Blankertz et al., 2007).

Первый метод заключается в том, что для данного временного ряда вычисляется спектр преобразования Фурье. Для очистки данного спектра от влияния гаусового шума используется авторегрессионный спектральный анализ. В полученном спектре берется в рассмотрение только область 8-12 Hz, соответствующая мю-ритмам. Данные ритмы отражают активность моторных и зеркальных нейронов в моторном и премоторном кортексе. Для определения мысленного движения используется высота спектра в рассматриваемом интервале. При этом используется то, что при движении (мысленном движении) амплитуда мю-волн подавляется. Сравнивая амплитуды, в этих областях C3 и C4 находится полушарие, где данное подавление активности наиболее существенно. Тем самым делается вывод о сопоставлении с мысленным движением правой/левой руки.

Второй метод основан на медленных потенциалах (SCP). Сигнал ЭЭГ вначале пропускается через усредняющий фильтр, а затем умножается на функцию $1 - \cos(\pi x / 128)$. В полученной последовательности с помощью прямого и обратного преобразований Фурье выбираются низкие частоты (1-4 Hz). Результирующий сигнал на промежутке 200 ms усредняется до четырех значений. Тем самым мы имеем 8 значений (по четыре с C3 и C4). Классификация данных производится с использованием машины опорных векторов (support vector machine (SVM)) для нахождения разделяющей прямой.

Эксперименты показали, что для рассматриваемой последовательности ЭЭГ с помощью обоих методов верный процент распознавания составляет в пределе около 85%. Тем самым эти методы дают хорошую классификацию даже только для двух каналов электроэнцефалограммы.

Литература

1. Anderson C.W. Effects of variations in neural networks topology and out averaging on the discrimination of mental tasks from spontaneous electroencephalogram. *J. Intell. Syst.*, 1997; 7:165-190.
2. Birbaumer N, Kubler A., Ghanayim N., Hinterberger T., Perelmouter J, Kaiser J, Iversen I., Kotchoubey B., Neuman N., Flor H. The thought translation device (TTD) for completely paralyzed patients. *IEEE Trans. Rehabil. Eng.* 2000; 8:190-192
3. Blankertz B., Dornhege G., Krauledat M., Muller K-R., Curio G. The noninvasive Berlin brain-computer interface: fast acquisition of effective performance in untrained subject. *Neuroimage*, 2007; 37(2):539-550
4. Donchin E., Spencer K.M., Wijesinghe R. The mental prosthesis: assessing the speed of P300-based brain-computer interface. *IEEE Trans. Rehabil. Eng.* 2000, 8:174-179.
5. Kubler A., Kotchoubey B., Kaiser J., Wolpaw JR., Birbaumer N. Brain-computer communication: unlock the locked-in. *Psychol. Bull.* 2001; 127:358-375.
6. Middendorf M., McMillan G., Calhoun G., Jones KS. Brain-computer interface based on steady steady-state visual evoked response. *IEEE Trans. Rehabil. Eng.* 2000; 8:211-213
7. Millan J.D.R., Mourino J., Franze M., Cinnoti F., Varsta M., Heikkinen J., Babiloni F. A local neural classifier for recognition of EEG pattern associated to mental tasks. *IEEE Tras. on Neural Networks*, 2002; 13(3): 678-686

8. Millan J.D.R., Renkens F., Mourino J., Gerstner W. Noninvasive brain-actuated control of a mobile robot by human EEG. *IEEE Trans. on Biomed. Eng.*, 2004
9. Piccione, F., Giorgi, F., Tonin, P., Priftis, K., Giove, S., Silvoni, S., Palmas, G., Beverina, F. P300-based brain computer interface: reliability and performance in healthy and paralyzed participants. *Clin. Neurophysiol.* 2006, 117:531-537
10. Pesaran B., Musallam S., Andersen R.A. Cognitive neural prosthetics. *Current Biology.* 2006; 16:2:77-80.
11. Pfurtscheller G., Guger C., Muller G., Krausz G., Neuper C. Brain oscillations control hand orthosis in a tetraplegic. *Neurosci. Lett.* 2000; 292:211-214
12. Sellers E.W, Donchin E. A P300-based brain computer interface: initial tests by ALS patient. *Clin. Neurophysiol.* 2006, 117: 538-548
13. Sutter E.E. The brain response interface: communication through visually-introduced electrical brain responses. *J. Microcomput Appl.* 1992; 15:31-45
14. Vidal J.J. Towards direct brain-computer communication. *Annu Rev Biophys Bioeng* 1973; 2:157-180
15. Wolpaw J.R., McFarland D.J., Vaughan T.M. Brain-computer interface (BCI) research at the Wadsworth Center. *IEEE Trans. Rehabil. Eng.* 2000; 8:161-163
16. Wolpaw J.R., McFarland D.J. Control of a two-dimensional movement signal by noninvasive brain-computer interface in human. *Proc. of the Nat. Ac. of Sc. of the USA*, 2004
17. BCI competition 2003: <http://ida.first.fraunhofer.de/projects/bci/competition/>

РАЗДЕЛ III. АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

СРАВНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО И ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ БЕЗЫЗЛУЧАТЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА И МИГРАЦИИ ЭНЕРГИИ В МОЛЕКУЛЯРНЫХ СИСТЕМАХ

Баранов В.В.

Белорусский государственный университет, г. Минск

Введение

Процессы переноса и релаксации энергии в молекулярных системах играют большую роль в динамике этих систем, имеют широкое практическое применение и перспективы для будущих приложений. Природный и искусственный фотосинтез, органические светоизлучающие диоды, исследование биологических структур опираются именно на изучаемый феномен. К сожалению, в настоящее время не достаточно развиты аналитические модели, способные воспроизводить в деталях эффекты, происходящие при миграции энергии в системах флуорофоров с ловушками. Разработке таких моделей посвящена данная работа.

1. Основы физики флуоресценции

Рассмотрим молекулярную систему, состоящую из двух типов молекул — доноров и акцепторов. Доноры могут переходить на высшие энергетические уровни в результате поглощения фотонов и при переносе энергии с других доноров, а переход на нижние уровни может быть обусловлен взаимодействием с окружением (средой), переносом энергии к акцепторам или к донорам, излучением фотона, внутренними процессами в молекуле (переход из синглетного в триплетное состояние). Акцепторы могут возбуждаться в результате взаимодействия с донорами, а дезактивировать с излучением фотона или безызлучательно [1, с. 34].

Константа скорости переноса энергии по индуктивно-резонансному механизму определяется выражением

$$k_T = \frac{1}{\tau_D} \left(\frac{R_0}{r} \right)^6, \quad (1)$$

где τ_D — время жизни возбужденного состояния донора в отсутствие акцептора; R_0 — характеристическое расстояние (ферстеровский радиус), порядка 1–6 нм; r — расстояние между донором и акцептором [1, с. 247].

2. Постановка задачи

Пусть задана система из n флуорофоров, из которых m доноров, $n-m$ акцепторов. Пронумеруем все молекулы так, чтобы доноры описывались номерами от 1 до m включительно, акцепторы — от $m+1$ до n .

Пусть заданы также величины k_{Di} , $i = \overline{1, m}$, каждая из которых равна константе излучательной дезактивации i -ого донора; k_{Ai} , $i = \overline{m+1, n}$, каждая из которых равна константе излучательной дезактивации i -ого акцептора; k_{Alli} , $i = \overline{1, n}$, соответствующие суммарные константы дезактивации i -ой молекулы; k_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$, каждая из которых равна скорости переноса энергии с i -й молекулы на j -ую. Положим $k_{ii} = 0$ для $i = \overline{1, n}$. Кроме того, разумеется, $k_{ij} = 0$, $i = \overline{m+1, n}$, $j = \overline{1, n}$ — так как акцепторы не могут передавать энергию другим молекулам, а могут лишь принимать ее от доноров. Необходимо найти либо вероятности нахождения каждой из молекул в момент времени t в возбужденном состоянии, либо плотности вероятности того, что возбуждение покинет систему с i -ой молекулы в момент времени t (может быть возбуждена лишь одна молекула).

3. Общий случай: использование уравнений Колмогорова

Обозначим через $P_{ij}(\tau, t)$, $i, j = \overline{1, n}$, условную вероятность нахождения j -ой молекулы в момент времени t в возбужденном состоянии, при условии, что в момент времени τ возбуждена была i -ая молекула. Тогда сразу легко можно записать уравнение Колмогорова [2] в терминах нашей задачи для общего случая (когда все параметры системы зависят от t):

$$\frac{\partial P_{ij}(\tau, t)}{\partial t} = -k_{Alli}(t)P_{ij}(\tau, t) + \sum_{k=1}^m k_{kj}(t)P_{ik}(\tau, t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Естественно полагать $\tau = 0$ и усреднять решения по начальным вероятностям состояния системы. Кроме того, в простейшем случае (при быстрой и изотропной реориентации дипольных моментов молекул либо в отсутствие движения молекул) все параметры системы можно считать постоянными (так и делается везде далее).

4. Аналитическое моделирование

Тогда для плотностей вероятности нахождения каждой из молекул в момент времени t в возбужденном состоянии можно записать следующую систему дифференциальных уравнений [3]:

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = -k_{Alli}y_i(t) + \sum_{j=1}^m k_{ji}y_j(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Систему (3) уже можно решать численно как систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Интенсивность флуоресценции доноров и акцепторов:

$$i_D(t) = \sum_{j=1}^m k_{Dj}y_j(t), \quad i_A(t) = \sum_{j=m+1}^n k_{Aj}y_j(t) \quad (4)$$

Если акцепторы идентичны, то для описания акцепторов можно ввести лишь одну суммарную константу дезактивации k_{All_a} , одну константу излучательной дезактивации k_A , и систему (3) свести к следующей (сложив все уравнения для акцепторов, $i = \overline{m+1, n}$):

$$\begin{cases} \frac{dy_i(t)}{dt} = -k_{Alli}y_i(t) + \sum_{j=1}^m k_{ji}y_j(t), \quad i = \overline{1, m} \\ \frac{dy_A(t)}{dt} = -k_{All_a}y_A(t) + \sum_{j=1}^m \left[y_j(t) \sum_{i=m+1}^n k_{ji} \right] \end{cases}, \quad (5)$$

притом тогда

$$i_A(t) = k_A y_A(t). \quad (6)$$

5. Имитационное моделирование

Рассмотрим построение имитационной модели, описывающей поведение систем с переносом и миграцией энергии.

После предварительных манипуляций, необходимых для расчета (например, инициализация начальных данных, определение всех констант дезактивации), для каждого фотона выбирается донор, на который вначале попадет этот фотон, затем методом обратных функций моделируется время пребывания флуорофора в возбужденном состоянии (время распределено по экспоненциальному закону), моделируется способ дезактивации, происходит обновление выходных данных или возвращение к этапу возбуждения донора (при миграции энергии).

На выходе программы, реализующей модель, как и в результате флуоресцентного эксперимента методом счета фотонов, мы получаем гистограммы времен флуоресценции двух типов молекул.

6. Анализ полученных результатов

Оба способа моделирования переноса энергии по механизму Ферстера показали соответствие теоретическим результатам для простейших систем, а также друг с другом. На рис. 1 приведены результаты сравнения флуоресценции доноров для системы из 25 доноров, 25 акцепторов ($k_D=10^8 \text{ с}^{-1}$, $k_A=0.3 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$, $R_0=10 \text{ \AA}$, максимальное время измерения $t_{\max}=40 \text{ нс}$, количество фотонов 10^5). Среднее значение взвешенных остатков - 6.74×10^{-3} , значение $\chi^2 = 1.05$.

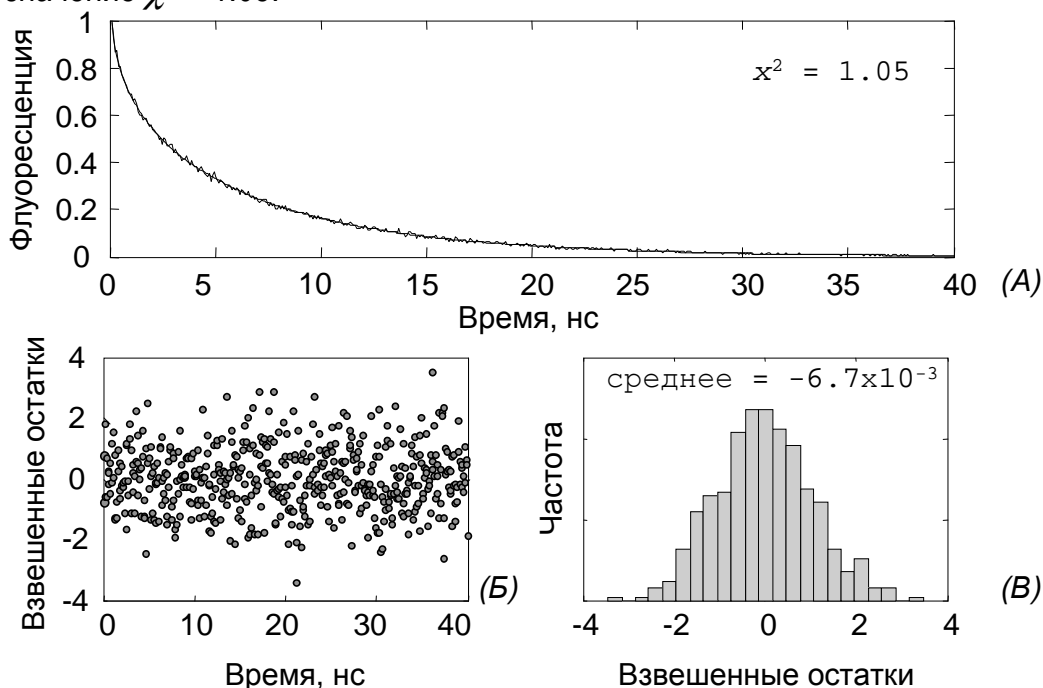


Рис. 1. Результаты сравнения имитационной и аналитической моделей.

(А) – кривая флуоресценции доноров и значение критерия качества χ^2 ,
 (Б) – взвешенные остатки, (В) – распределение остатков и их среднее значение.

При близком расположении доноров, когда миграция энергии интенсивна, имитационное моделирование требует большого количества времени и имеет невысокую точность, но время вычислений практически не изменяется при увеличении числа молекул. Решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений даже для матриц порядка 100 (во флуоресцирующих системах характерное число молекул 10^3 – 10^6 [5], но для учета акцепторов необходима только одна строка в матрице системы, то есть размерность матрицы при одинаковом числе доноров и акцепторов будет $\sim 10^2$ – 10^3) работает за приемлемое время, притом с обеспечением несравненно большей точности, но ресурсоемкость метода быстро возрастает при увеличении числа молекул в системе.

Литература

1. Valeur B. Molecular Fluorescence: Principles and Applications, Weinheim, 2002, 399 p.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: Пер. с англ. - 3-е изд. - М.: Мир, 1984, т.1, - 498 с.
3. Эльсгольц Л. Э., Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - М.: Наука, 1969. - 424 с.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник, - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 448 с.
5. Calzaferri et al. Supramolecularly organized luminescent dye molecules in the channels of zeolite L, Adv. Photochem., 2002, 27, p. 1-50.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ С ИЗМЕНЕНИЕМ КОЭФФИЦИЕНТА ДЛИНЫ ПРОБЕГА

Волков Е.Г.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

При чрезвычайно широком спектре объектов и явлений (на настоящий момент обнаружено более 10000), в которых присутствуют фрактальные кластеры, и, соответственно, широком разнообразии физических механизмов агрегации кластерных структур, количество имитационных математических моделей, позволяющих получить кластеры с заранее известной фрактальной размерностью, невелико.

Основных моделей, описанных в литературе и формирующих фрактальные кластеры, всего две:

- *ограниченно-диффузионная агрегация (ОДА)*. Алгоритм образования фрактальной структуры описывается следующим образом. По центру области моделирования помещается частица, которая служит зародышем фрактальной структуры. Затем, случайным образом, на некотором удалении помещается другая частица, которая начинает двигаться также случайным образом – ее путь соответствует броуновскому движению и выбирается методом Монте-Карло. Она продолжает свое движение до тех пор, пока не окажется в соседстве с первой частицей. Тогда она останавливается, ее расположение фиксируется, а в пространство запускается следующая частица. После многократного повторения описанного процесса образуется структура, где каждая частица после соответствующего блуждания нашла своего соседа [1]. Описанная агрегация приводит к структурам, наблюдающимся у аэрозольных агрегатов.

- *кластер-кластерная ассоциация (ККА)*. В начальный момент берется 2^k частиц и образуется из них 2^{k-1} кластеров. На каждом следующем этапе эти кластеры объединяются попарно в результате броуновского движения. На последнем этапе образуется один кластер, состоящий из 2^k частиц. Конечный кластер весьма рыхлый, имеет много петель, его размерность сравнительно мала и в двумерном пространстве может не превышать 1.5 [1]. Описанная агрегация наблюдается при некоторых видах процессов напыления и осаждения пленок на поверхности подложки.

Остальные виды моделей по сути получены модификацией вышеописанных. Например, если в качестве зародыша кластера взять элементарный двумерный объект – прямую, то получим *перколяционный кластер* [2]. Если дополнительно ввести условие вероятности прилипания частиц друг к другу, то получим *вероятностную ОДА* [3] и *химически-ограниченную агрегацию типа кластер-кластер* и т.д.

Широко известной также является *баллистическая модель (БА)*, в которой траектория движения частицы определяется не броуновским движением, а прямолинейной траекторией. Результаты исследования фрактальной размерности монодисперсных и полидисперсных кластеров БА были описаны в [4].

В данной статье предлагается новый подход к моделированию, основанный на комбинации (объединении) двух механизмов агрегации: БА и ОДА, а именно – кластер начинает образовываться по одному механизму, а заканчивает – по другому. Для этого классический алгоритм дополняется коэффициентом длины пробега в части уравнений нахождения очередных координат частицы (x_2, y_2) при ее броуновском движении:

$$x_2 = K \psi \cos(\alpha) + x_1, \quad (1)$$

$$y_2 = K \psi \sin(\alpha) + y_1, \quad (2)$$

где α – случайный угол от 0 до 2π ,

(x_1, y_1) – координаты предыдущего местоположения частицы,

K – коэффициент длины пробега.

Для ограниченно-диффузионной агрегации коэффициент пробега должен быть равен значению одного-двух радиусов частиц r , для баллистической агрегации – должен превышать размер кластера. Данный коэффициент можно, например, представить линейной функцией номера N очередной присоединяемой частицы:

$$K = a\sqrt{N} + b\sqrt{r}, \quad (3)$$

где a, b – выбираемые параметры.

Примеры кластеров, полученных комбинированием механизмов агрегации при различных выбираемых параметрах уравнения (3), изображены на рисунке 1.

Функциональная зависимость коэффициента длины пробега может быть более сложной, либо задаваться внешними условиями моделируемого физического процесса. Так, она может соответствовать, например, изменению температуры в процессе осаждения тонкой поликристаллической пленки.

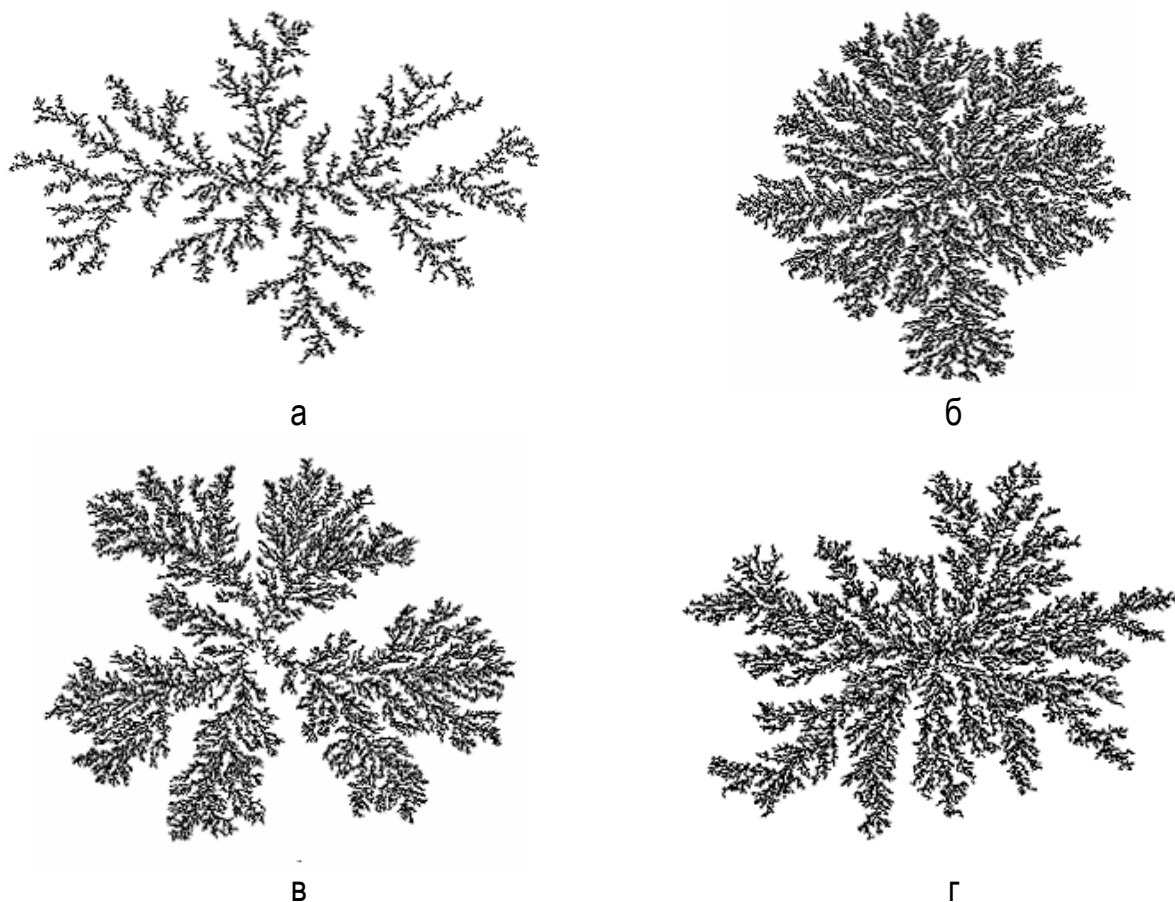


Рис.1. Фрактальные кластеры из 20000 частиц с различным функциональным представлением коэффициентов длины пробега:

- а) $b = 2.0, a = 0.0$ - соответствует модели ОДА;
 б) $b = 1000.0, a = 0.0$ - соответствует модели БА;
 в) $b = 2.0, a = 0.01$; г) $b = 1000.0, a = - 0.002$

Литература

1. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. – М.: Наука, 1991. – 134 с.
2. Кулак М.И. Фрактальная механика материалов. – Мн.: Выш. шк., 2002. – 304с.
3. Дереченник С.С., Раткевич А.В., Разумейчик В.С., Баранов В.В. Моделирование многослойной агрегации и вертикального роста кластеров при физическом осаждении металлической пленки // Вестник Полоцкого государственного университета. – Сер. Фундаментальные науки. – 2004. - №11. – С. 79-85.
4. Волков Е.Г. Фрактальная размерность бидисперсных кластеров // Сборник конкурсных и научных работ студентов и магистрантов. – Брест:УО “БрГТУ”, – 2006. – С. 97 – 99.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ КЛАСТЕРНЫХ СТРУКТУР

Дежурко А.М., Верхотуров А.Е.

Белорусский государственный университет, г. Минск

Введение

В настоящее время с ростом потребности в больших вычислительных мощностях все большее значение приобретают распределенные вычислительные системы и программное обеспечение, способное эффективно их использовать. Параллельные программы имеют специфические цели и структуру, что налагает определенные требования на процесс их разработки и тестирования [1]. Возникают задачи нахождения алгоритмов, обеспечивающих оптимальную загрузку узлов параллельной системы и наилучшую схему передачи данных. Решение этих задач в настоящее время достигается путём проведения множества экспериментов и подробного анализа их результатов [1,5]. Тестирование параллельных алгоритмов на реальных вычислительных сетях достаточно трудоёмко, и, следовательно, требует значительных материальных затрат. Кроме того, существует проблема проектирования и конфигурирования параметров распределенной вычислительной сети таким образом, чтобы достигалась максимальная вычислительная мощность при решении конкретного класса задач. Таким образом, для увеличения эффективности разработки высокопроизводительных параллельных программ требуется разработать инструменты, позволяющие упростить процесс тестирования параллельных алгоритмов и автоматизировать выбор параметров вычислительной сети.

Постановка задачи

Распределенная вычислительная сеть – это сложный для моделирования объект, имеющий комплексную, многоуровневую структуру и описывающийся множеством различных характеристик. При построении модели выбраны основные, наиболее важные параметры системы, определяющие ее производительность: топология, быстродействие вычислительных узлов, латентность вычислительных узлов, латентность устройств коммутации, скорость передачи данных, загрузка сети. Реализация модели включает описание структуры сети и разработку алгоритма маршрутизации, алгоритма обмена данными и алгоритма учета загрузки сети. Для анализа параллельного алгоритма его необходимо представить в виде набора специальных команд, которые интерпретируются моделирующей программой.

Разработка модели структуры сети

Для описания топологии распределенной вычислительной сети используется объектно-ориентированная модель, так как она дает возможность наиболее наглядно представить структуру сети. Все элементы сети разделены на три типа: вычислительный узел, линия связи, устройства коммутации. Причем вычислительный узел также является устройством коммутации. Каждый элемент сети обладает своим уникальным идентификатором и хранит уникальные идентификаторы своих «соседей». Такая структура обеспечивает двухстороннюю связь элементов сети, что позволяет легко находить маршруты передачи данных. Для сохранения структуры сети выбран формат XML, как наиболее распространенный и удобный для реализации. Данный формат позволяет сохранить сконфигурированную сеть в виде списка элементов сети с указанием связей входящих в него элементов.

Алгоритм обмена данными

Модель реализует парный синхронный обмен данными [3,4]. На рисунке 1 схематично изображен алгоритм обмена данными между двумя узлами.

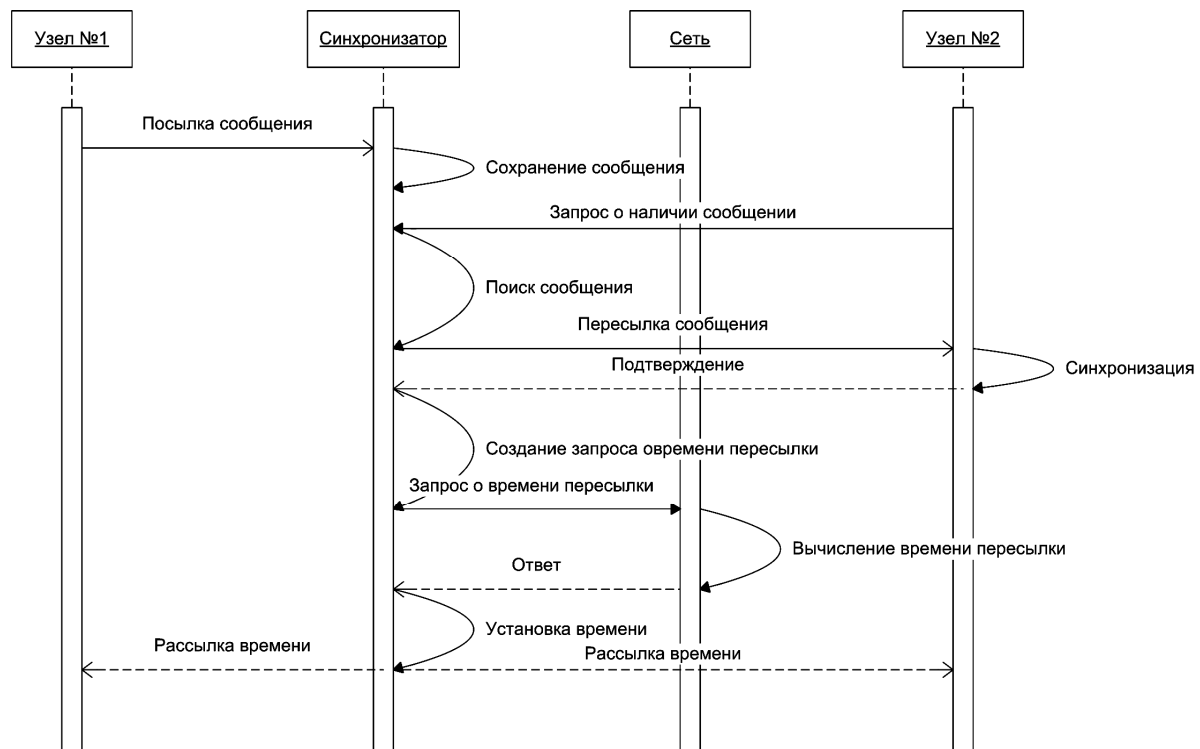


Рис. 1. Алгоритм пересылки данных от вычислительного узла №1 вычислительному узлу №2.

Для моделирования такого обмена реализовано следующее поведение объектов:

- вычислительный узел №1 посылает сообщение объекту «Синхронизатор» о готовности передать данные и ожидает подтверждения от принимающей стороны.
- вычислительный узел №2 посылает сообщение о готовности к приему данных
- «Синхронизатор» пересылает сообщение вычислительному узлу №2
- вычислительный узел №2 синхронизирует время отправки данных
- «Синхронизатор» формирует запрос о времени пересылки данных и отправляет его объекту «Сеть»
- объект «Сеть» на основе сформированного запроса, «зная» маршрут пересылки данных, объем данных, и время отправления, вычисляет время пересылки данных
- время пересылки рассылается вычислительным узлам

Алгоритм маршрутизации

Для корректного расчета времени передачи данных необходимо найти маршрут, по которому эти данные будут передаваться. Обычно существует несколько вариантов различных маршрутов, из которых надо выбирать один на основании определенных критериев. Для построения всех возможных маршрутов передачи данных реализован класс, который с помощью рекурсивных функций осуществлял поиск незамкнутых путей по связанному графу.

Производится нахождение всех путей от каждого элемента вычислительной сети к каждому. Полученные данные образуют N -мерную матрицу, где N – количество узлов вычислительной сети, между которыми происходит передача данных. Элементы матрицы – массивы списков узлов, через которые проходит маршрут.

Алгоритм учета загрузки сети

Для определения времени передачи данных через сеть был использован итерационный подход коррекции скорости передачи данных, основанный на определении загрузки разделяемой среды передачи (РСП) в конкретный момент времени после начала работы алгоритма. Суть подхода состоит в следующем:

- 1) проводится эмуляция работы алгоритма без учета загрузки РСП;
- 2) на основе полученных данных вычисляется загрузка РСП;

- 3) проводится эмуляция работы алгоритма с учетом загрузки РСП;
- 4) если число итераций недостаточно, перейти к пункту 2.

На каждой новой итерации мы получаем данные загрузки РСП, на основе которых корректируем время пересылок в системе, что, в свою очередь, влияет на распределение загрузки РСП. Для получения достоверных результатов число итераций должно быть примерно равно количеству пересылок, использующих РСП.

Экспериментальная оценка работы алгоритма

Модель распределенной вычислительной сети реализована на языке C# в среде разработки Microsoft Visual Studio 2005. Модель использует физические параметры системы: пропускная способность, латентность, количество операций, выполняемых процессором в единицу времени. Эти параметры могут быть получены из технического описания кластера либо экспериментальным путём. Для получения наиболее точных параметров конкретной вычислительной системы проводится ряд специальных тестов.

При сравнении модели с реальным объектом моделирования замерялись такие характеристики параллельных программ, как ускорение и время выполнения программы. В качестве параллельной программы была взята программа вычисления числа π [4]. Ниже в таблице 1 приведены полученные результаты измерений.

Таблица 1. Результаты тестовых измерений.

Количество процессоров	Сеть		Модель	
	Время, с	Ускорение	Время, с	Ускорение
2	8.01	1.87	8.02	1.87
3	6.07	2.47	6.02	2.49
4	4.05	3.70	4.01	3.74
6	3.16	4.75	3.01	4.98
8	2.34	6.4	2.24	6.69

Заключение

Разработана и протестирована модель распределенной вычислительной сети кластерного типа, реализованы алгоритмы маршрутизации, обмена данных и учета загрузки сети. Модель позволяет получить подробную информацию о работе параллельных алгоритмов, наглядно исследовать их поведение. Кроме того, модель может быть полезной при проектировании распределенных вычислительных сетей. Результаты тестирования показали соответствие модели исследуемому объекту.

Литература

1. Воеводин. В.В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. - СПб.: БХВ-Петербург, 2002.-608 с.
2. Шпаковский Г.И. Организация работы на вычислительном кластере: учеб. пособие для студентов естественнонауч. фак. БГУ / Г.И. Шпаковский, А.Е. Верхотуров, Н.В. Серикова. - Мн.: БГУ, 2004. - 182 с.: ил.
3. Г.И.Шпаковский, А.Е.Верхотуров, Д.А.Стрикелев. Организации эффективных вычислений на локальных сетях в стандарте MPI. Пособие - Мн.: БГУ, 2004.-180 с.
4. Шпаковский Г.И., Серикова Н.В. Программирование для многопроцессорных систем в стандарте MPI. Пособие - Мн.: БГУ, 2002.-323 с.
5. Верхотуров А.Е., Шпаковский Г.И., Дежурко А.М. Разработка параллельных численных методов для моделирования полупроводниковых приборов на кластерах // Научно-технический рецензируемый журнал общественного объединения «Белорусская инженерная академия» Инженерный вестник 1(21)/1'2006. с. 14–16.

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГИДРОУПРУГИХ АМОРТИЗАТОРОВ

¹Докукова Н.А., ²Мартыненко М.Д., ³Кафтайкина Е.Н.¹Международный институт трудовых и социальных отношений,²Белорусский государственный университет,³ГНУ Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, г. Минск

Актуальность проектирования гидравлических амортизаторов с заданными функциональными свойствами, значительно улучшающими виброзащитные характеристики мобильных машин, обусловлена запросами современного машиностроения. Эта задача связана с решением нелинейных дифференциальных уравнений, неразрешимых в конечном виде. Для исследования подобных механических систем целесообразно воспользоваться приближенными методами, позволяющими на теоретическом уровне установить закономерности между параметрами, в частности общим методом численно-аналитического исследования колебательных процессов для решения нелинейных дифференциальных уравнений, развитый авторами в [1, 2, 3].

Общая система нелинейных дифференциальных уравнений динамики гидропоры имеет вид [4, 5]:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= 2n_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \omega_1^2(x_2 - x_1) - f_1(1 - \delta)\cos\omega t + \eta \operatorname{sign}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2, \\ \ddot{x}_2 &= 2n_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_3^2(x_1 - x_2) - \omega_2^2x_2 + f_2\cos vt - k f_1\cos\omega t - \\ &\quad - k\eta \operatorname{sign}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2. \end{aligned} \quad (1)$$

В общем случае проинтегрировать систему уравнений (1) не представляется возможным. С целью избежания этой особенности воспользуемся методом эквивалентной линеаризации для вывода простых аналитических зависимостей, следуя которому функция $\eta \operatorname{sign}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2$ линеаризуются путем замены:

$$\eta \operatorname{sign}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \rightarrow K_2(\dot{\tilde{x}}_2 - \dot{\tilde{x}}_2^0 - \dot{\tilde{x}}_1 + \dot{\tilde{x}}_1^0) + K_1(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) \quad (2)$$

Здесь \tilde{x}_1 и \tilde{x}_2 означают приближенные решения по отношению к точным x_1 и x_2 ,

$$K_1 = \frac{\eta \operatorname{sign}(\dot{x}_2^0 - \dot{x}_1^0)(\dot{x}_2^0 - \dot{x}_1^0)^2}{x_2^0 - x_1^0}, \quad K_2 = K_1 \text{ или же } K_2 \equiv 0, \quad (3)$$

$x_1^0, \dot{x}_1^0, x_2^0, \dot{x}_2^0$ суть $x_1(0), \dot{x}_1(0), x_2(0), \dot{x}_2(0)$. Условие $x_2^0 - x_1^0 \neq 0$ достигается выбором в качестве начальных значений x_1^0 и x_2^0 условий устойчивого стационарного решения системы дифференциальных уравнений (1), следуя которому резонансные колебания динамической системы исследуются методом медленно меняющихся амплитуд.

Положим, что $\dot{x}_2^0 - \dot{x}_1^0 \neq 0$. Таким образом, решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (1) приводит к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}}_1 &= 2n_1(\dot{\tilde{x}}_2 - \dot{\tilde{x}}_1) + \omega_1^2(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) - f_1(1 - \delta)\cos\omega t + K_2(\dot{\tilde{x}}_2 - \dot{\tilde{x}}_2^0 - \dot{\tilde{x}}_1 + \dot{\tilde{x}}_1^0) + K_1(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) \\ \ddot{\tilde{x}}_2 &= 2n_2(\dot{\tilde{x}}_1 - \dot{\tilde{x}}_2) + \omega_3^2(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) - \omega_2^2\tilde{x}_2 + f_2\cos vt - k f_1\delta\cos\omega t - \\ &\quad - k\left(K_2(\dot{\tilde{x}}_2 - \dot{\tilde{x}}_2^0 - \dot{\tilde{x}}_1 + \dot{\tilde{x}}_1^0) + K_1(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1)\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (4) не представляет трудностей. Оценим погрешность между точным и приближенным решениями

$$z_1(t) = x_1(t) - \tilde{x}_1(t), \quad z_2(t) = x_2(t) - \tilde{x}_2(t). \quad (5)$$

Для этого вычтем соответственно из системы уравнений (1) уравнения (4), получим:

$$\ddot{z}_1(t) = 2n_1(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + \omega_1^2(z_2 - z_1) - Q_1(t),$$

$$\ddot{z}_2(t) = 2n_2(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + \omega_3^2(z_1 - z_2) - \omega_2^2 z_2 - k Q_1(t), \quad (6)$$

где $Q_1(t) = K_2(\Delta\dot{x}_2 - \Delta\dot{x}_1) + K_1(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) - r(t)$, $\Delta\tilde{x}_i = \tilde{x}_i - x_i^0$, $i = \overline{1,2}$. Проинтегрируем (6) дважды по t , получим:

$$z_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau) \{2n_1(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + \omega_1^2(z_2 - z_1) - Q_1(t)\} dt,$$

$$z_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau) \{2n_2(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + \omega_3^2(z_1 - z_2) - \omega_2^2 z_2 - k Q_1(t)\} dt. \quad (7)$$

Введем следующую норму:

$$\|z_i\|_\lambda = \max_t \{ \exp(-\lambda t) (|z_i(t)| + |\dot{z}_i(t)|) \}, \quad \lambda > 0, \quad i = \overline{1,2}. \quad (8)$$

Оценим по модулю полученные выражения, учитывая, что $r(t)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0, T]$

$$|r(\dot{x}_1, \dot{x}_2) - r(\dot{x}_1^0, \dot{x}_2^0)| \leq M (|\dot{x}_1 - \dot{x}_1^0| + |\dot{x}_2 - \dot{x}_2^0|),$$

а постоянные A_* , B_* , G_* , H_* выберем из следующих условий

$$A_* = \max_{t, x_1^0, x_2^0, x_1^0, x_2^0} \{2n_1 + |K_2|, \omega_1^2 + |K_2|\}, \quad B_* = \max_{t, x_1^0, x_2^0, x_1^0, x_2^0} \{M + |K_2|, |K_2|\} = M + |K_2|,$$

$$G_* = \max_{t, x_1^0, x_2^0, x_1^0, x_2^0} \{k(2n_1 + |K_2|), k(\omega_1^2 + |K_2|) + \omega_2^2\},$$

$$H_* = \max_{t, x_1^0, x_2^0, x_1^0, x_2^0} \{k(M + |K_2|), k|K_2|\} = k(M + |K_2|). \quad (9)$$

Учитывая, что $n_2 = k n_1$, получим

$$\|z_1\|_\lambda \leq \frac{1}{2} (A_* (\|z_1\|_\lambda + \|z_2\|_\lambda) + B_* (\|\Delta x_1\|_\lambda + \|\Delta x_2\|_\lambda)) C(\lambda, t),$$

$$\|z_2\|_\lambda \leq \frac{1}{2} (G_* (\|z_1\|_\lambda + \|z_2\|_\lambda) + H_* (\|\Delta x_1\|_\lambda + \|\Delta x_2\|_\lambda)) C(\lambda, t),$$

где

$$C(\lambda, t) = (\lambda^{-1} + \lambda^{-2})(1 - \exp(-\lambda t)) - T \lambda^{-1} \exp(-\lambda t). \quad (10)$$

Функциональная зависимость $C(\lambda, t)$ имеет горизонтальную асимптоту $C_*(\lambda, t) = \frac{\lambda + 1}{\lambda^2}$ при $t \rightarrow \infty$. Из (10) следует, что погрешность между точным решением (1) и приближенным (3) не превышает величины

$$\|z_1\|_\lambda \leq \frac{B_* C(\lambda, T)}{2 - A_*(k+1)C(\lambda, T)} (\|x_1 - x_1^0\|_\lambda + \|x_2 - x_2^0\|_\lambda),$$

$$\|z_2\|_\lambda \leq \frac{kB_* C(\lambda, T)}{2 - A_*(k+1)C(\lambda, T)} (\|x_1 - x_1^0\|_\lambda + \|x_2 - x_2^0\|_\lambda). \quad (11)$$

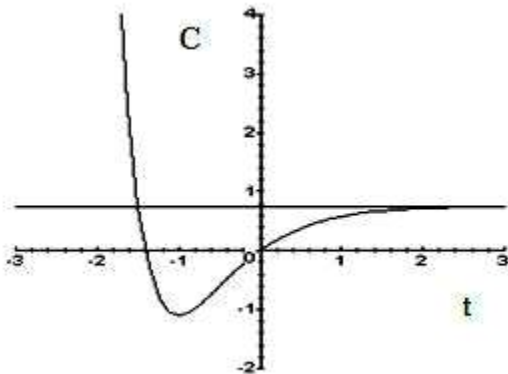


Рисунок 1. График зависимости $C(\lambda, t)$ и $C_*(\lambda, t)$ при $\lambda = 2,0$

Произвольный параметр λ зафиксируем условием:

$$C(\lambda, T) < \frac{2}{(k+1)A_* + kB_*}. \quad (12)$$

Представлен метод эквивалентной линеаризации, позволяющий исследовать колебательные процессы в нелинейных механических системах общего вида. Выписанные явные уравнения (7) для линеаризованного решения и оценки (11) доказывают его близость к искомому точному решению при соответствующем выборе параметра λ . Поэтому предложенная линеаризация (3) позволяет представить нелинейные дифференциальные уравнения колебаний гидроупругого амортизатора в удобном для анализа виде с целью выяснения влияния нелинейных факторов на механическую систему в целом.

Литература

1. Докукова Н.А., Мартыненко М.Д. Метод линеаризации и его применение для анализа нелинейных колебательных систем// Известия НАН Беларуси. 1999. Сер. физ.-техн. наук, № 3. С. 108-111.
2. Мартыненко М.Д., Докукова Н.А., Бойко Л.И. О колебательных процессах в механических системах// Инженерно-физический журнал. 1999. Т. 72, № 3. С. 491-494.
3. Докукова Н.А., Мартыненко М.Д. Линеаризация в нестационарных задачах изгиба балок при нелинейном законе упругости// Известия НАН Беларуси. 1988. Сер. физ.-техн. наук, № 1. С. 38-43.
4. Левитский Н.И. Колебания в механизмах. - М., 1988.
5. Тондл А. Нелинейные колебания механических систем. - М.: Мир, 1973.- 336 с.

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ АРМИРОВАНИЯ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ТРУБ ИЗ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИКОВ

Коротков А.В.

Марийский государственный технический университет, г. Йошкар-Ола, Россия

Выполним расчет собственных частот и форм колебаний многослойной прямой трубы под давлением как тонкостенной цилиндрической оболочки со свободными кромками. Материал оболочки – органический композит Kevlar 49/PR-286. Модули упругости однонаправленного волокнистого композита в естественной системе координат, совпадающими с главными осями упругости, $E_1 = 64,1$ ГПа, $E_2 = 5,38$ ГПа, модуль сдвига $G_{12} = 2,07$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_{12} = 0,35$, плотность $\rho = 1380$ кг/м³. Стенка оболочки образована перекрестной спиральной намоткой волокон под углом $\varphi = \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 75^\circ, 0/90^\circ$. Исследуется симметричный набор, число однонаправленных слоёв – шесть. Сечение оболочки считается идеально круглым, толщина стенки – постоянной.

Материал каждого слоя представляется в виде однородной и ортотропной среды с линейно упругими свойствами. Упругие характеристики пакета, как многослойного ортотропного тела, определяются при помощи структурной модели [1]. Результаты расчётов представлены в табл. 1.

Таблица 1

Углы армирования $\pm\varphi$	E_s , ГПа	E_t , ГПа	G_{st} , ГПа	ν_{st}	ν_{ts}
$\pm 30^\circ$	21,555	5,175	12,970	1,366	0,328
$\pm 45^\circ$	7,447	7,447	16,559	0,799	0,799
$\pm 60^\circ$	5,175	21,555	12,970	0,328	1,366
$\pm 75^\circ$	5,242	51,857	5,942	0,097	0,960
$0/90^\circ$	34,998	34,998	2,070	0,054	0,054

Считая трубу достаточно длинной, выделяем следующую форму движения стенки [2]:

$$w(s, \theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} w_n(s) \cdot \cos n\theta \cdot \cos \omega t,$$

$$v(s, \theta, t) = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} w_n(s) \cdot \sin n\theta \cdot \cos \omega t. \quad (1)$$

где w и v – перемещения точек срединной поверхности в радиальном и окружном направлениях, s и θ – осевая и окружная координаты соответственно, t – время, ω – круговая частота колебаний, n – число волн в окружном направлении. Считаем $w_n(s) = const$, то есть образующие оболочки при колебаниях стенки остаются прямыми. Функции формы (1) отражают соотношения полубезмоментной теории тонких цилиндрических оболочек.

На основании уравнений Лагранжа второго рода получается следующая формула для собственных частот колебаний [0]:

$$\omega_n^2 = \frac{2\pi D_t n^2 (n^2 - 1)(n^2 - 1 + 3\tilde{p})}{m_T r^3 (n^2 + 1)} \quad (2)$$

где $D_t = E_t h^3 / [12(1 - \nu_{st}\nu_{ts})]$ – цилиндрическая жесткость стенки в окружном направлении, $m_T \approx 2\pi\rho h r$ – масса трубы, отнесенная к единице длины, $\tilde{p} = pr^3 / (3D_t)$ – параметр давления. Формула (2) учитывает влияние внутреннего давления на изгибную жесткость стенки в окружном направлении.

Для оценки точности расчёта по формуле (2) используется конечно-элементная программа ANSYS и оболочечные КЭ естественной кривизны SHELL93. Каждый элемент имеет 48 степеней свободы.

В табл. 2 в зависимости от углов армирования и внутреннего давления представлены собственные частоты оболочки с параметрами: радиус срединной поверхности $r = 83,5$ мм, толщина стенки $h = 1,371$ мм. Расчётные частоты соответствуют собственным формам (1) при $n = 2, 3$. Для расчёта использовалась прямоугольная конечно-элементная сетка 9×20 . Первые строки таблицы (числитель) содержат данные расчёта МКЭ, вторые (знаменатель) – расчёта по формуле (2), третьи – относительную погрешность.

Таблица 2

ρ , МПа	Собственная частота, Гц					
	$n = 2$			$n = 3$		
	$\varphi = \pm 30^\circ$	$\varphi = \pm 60^\circ$	$\varphi = 0^\circ / 90^\circ$	$\varphi = \pm 30^\circ$	$\varphi = \pm 60^\circ$	$\varphi = 0^\circ / 90^\circ$
0	61	123	122	172	348	344
	64	129	122	179	365	346
	4,7%	4,7%	0%	4,0 %	4,7%	0,6%
0,5	384	399	399	737	797	795
	443	457	455	780	843	835
	15,4%	14,5%	14,0%	5,8%	5,8%	5,0%
1	539	551	551	1026	1071	1070
	624	634	632	1089	1135	1129
	15,8%	15,1%	14,7%	6,1%	6,0%	5,5%

Из анализа табл.2 следует:

1. Результаты расчётов, полученные с учётом внутреннего давления, заметно отличаются друг от друга. При $n = 2$ максимальная погрешность составляет 15,8%, при $n = 3$ – 6,1%. Для высших частот относительная погрешность оказывается меньше.

2. При отсутствии внутреннего давления результаты аналитического и численного решений достаточно хорошо согласуются друг с другом. Относительная погрешность не превышает 4,7%.

3. С увеличением внутреннего давления и углов армирования собственные частоты колебаний стенки трубы увеличиваются. Чем выше внутреннее давление, тем слабее проявляется влияние параметров армирования на собственные частоты.

Литература

1. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. - М.: Машиностроение, 1984. - 264 с.
2. Куликов Ю.А. Влияние начальных технологических неправильностей на вибрации тонкостенных криволинейных труб с пульсирующим внутренним давлением// Проблемы машиностроения и надёжности машин, 1993, N 6. С.11-21.
3. Коротков А.В., Куликов Ю.А. Вибрации, вибропрочность и виброустойчивость криволинейных труб и трубопроводов с протекающей жидкостью// IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Т. III Н.Новгород: Изд-во НГУ им. Н.И.Лобачевского, 2006. – С.120-121.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ УРАВНЕНИЕМ НАВЬЕ-СТОКСА

Курлович А.А, Кожух И.Г.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Турбулентность сопровождает нас везде, где есть машины и аппараты, двигатели и энергоустановки, где используются рабочие тела в виде трех известных фазовых состояний: жидкости, газа и плазмы. Многие известные подходы к ее исследованию в настоящее время являются приближенными, и в большей своей части основаны на эмпирических моделях. С теоретической точки зрения весьма полезны расчетные методы, которые базируются на решении уравнений математической физики. И главным для газодинамики сплошных сред является фундаментальное векторное уравнение Навье-Стокса, которое описывает широкий класс вязких, сжимаемых течений жидкости, газа и плазмы. Нет оснований сомневаться, что это уравнение справедливо для ламинарных и турбулентных течений. Существует большое число частных газодинамических задач, которые подтверждают соответствие экспериментальных результатов и решений этого уравнения.

Уравнение является весьма сложным, и в настоящее время аналитически оно не решено, хотя существует много методов, при помощи которых оно решается численно. Но все же желанием исследователей всегда было получение конечных математических соотношений, позволяющих проводить наглядный анализ и определять области допустимых значений. Поэтому решение уравнения Навье-Стокса максимально преобразовывалось или упрощалось. Так, для стационарного течения жидкости и газа уравнение приобретало вид уравнения Пуассона.

Хотя уравнение Эйлера появилось гораздо раньше уравнения Навье-Стокса, можно считать, что оно является неким упрощением. В практических расчетах используется комбинированный подход - ядро потока рассчитывается по уравнению Эйлера, а поток у стенок - по уравнению Навье-Стокса. Если учесть, что все реальные рабочие тела являются вязкими, то уравнение Эйлера всегда является приближенным.

Очень часто при расчетах течений используют симметрию. Обтекание осесимметричных тел и течение в осесимметричных соплах наталкивают на искушение использовать этот факт и из трех дифференциальных уравнений векторного уравнения Навье-Стокса оставить два [3]. При этом свести трехмерную постановку задачи к двумерной, считая, что симметричные координаты можно опустить. В этом случае сильно упрощается расчетный процесс. Для отдельных случаев создаются условия получения аналитического решения. Расчеты с осесимметричным допущением никогда не дают подобных конфигураций.

Иногда избавляются не от координат, а от нелинейных членов. Ведь векторное уравнение Навье-Стокса или, что то же самое, система трех дифференциальных уравнений Навье-Стокса состоит из нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Это уравнения колебательного типа или волновые. Решения этих уравнений могут быть либо периодическими, либо солитоновыми. Если из уравнений Навье-Стокса удалить нелинейный конвективный член, то система станет линейной, а локализованные стационарные решения, характеризующие турбулентность, будут утрачены.

Одним из способов решения уравнения Навье-Стокса является способ выделения вязкой пристенной области и области условно потенциального течения. При этом область, расположенная далеко от стенки, может считаться невязкой. Газодинамические решения для этой области находятся из уравнения Эйлера. В области, находящейся непосредственно около стенки, эффекты вязкости проявляются наиболее сильно. Приближение Эйлера здесь несправедливо.

Особенности данной системы позволяют упростить эллиптические уравнения Навье-Стокса и в дальнейшем свести их к параболическим.

Наиболее строгое упрощение сделал Людвиг Прандтль, который для абстрактной плоской задачи, предусматривающей обтекание пластины полубесконечным потоком, ввел понятие толщины пограничного слоя. При этом Прандтль использовал свойство профиля скорости, имеющего вид кривой насыщения.

Упрощение Рейнольдса основывается на статистическом определении турбулентного течения. В отличие от волновой концепции, статистическая теория предполагает наличие в потоке большого количества отдельных невязанных мелких вихрей различной интенсивности, непрерывно меняющих свое положение, при которых происходит перенос масс жидкости между ее соседними слоями. Эти умозрительные допущения легли в основу нового представления Рейнольдсом уравнений Навье-Стокса. Он получил из трех уравнений Навье-Стокса свои шесть уравнений. Немедленно возникла проблема замыкания этих уравнений - потребовалось дополнительно три граничных условия. До сих пор эта проблема в общем виде не решена.

Запись этих уравнений повлекла за собой целый ряд новшеств. Появились правила осреднения параметров по Рейнольдсу. Было введено понятие кажущегося касательного напряжения (Рейнольдсово напряжение).

Замыкание уравнений необходимых для решения, осуществляется с помощью специально разработанных моделей турбулентности. В настоящее время в литературе представлено около двух десятков аналогичных моделей. Они все, как правило, основываются на гипотезах (гипотеза о пути перемешивания Прандтля, гипотеза Тейлора о переносе завихренности и т.п.) и результатах экспериментов на плосковоздушных "холодных" моделях.

Система состоит из двух уравнений:

- 1) уравнения движения,
- 2) уравнения непрерывности.

В векторном виде для несжимаемой жидкости они записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \nu \Delta \vec{V} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{f} \\ \nabla \cdot \vec{V} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа, ∇ – оператор Гамильтона, \vec{V} – вектор скорости, t – время, ν – коэффициент кинематической вязкости, ρ – плотность, P – давление, \vec{f} – вектор плотности массовых сил.

Именно этот вид системы разработан в наибольшей степени, так как позволяет избежать получение нестационарных решений, а также турбулентных завихрений, являясь, однако, грубым упрощением исходной системы.

Достаточно часто выбирают специальные потоки для решения данной системы с ограничениями, но даже в таких случаях применение аналитического решения может быть достаточно разнообразным.

Например, рассмотрим движение жидкости между параллельными пластинами (рис. 1):

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -1; \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (2)$$

Данная граничная задача имеет решение [4]:

$$u(y) = \frac{1}{2}(y - y^2) \quad (3)$$

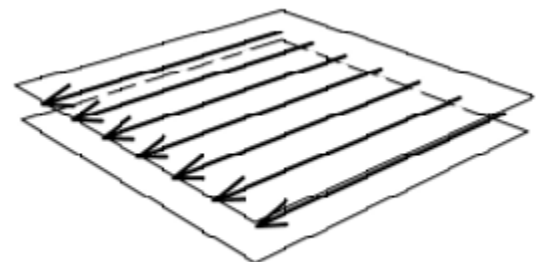


рис. 1

Отталкиваясь от данного решения, для вязких несжимаемых жидкостей был получен достаточно большой класс частных решений задачи.

Сложности появляются при радиальном движении между параллельными пластинами (при возникновении турбулентности на параллельном потоке, рис. 2). Это незначительное изменение влечет за собой конвекцию – вследствие чего получаем нелинейность [2, 3].

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + Rf^2 = -1; \quad f(0) = f(1) = 0$$

При достаточно больших числах Рейнольдса получим нестационарное решение. Данная проблема по сей день не решена.

Зона применений системы обширна. Примером может служить работа по исследованию фильтрационных характеристик пластов. Решение задачи позволяет построить модель порового пространства и дает возможность оценки характеристик горных пород с помощью продольных волн. В основу такой оценки положен следующий физический механизм.

При распространении упругой волны на ее фронте происходят фильтрационные перетоки порового флюида, приводящие к изменению упругих свойств среды. Модули упругости сухой и насыщенной пористых сред могут отличаться более чем на четверть. Следствием существования эффекта фильтрационных перетоков на фронте упругой волны является возможность получить изменение ее кинематических и динамических параметров, зависящих от проницаемости среды и свойств жидкости, через изменение входных параметров волны (амплитуды и частоты). Использование идеализированных моделей деформации скелета пористой среды и фильтрационных течений в порах дает возможность учесть взаимодействие указанных процессов [1].

Для описания многих динамических процессов используют уравнение Навье-Стокса. Для того чтобы решить это уравнение, можно воспользоваться высокоточным численным анализом. Но и на этом пути исследователей встречаются многочисленные трудности. Если же эту систему решить аналитически, то многие проблемы могут быть сняты.

Литература

1. Пат. 2132560 РФ., Способ оценки проницаемости горных пород /В.Ш. Халилов, Р.Р. Гафуров, К.В. Антонов и др. - № 97104988; Заявлено 24.03 97.
2. Князев Д.В. Вращательно-симметричные движения вязкой жидкости с пространственным ускорением. - Пермь. 2007.
3. D. Razafinralandy, A. Hamdouni, Consequences of Symmetries on the Analysis and Construction of Turbulence Models, 2006.
4. Лажыженская О.А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. - М: Наука, 1970.

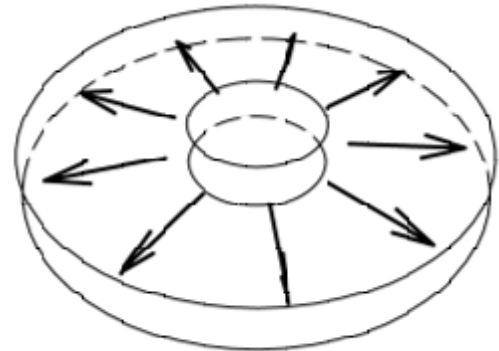


рис. 2

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БИОХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

Чухутина О.В.

Белорусский государственный университет, г. Минск

1. Введение

Исследование систем высокой сложности является одной из главных целей на современном этапе развития науки. Без него немислимо развитие таких естественно-научных областей, как физика, химия, биология. Поскольку, как правило, нет простых формул, описывающих поведение модели, а стало быть, и объекта, который описывается моделью, то единственный путь – свести дело к вычислениям, применению численных методов решения задач.

В настоящей работе рассмотрено построение аналитических и имитационных моделей в применении к задачам биохимии. При решении задач, связанных с динамикой биохимических процессов, часто возникает необходимость предсказания временной зависимости количества различных реагентов во времени. При этом условия реально проводимых экспериментов очень сложны, что в большинстве случаев не позволяет получить указанные зависимости в аналитическом виде. Кроме того, малое количество молекул реагентов, которое зачастую участвует в биохимических реакциях, не позволяет адекватно описать процесс системой непрерывных дифференциальных уравнений, поскольку процесс становится дискретным. Все это говорит об актуальности исследований в направлении построения имитационных моделей биохимических процессов.

В рамках работы были реализованы несколько алгоритмов имитационного моделирования, в частности: прямой метод Гиллеспи, метод первой реакции [1], τ -leap метод [2]. Правильность моделей тестировалась на простейших реакциях с помощью аналитического моделирования. Реализованные алгоритмы были применены для моделирования процесса актин-полимеризации – важного клеточного процесса, обуславливающего подвижность клеток, в том числе и раковых [3].

2. Теория

В каждый временной шаг система находится в определенном состоянии. В данном состоянии системы для исполнения выбирается то превращение, которое считается наиболее вероятным. Ключевым является выбор случайных чисел, используя машинный генератор случайных чисел и их использование для выбора превращений.

Первый из методов, предложенных Гиллеспи [1], получил название «прямой метод». Он однозначно вычисляет, какая реакция произойдет следующей и когда она произойдет. Второй предложенный метод Гиллеспи назвал «методом первой реакции». Краткая суть метода заключается в генерации для каждой из реакций (в нашем случае: $A+B \rightarrow C$; $C \rightarrow A+B$) предполагаемого времени наступления реакции (t), затем выбирается реакция с наименьшим t («первая реакция») и выполняется данная реакция (μ) в момент времени t . Позднее был предложен метод τ -leap [2], который дает наибольший выигрыш во времени и поэтому доказал высокую эффективность стохастического подхода к моделированию биохимической кинетики, ниже кратко приведен его алгоритм.

1. Сложная реакция раскладывается на простые, однонаправленные.

2. Вводятся постоянные реакции, k_i не зависящие от концентрации, и временной интервал τ .

3. Генерирование количества реакций, произошедших за τ , с помощью потока Пуассона.

3. Описание моделирования

В данной работе посредством пакета MATLAB были реализованы методы, разработанные Гиллеспи, под названием прямой метод, метод первой реакции, метод τ -leap, а также модифицированный метод первой реакции с дискретным временем.

Для реализации была выбрана система двух простых реакций:



Задачей было проанализировать быстродействие имитационных методов и сравнить полученные решения с аналитическим. Была записана система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая успешно решена в системе Mathcad.

При имитационном моделировании использовался объем $8 \mu\text{M}^{-3}$, концентрация молекул C в начальный момент времени равнялась 0. Постоянные скорости реакции k_1 и k_2 равнялись $0.3 \mu\text{M}^{-1}\text{s}^{-1}$ и 0.1s^{-1} соответственно. Следует отметить, что данное и все последующие моделирования проводились посредством пакета MATLAB 6.5 под опера-

ционной системой Windows XP на процессоре Athlon AMD 3800+ X2(Dual Core). Поскольку временной шаг в прямом методе и методе первой реакции не является дискретным и зависит от постоянных реакции и числа реагирующих молекул, полученные результаты невозможно сравнить с аналитическим решением. Для устранения данной проблемы можно ввести дискретный временной шаг, на который бы делился временной интервал наступления реакции.

На рисунке 1 представлено решение, полученное одним из таких реализованных методов – модифицированным методом первой реакции с дискретным временем, и сравнено данное решение с аналитическим. Поскольку поведение концентрации A и B аналогично представлено только поведение концентрации вещества A.

На рисунке 2 произведено сравнение аналитического решения с методом τ -leap. Из рисунка 2 видно, что метод τ -leap не дает такого совпадения с аналитическим решением, как методы рассмотренные выше. Сравнительный анализ показывает, что при приближении к стационарному состоянию (~20 мс), концентрации веществ практически аналогичны, однако до этого момента различия в поведении концентраций весьма очевидны.

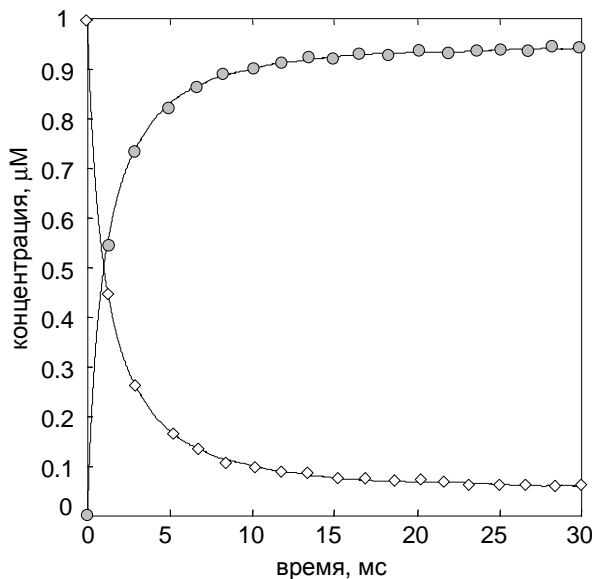


Рис. 1. Сравнение аналитического и имитационного моделирования методом первой реакции для реакций (1). Линии – результат аналитического моделирования (пунктир – концентрация A, сплошная – C). Кружки и ромбы – результат имитационного моделирования

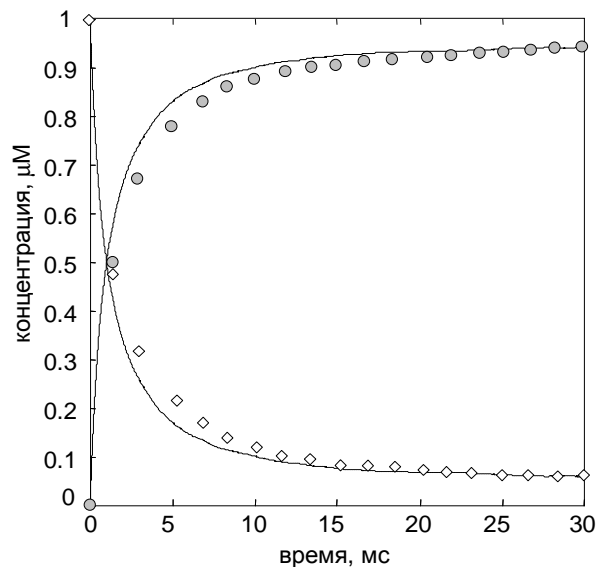


Рис. 2. Сравнение аналитического и имитационного моделирования методом τ -leap (1). Линии – результат аналитического моделирования (пунктир – концентрация A, сплошная – C). Кружки и ромбы – результат имитационного моделирования

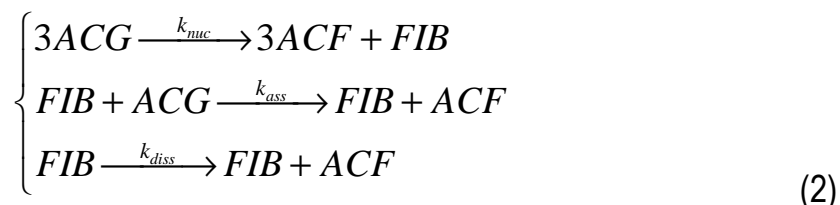
Все методы были также сравнены по быстродействию. Результаты (времена выполнения на компьютере T) представлены ниже:

- для прямого метода $T=1.81$ с;
- для метода первой реакции $T=2.17$ с;
- для метода первой реакции с дискретным временем $T=3.01$ с;
- для метода τ -leap $T=2.3 \times 10^{-4}$ с.

Видно, что метод τ -leap обладает наибольшим быстродействием.

4. Актин-полимеризация

Была рассмотрена самая простая модель актин-полимеризации [3], которая включает три реагента: F-актины (обозначим как ACF), G-актины (ACG) и концы филамент (FIB), где возможны три реакции: нуклеации, диссоциации, и элонгации. В этих обозначениях была построена система простейшей модели актин-полимеризации:



Если филамента после реакции диссоциации оказывается состоящей из трех мономеров, она распадается с образованием трех частиц G-актина. С помощью метода первой реакции была реализована система (2). Начальные условия были взяты следующими: объем – куб со стороной 4 $\mu\text{м}$, начальная концентрация F-актинов 0 $\mu\text{М}$, G-актинов 6 $\mu\text{М}$, постоянные скорости реакции нуклеации, диссоциации, и элонгации взяты соответственно: $k_{nuc}=10^{-8}\mu\text{М}^{-2}\text{с}^{-1}$, $k_{ass}=10\mu\text{М}^{-1}\text{с}^{-1}$, $k_{diss}=1\text{с}^{-1}$. Посредством реализованной модели в пакете MATLAB проанализировано поведение F-актинов со временем. Временной интервал был взят от 0 до 1000с. Результаты моделирования представлены на рисунке 3.

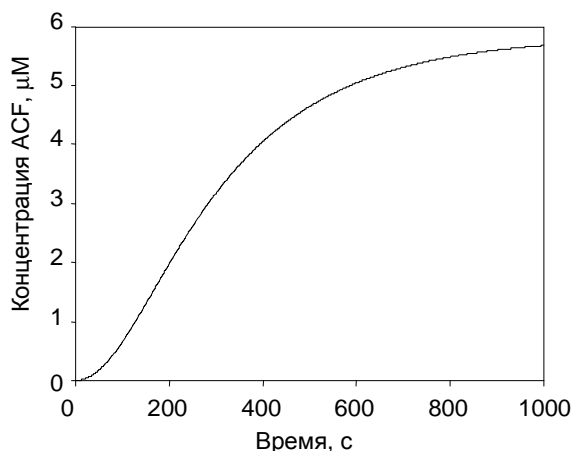


Рис.3. Поведение концентрации F-актина в системе с реакциями (2), полученное с помощью метода первой реакции

Таким образом, было проведено сравнение скорости моделирования различными методами. Метод τ -leap показал наилучший результат по скорости, однако он является приближенным и дает значительное расхождение с аналитической моделью в области нестационарного состояния. Реализованные алгоритмы были применены для моделирования процессов актин-полимеризации.

Литература

1. Gillespie, D.T., *Exact stochastic simulation of coupled chemical reactions*. J. Phys. Chem., 1977. **81**(25): p. 2340-2361.
2. Gillespie, D.T., *Approximate accelerated stochastic simulation of chemically reacting systems*. J. Chem. Phys., 2001. **115**(4): p. 1716-1733.
3. Pollard, T.D., *Rate constants for the reactions of ATP- and ADP-actin with the ends of actin filaments*. J. Cell Biol., 1986. **103**: p. 2747-2754.

РАЗДЕЛ IV. СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУЧНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

ВОЗМОЖНОСТИ МЕТОДА НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ ДЛЯ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Антонова Ю.Л.

*Международный государственный экологический университет
им. А.Д. Сахарова, г. Минск*

Рассмотрены возможности использования метода нечеткой логики для количественной оценки состояния атмосферы промышленных городов и принятия решений по уменьшению воздействия загрязнения на население. На примере двух областных центров Беларуси – Бреста и Гомеля – изучалась связь концентраций нормируемых загрязнителей атмосферного воздуха (взвешенные вещества (пыль), диоксид серы, оксид углерода, диоксид азота, фенол, аммиак, формальдегид, свинец – входные параметры) и заболеваемости органов дыхания у детей в возрасте до 14 лет (выходной параметр).

Для моделирования нечетких систем было использовано приложение Fuzzy Logic Toolbox пакета прикладных программ MatLab. Построение логической модели осуществлялось двумя методами.

Первый метод основан на построении функций принадлежности и таблицы правил, исходя из имеющихся данных о степени воздействия отдельных показателей с учетом их класса опасности на объект исследования.

При построении функций принадлежности для определения значений диапазонов входных параметров использовалась формула расчета индекса загрязнения атмосферы (ИЗА) для одного вещества.

Учитывались следующие интервалы загрязнения атмосферы:

$ИЗА \leq 5$ – низкое,

$5 < ИЗА < 7$ – повышенное,

$7 \leq ИЗА < 14$ – высокое,

$ИЗА \geq 14$ – очень высокое загрязнение.

Диапазоны среднегодовых концентраций каждого конкретного загрязняющего вещества определялись из приведенных выше значений ИЗА с учетом среднесуточных предельно допустимых концентраций (ПДК_{с.с.}) и классов опасности отдельных веществ.

Функция принадлежности выходного параметра строилась на основе статистических данных по заболеваемости органов дыхания детского населения.

Логическая модель оценки качества окружающей среды создана путем построения нечетких выводов на основе базы правил и последующим приведением полученных результатов к четкости. При составлении правил каждому из них присваивался весовой коэффициент, характеризующий значимость данного правила. Вес правила накладывается на выход IF-части и может принимать значение от 0 до 1 в зависимости от степени воздействия отдельных показателей и чувствительности к ним объектов исследования.

Оценка эффективности разработанной модели была проведена на основе статистических данных по среднегодовым концентрациям (мкг/м³) основных нормируемых загрязнителей атмосферного воздуха и заболеваемости органов дыхания детского населения. Оценка неопределенности метода осуществлялась сравнением смоделированных и статистически достоверных уровней заболевания органов дыхания у детей городов Брест и Гомель. В результате проведенной оценки адекватности модели установлено, что уровень отклонения результатов моделирования для обоих городов не превышает 11%.

Второй метод построения логической модели заключался в автоматическом синтезировании нейро-нечетких сетей из экспериментальных данных с помощью ANFIS-редактора. При этом функции принадлежности синтезированных систем были настроены так, чтобы минимизировать отклонения между результатами нечеткого моделирования и экспериментальными данными. Генерирование исходной системы нечеткого логического вывода было проведено по методу субкластеризации. При обучении системы реализовывался гибридный метод, объединяющий метод обратного распространения ошибки с методом наименьших квадратов. При проведении тестирования нечеткой системы (Test FIS) уровень отклонения результатов моделирования составил около 3%.

Реализованный в методе нечеткой логики дифференцированный учет влияния входных факторов на выходной параметр позволяет принимать решения по обеспечению приемлемого уровня загрязнения окружающей среды.

Сравнительный анализ использованных методов построения логических моделей показал, что второй подход имеет более высокую точность моделирования, однако, в отличие от первого метода, он не позволяет учитывать мнения экспертов. Таким образом, каждый из методов моделирования имеет свои преимущества и недостатки и, следовательно, должен выбираться в зависимости от решаемых задач с учетом имеющейся в наличии информации.

В результате проведенной оценки эффективности разработанных моделей можно сделать вывод о том, что оба примененных подхода к построению логических моделей могут быть использованы для комплексного анализа влияния отдельных показателей на исследуемые объекты. Применение метода нечеткой логики представляется перспективным при разработке мероприятий, направленных на снижение отдельных видов заболеваемости, обусловленных экологическими факторами.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕГУЛИРУЕМОГО СВЕТОФОРом ПЕРЕКРЁСТКА

Анфилец С.В., Свирский В.М.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

1 Введение

Прежде чем начать разработку, создание и внедрение любой дорогостоящей системы, необходимо удостовериться в её эффективности. Для этого необходима программа моделирования дорожного перекрёстка. Целью её является сравнение результатов, получаемых на моделях перекрёстка, регулируемого светофором со статическими фазами и перекрёстка, регулируемого светофором, фазы которого зависят от входных потоков.

Моделирование основывается на теории массового обслуживания. Перекрёсток можно представить как систему с четырьмя обслуживающими приборами и четырьмя потоками заявок. Схема показана на рисунке 1.

Время задержки в обслуживающих устройствах зависит от времени зелёных и красных фаз светофора, а также времени переходного процесса. Интенсивность потоков автотранспортных средств (АТС) на дорогах меняется не только в течение суток, но и носит случайный характер в целом. Поэтому для удобства проведения моделирования следует иметь программу, в которой можно просто изменять параметры системы, а именно средние значения интенсивности входных потоков.

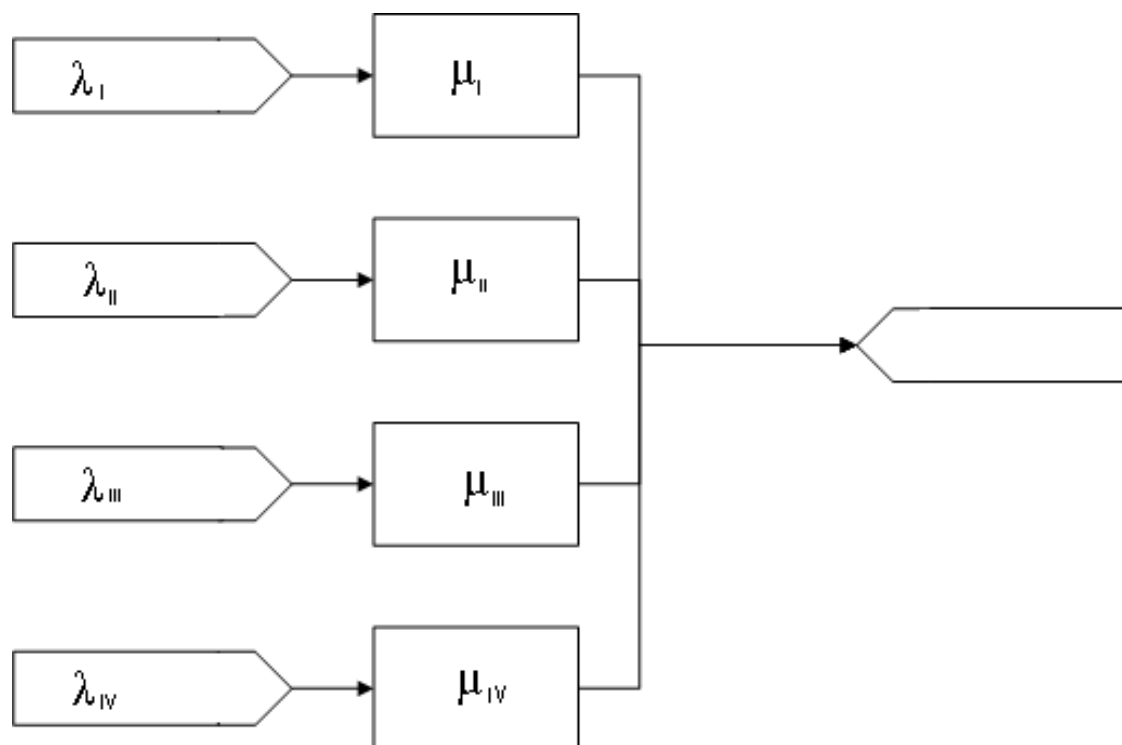


Рисунок 1. Схема моделирования перекрёстка

2. Система программирования

Для моделирования наиболее удобен язык GPSS (General Purpose Simulation System), созданный фирмой IBM в 60-х годах. Он относится к числу проблемно-ориентированных языков моделирования, предназначенных для описания и имитации дискретных объектов. Наиболее удобен для моделирования Q-схем, стохастических сетевых моделей, сетей массового обслуживания. Все стандартные задачи имитационного моделирования автоматизированы (скрыты в интерпретаторе GPSS). Система включает входной язык для описания моделей и задания режимов моделирования и соответствующее программное обеспечение, обеспечивающее интерфейс, моделирование и статистическую обработку результатов. Кроме того, для создания модели интеллектуально светофора использовался язык PLUS (Programming Language Under Simulation). Это простой, но мощный язык программирования, являющийся важной частью языка GPSS. Он даёт возможность использовать подпрограммы, написанные на специальном синтаксисе PLUS, в моделях и получить программисту контроль над выполнением моделирования, что делает язык ещё более гибким. Можно изменять параметры системы и выполнять некоторые блоки языка GPSS в глобальном контексте модели.

Для программы, генерирующей код на языке моделирования GPSS, была выбрана среда программирования Borland C++ Builder 6.0.

3. Описание реализации

Структура GPSS-модели представлена на рисунке 2. Она включает описание объекта – текст модели в терминах операторов GPSS и набора команд GPSS, управляющих запуском и остановкой, приостановкой моделирования, сбором и обработкой статистики. Сегменты состоят из операторов, задающих процессы перемещения и обработки транзактов в узлах модели. Они многократно выполняются в ходе моделирования. Каждый сегмент начинается оператором генерации транзактов Generate и завершается их терминацией, извлечением из сети оператором Terminate.

Модель объекта	Декларативная (описательная) часть	
	Управляющая часть	Generate ... Сегмент 1 ... Terminate
		Generate ... Сегмент 2 ... Terminate
Команды управления моделированием	START ... END	

Рисунок 2. Структура модели на GPSS

Оператор Generate выполняет функцию генерации потоков транзактов, основным параметр в нём - это время между появляющимися машинами в данном потоке. Это время можно задать в виде различных законов распределения, например, экспоненциальный, или равномерного распределения. Среднее значение будет характеризовать интенсивность потока в данном направлении. Для насыщенного потока можно задать этот параметр как единицу, а чем больше значение среднего значения распределения, тем менее насыщенный поток.

Задержку транзактов выполняет оператор Advance. Задержка должна быть рассчитана исходя из длительности фаз светофора, с учётом средней скорости транспорта. Этот оператор моделирует задержку транспорта на светофоре.

Для моделирования светофора с адаптивным управлением использовался встроенный в GPSS язык программирования PLUS и используемая в нём технология экспериментов. Эксперимент (Experiment) является процедурой с параметрами, которые пользователь может задать сам при запуске команды CONDUCT в качестве параметров. Является точкой входа в программную часть модели. Как правило, в эксперименте вызывается процедура, которая запускает модель командой DoCommand(), в ней в качестве параметра могут указываться строки-операторы GPSS, которые необходимо выполнить в глобальном контексте. Конкретная строка для запуска моделирования:

```
DoCommand("START 2,NP");
```

В программе для запуска модели используется процедура GoModel(), в неё передаются параметры задержек, которые выставляются в теле процедуры. В теле эксперимента Starting() в соответствии с выбранным направлением зелёного цвета, задаются задержки транзактов для модели, и запускается процедура GoModel().

В эксперимент Starting(iterations) передаётся параметр длительности моделирования. В языке PLUS есть полный набор необходимых конструкций для программирования.

В результате моделирования было установлено, что адаптивное управление перекрёстком сокращает длину очередей в три-четыре раза в сравнении с жёстким управлением. Следовательно, возможно устранение пробок на проблемных перекрёстках в г. Бресте.

Литература

1. Кременец Ю.А., Печёрский М.П. Технические средства регулирования дорожного движения – М: Транспорт, 1981.
2. А. Тернер, Вероятность, статистика и исследование операций. - М: Статистика, 1976.

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АВТОТРАНСПОРТОМ НА РЕГУЛИРУЕМОМ ПЕРЕКРЁСТКЕ

Анфилец С.В., Шуть М.В.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Анализ условий движения на любом перекрестке показывает, что интенсивности транспортных потоков на подходах не постоянны, а подвержены изменениям в течение суток с ярко выраженными пиковыми периодами (одним или двумя). Кроме того, даже при постоянной интенсивности движение автомобилей носит случайный характер, имеются колебания в числе автомобилей, подходящих к перекрестку за одинаковые периоды времени.

При медленном изменении интенсивностей движения оптимальные длительности цикла и фаз, рассчитанные для условий пикового периода, для остального времени суток оказываются неоптимальными, как правило, слишком большими, приводящими к неоправданным задержкам транспорта.

Жесткое программное регулирование не способно учитывать кратковременные случайные колебания в числе автомобилей, подходящих к перекрестку [1].

Таким образом, задача улучшения автоматического управления движением на перекрестке состоит в создании таких технических средств и алгоритмов управления, которые обеспечили бы адаптацию режимов регулирования к изменению условий движения.

Задача адаптивного управления на отдельном перекрестке состоит в постоянном нахождении оптимальных для данных средних значений интенсивностей движения длительностей цикла и фаз регулирования, а также в корректировке этих длительностей в соответствии с мгновенными колебаниями в количестве автомобилей, подходящих к перекрестку.

Наибольшее распространение среди известных эвристических алгоритмов адаптивного регулирования получил так называемый «метод поиска разрывов в транспортных потоках» [1]. Для его реализации необходима информация о проезде автомобилями определенного сечения дороги на подходах к перекрестку.

Разрывом в транспортном потоке будем называть появление интервала времени определенной длительности между моментом проезда одним из автомобилей сечения дороги и моментом проезда этого же сечения следующим за ним (по времени) автомобилем. Информация о моментах появления автомобилей в заданном сечении дороги получается с помощью детекторов транспорта, располагаемых на подходах к перекрестку на заданном расстоянии от стоп-линий.

Рассмотрим сущность метода поиска разрывов на примере Пересечения двух однополосных дорог с односторонним движением рисунок 1.

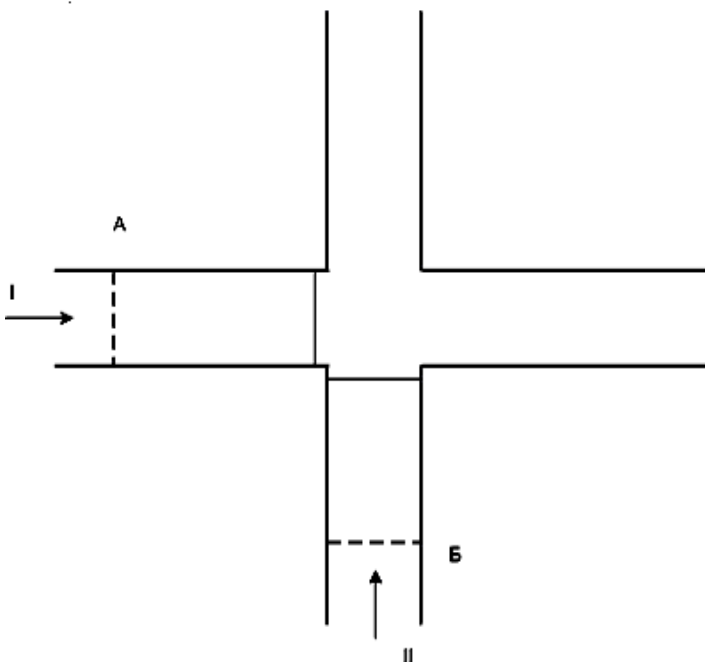


Рис. 1. Схема перекрёстка

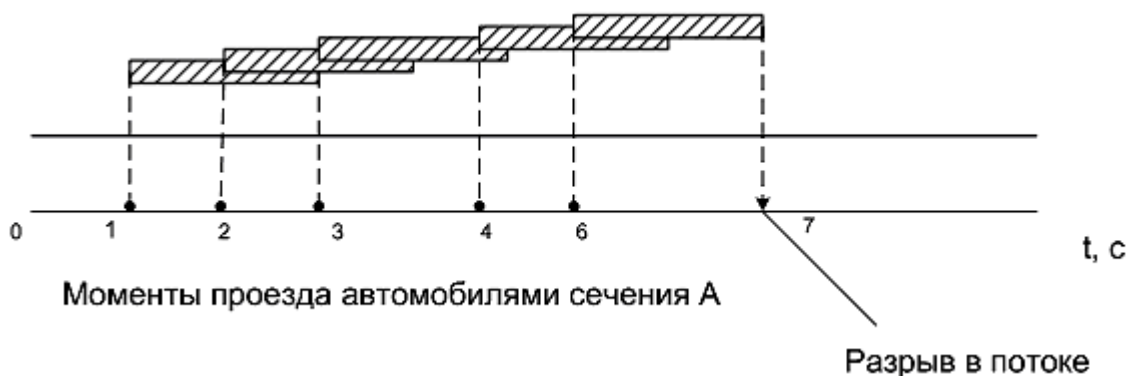


Рис. 2. Принцип поиска разрывов в транспортном потоке

Предположим, что в определенный момент времени на направлении I включен зеленый сигнал светофора. Пусть каждый автомобиль, подъезжающий к перекрестку, в момент пересечения детектора транспорта (линия А), продлевает себе длительность основного такта на интервал времени $t_{эк}$ (экипажный интервал), равный среднему времени проезда автомобиля от сечения А до стоп-линий. Если над линией А в момент окончания очередного интервала $t_{эк}$ не появится следующий автомобиль, то можно принять, что произошел разрыв в потоке, не меньший по длительности, чем $t_{эк}$. В этот момент можно оканчивать основной такт. Таким образом, сущность метода поиска разрывов (см. рисунок 2) заключается в определении момента времени, когда между стоп-линией и сечением А нет ни одного автомобиля, что позволяет прервать основной такт регулирования в этом направлении движения.

Очевидно, что если не внести каких-либо ограничений, то основной такт мог бы быть выключен сразу после включения при полном отсутствии автомобилей на подходе к перекрестку в этом направлении.

Это недопустимо с точки зрения безопасности движения, поскольку трогание первых автомобилей в очереди и их внезапная остановка могут привести к столкновениям. Поэтому вводится ограничение — длительность основного такта не может быть меньше определенной величины — t_{min} (минимальная длительность основного такта).

Если автомобили непрерывно пересекают линию А с интервалами, меньшими $t_{эк}$, то для пропуска конфликтующего направления через перекресток необходимо ограничить длительность основного такта также и какой-то максимальной величиной — t_{max} , производя смену такта по истечении этого временного интервала.

При многорядном и двустороннем движении принятый принцип регулирования не изменится, если отсчитывать интервалы между любыми двумя автомобилями, пересекающими выбранные сечения дороги в разрешенных направлениях движения данного такта.

Рассмотренный принцип может быть распространен не только на один основной такт, но на любое их количество. Для этого соответствующие направления движения должны быть оборудованы детекторами транспорта.

Таким образом, длительность основных тактов и цикла регулирования может меняться в зависимости от условий движения, что является основным признаком адаптивного управления. Длительность любого основного такта t_{oi} лежит в пределах: $t_{min} \leq t_{oi} \leq t_{max}$.

Величина минимальной длительности основного такта, т. е. t_{min} выбирается исходя из двух соображений. Во-первых, это время, необходимое для разъезда с перекрестка автомобилей, ожидавших разрешающего сигнала и находившихся между стоп-линией и детектором транспорта. Во-вторых, это время, необходимое для перехода пешеходами проезжей части (минимум до осевой линии). В качестве действующего значения величины данного такта выбирается большее из просчитанных значений. Обычно пределы изменения t_{min} составляют $7 \div 12$ секунд.

Величина t_{\max} , или максимальная длительность основного такта, выбирается исходя из знания оптимальных длительностей основных тактов, рассчитанных для случая жесткого программного управления в условиях «пиковых» периодов.

Как уже упоминалось, величина экипажного интервала выбирается исходя из скорости движения автомобилей в зоне перекрёстка. Обычно скорость определяется натуральными наблюдениями. Затем принимается, что автомобиль с момента пересечения детектора транспорта движется до стоп-линии с постоянной скоростью, равной измеренной скорости потока. Тогда экипажный интервал равен:

$$t_{\text{ЭК}} = \frac{s_i}{v_i}, \quad (1)$$

где i – номер основного такта; s_i – максимальное расстояние от контрольного сечения до стоп-линии в данном основном такте (при наличии нескольких направлений движения); v_i – максимальная средняя скорость движения среди всех направлений движения данного основного такта.

Обычно $t_{\text{ЭК}}$ выбирается равным 4-5 с.

При использовании более сложных модификаций алгоритма поиска разрывов в транспортных потоках длительности основных тактов изменяются не только в функции от разрывов в транспортных потоках, но и по более сложным зависимостям, требующим запоминания и использования информации об интенсивности движения, длине очереди и времени задержки автомобилей. Применяются, например, следующие алгоритмы.

1. Минимальная длительность фазы t_{\min} изменяется в соответствии с выражением $t_{\min} = f(n_k)$ причем n_k — длина очереди на направлении, где включается зеленый сигнал в момент выключения красного сигнала. Каждый автомобиль в очереди сверх первых 10 секунд добавляет 1 секунду к величине t_{\min} .

2. Величина экипажного интервала может быть уменьшена в зависимости от длительности задержки автомобилей на конфликтующем направлении.

3. Величина экипажного интервала может быть уменьшена в зависимости от числа автомобилей, ожидающих на конфликтующем направлении.

4. Величина экипажного интервала уменьшается в зависимости от плотности потока в разрешенном направлении, измеряемой в функции от числа проездов автомобилями заданного сечения дороги за каждые 10 с основного такта.

5. Обеспечение «псевдокоординированного» управления. Появление группы автомобилей в период красного сигнала светофора, определяемое в функции от числа проездов заданного сечения дороги за каждые 10 с, уменьшает время ожидания в зависимости от размеров группы. Кроме того, в «память» алгоритма вводится «ложное» количество автомобилей, ожидающих разрешающего сигнала на основном направлении, что приводит к сокращению времени ожидания.

6. Максимальная длительность фазы определяется выражением $t_{\max} = f(n_i)$, где n_i — длина очереди в направлении, конфликтующем с направлением i .

Указанные функциональные зависимости подбираются эмпирически. Первый — это алгоритм выравнивания степени насыщения фаз регулирования.

Степень насыщения фаз регулирования определена как:

$$x_i = \frac{N_i T_u}{M_{\text{нл}} t_{\text{ЭФ}i}} \quad (2)$$

Сущность алгоритма заключается в таком изменении длительности фаз внутри заданной величины длительности цикла, при которой величины x_i всех фаз становятся приблизительно одинаковыми.

Литература

1. Кременец Ю.А., Печёрский М.П. Технические средства регулирования дорожного движения – М: «Транспорт», 1981.

ВЫКАРЫСТАННЕ КАНЕЧНЫХ АЎТАМАТАЎ ПРЫ РАСПРАЦОЎЦЫ ПРАГРАМНЫХ СРОДКАЎ

Базарэўскі В.Э., Сцепанчук Н.У.

Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт інфарматыкі і радыёэлектронікі, г. Мінск

Пры праектаванні складаных праграмных сістэм, якія рэалізуюць вялікую колькасць функцый, мэтазгодна арганізаваць часткі такіх сістэм па модульным прынцыпе. Такім чынам дасягаецца гнуткасць наладкі ўсёй сістэмы за кошт аператыўнай замены модуляў, а таксама паскарэнне распрацоўкі іншых праграмных комплексаў той жа прадметнай галіны, таму што незалежна сканструяваныя модулі можна выкарыстаць паўторна. Для развязання дадзенай задачы падыходзіць выяўленне сістэмы ў выглядзе канечнага аўтамата.

У рабоце праграмных сістэм, арыентаваных на апрацоўку сігналаў, можна вылучыць некалькі станаў: пачатковая наладка рэжымаў работы сістэмы, прыём дадзеных, даследаванне знятага сігналу, прагляд статыстыкі.

Працу такой праграмы можна апісаць наступнымі станамі і пераходамі з аднаго стану ў іншы.

Стан пачатковай наладкі: зыходны стан, у якім даступныя працэдурны наладкі рэжымаў работы сістэмы.

Магчымыя пераходы: выхад на прыём дадзеных, прагляд статыстыкі.

Стан прыёму сігналу: прыём сігналу па двух каналах, адлюстраванне прынятага сігналу, запіс на цвёрды дыск знятага сігналу.

Магчымыя пераходы: зварот да стану пачатковай наладкі, пераход да стану апрацоўкі сігналу.

Стан апрацоўкі сігналу: фільтрацыя, адлюстраванне і прагляд сігналу.

Магчымыя пераходы: пераход да стану пачатковай наладкі, пераход да прагляду статыстыкі.

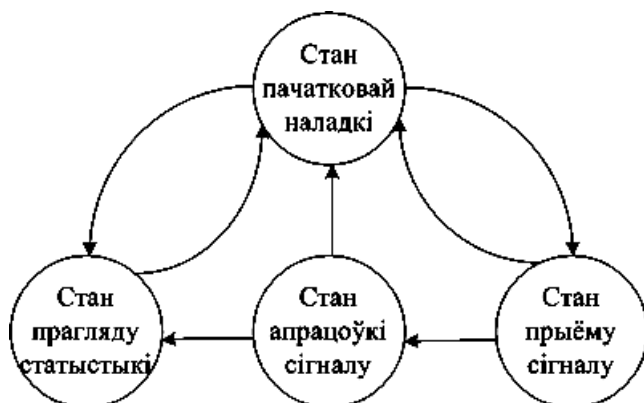
Стан прагляду статыстыкі: прагляд статыстыкі, пошук па зададзеных крытэрыях, генерацыя справаздач па выбарцы дадзеных.

Магчымыя пераходы: пераход да стану пачатковай наладкі.

Такім чынам, праграмную сістэму можна прадставіць у выглядзе канечнага аўтамата з дапамогай графа станаў і пераходаў, як на рысунку 1.

Канечныя аўтаматы могуць быць эфектыўна рэалізаваныя сродкамі аб'ектна-арыентаванага праграмавання. Прапануваецца выкарыстаць патэрн State Machine. Іерархія класаў, якая рэалізуе канечны аўтамат дадзенага праграмнага сродку, паказана на рысунку 2.

Перавагай выкарыстання патэрна State Machine для рэалізацыі канечных аўтаматаў у параўнанні з больш распаўсюджаным патэрнам State, з'яўляецца меншая звязанасць сістэмы. Такім чынам, асобныя класы-станы могуць паўторна выкарыстоўвацца ў іншых сістэмах.



Рысунк 1. Граф сістэмы

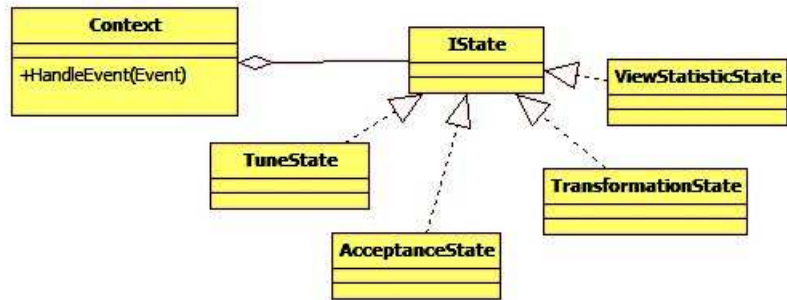


Рисунок 2. Иерархия класса

Гэта магчыма таму, што асобныя часткі сістэм дадзенай прадметнай галіны лагічна ўзаемазамежныя, а значыць, пабудова аўтаномных слаба звязаных кампанентаў з'яўляецца адной з галоўных задач, бо гэта паскарае стварэнне новых праграмных сродкаў. Пры гэтым іх распрацоўка будзе зводзіцца да нязначнай наладкі ўзаемадзеяння асобных кампанентаў.

Дадзены спосаб праектавання выкарыстоўваўся пры распрацоўцы сістэмы ўліку статыстыкі і ступені трэніраванасці навучэнцаў спартовай школы. Асновай гэтай сістэмы з'яўляецца апаратна-праграмны комплекс, які складаецца са спартовага снарада, да якога прымацаваныя два датчыкі, аналага-лічбавага ператваральніка, персанальнага кампутара і праграмнага забеспячэння, што рэалізуе функцыі апрацоўкі, адлюстравання сігнала, уліку статыстыкі. За кошт выкарыстання канечных аўтаматаў дасягнутая гнуткасць наладкі і далучэння праграмных модуляў, што дазволіць выкарыстаць часткі распрацаванай сістэмы ў іншых сістэмах падобнага тыпу.

Літаратура

1. Н. Н. Шамгунов, Г. А. Корнеев, А. А. Шалыто. "State Machine — новый паттерн объектно-ориентированного проектирования".
2. Э.Гамма, Р.Хелм, Р.Джонсон, Д.Влиссидес. "Приемы объектно-ориентированного проектирования". СПб: Питер, 2006. — 366 с.

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНИ ВИНОВНОСТИ ИСТОЧНИКОВ ЗАГРЯЗНЕНИЯ АТМОСФЕРЫ

Бракович А. И.

Белорусский государственный технологический университет, г. Минск

Для нахождения степени виновности того или иного предприятия в загрязнении атмосферного воздуха различными веществами мы будем пользоваться методиками, предложенными в [1].

Допустим, что на территории города за счет функционирования промышленных предприятий может возникнуть n кластеров (доменов, зон) $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ с различной степенью загрязнения, характеризующихся векторами концентраций, создаваемыми I_1, I_2, \dots, I_n источниками загрязнения. $P(\omega_i | x)$ - условная вероятность того, что наблюдаемый вектор x относится к домену ω_i . В силу теоремы Байеса получим:

$$P(\omega_i | x) = \frac{P(\omega_i) \cdot P(x | \omega_i)}{P(x)}, \quad (1)$$

где $P(x)$ - вероятность фактического наблюдения вектора x с данными значениями концентраций загрязняющих веществ; $P(\omega_i)$ – априорная вероятность того, что виновник загрязнения – домен ω_i ; $P(x | \omega_i)$ – вероятность того, что домен ω_i мог привести к появлению вектора концентраций x ; ω - идентификатор домена.

На основании формулы можно определять степень виновности источников загрязнения. Для этого требуется рассчитывать априорную вероятность того, что виновник загрязнения – домен ω_i и вероятность того, что домен ω_i мог привести к появлению вектора концентраций x .

К сожалению, для расчета этой вероятности использовать объективную вероятность нельзя, так как нет предварительных статистических данных и вероятность превращается в субъективную оценку. Имеются систематические, реальные и трудно устранимые расхождения между объективной и субъективной вероятностью. Во многих задачах решающие их люди не поступают согласно положениям аксиоматической теории вероятности. Прогнозируя, люди не столько используют положения теории вероятности, сколько применяют эвристические принципы и правила. Эти принципы очерчены менее четко, чем модель теории вероятности, и их применение не всегда приводит к удачным оценкам вероятности. Однако они имеют одно достоинство – они просты и не требуют больших интеллектуальных усилий [2].

Обоснуем возможность применения функции желательности при нахождении вероятности того, что виновником загрязнения является рассматриваемый источник.

Во всякой точке (x_1, x_2, \dots, x_n) пространства последствий мы не можем непосредственно сравнивать величины x_i и x_j при $i \neq j$, ибо в большинстве случаев это было бы просто бессмысленно, поскольку критерии x_i и x_j могут измеряться в совершенно разных единицах. Грубо говоря, задача лица, принимающего решение, состоит в таком выборе a из A , чтобы получить в наибольшей мере устраивающий его «результат» $X_i(a)$, ..., $X_j(a)$. Поэтому нам нужна такая функция оценки, которая сводила бы совокупность $X_i(a)$, ..., $X_j(a)$ в скалярный показатель предпочтительности или «ценности». В другой формулировке это равносильно заданию скалярной функции v , определенной в пространстве последствий и обладающей свойством:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq v(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) \geq (x'_1, x'_2, \dots, x'_n), \quad (2)$$

где символ $>$ означает «не менее предпочтителен, чем». Мы будем называть функцию v функцией ценности. Эта функция в литературе носит много других названий – порядковая функция полезности, функция предпочтения, функция оценки, функция полезности либо функция желательности.

Критерии X_1, \dots, X_n взаимонезависимы по предпочтению, если каждое подмножество Y этого множества критериев не зависит по предпочтению от своего дополнения. Кроме того, взаимная независимость по предпочтению влечет за собой существование аддитивной функции желательности.

Теорема. Для критериев X_1, \dots, X_n , $n=3$, аддитивная функция желательности имеет вид:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n v_i(x_i), \quad (3)$$

где v_i – функция желательности по критерию X_i существует тогда и только тогда, когда критерии взаимонезависимы по предпочтению.

Вместо того чтобы использовать аддитивные функции желательности в самой общей форме (3), зачастую может оказаться удобнее изменить масштаб v и каждой функции желательности отдельных критериев так, чтобы они изменялись от нуля до единицы. В этом случае мы будем иметь аддитивную функцию вида:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i(x_i), \quad (4)$$

где v и v_i , $i = 1, 2, \dots, n$ меняются от нуля до единицы и $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i > 0$. Оба равенства (3) и (4) определяют эквивалентные аддитивные функции ценности, различающиеся

лишь выбранными масштабами измерений [3]. Функцию желательности зачастую используют как геометрическое среднее частных функций желательности. В этом случае формула для расчета обобщенного критерия желательности принимает вид:

$$D = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n d_i} = \sqrt[n]{d_1 \cdot d_2 \dots d_n} \quad (5)$$

Формулу (5) можно преобразовать, добавив еще коэффициенты значимости для каждой частной функции желательности. При этом итоговая формула преобразуется в (6):

$$D_i = \left(\prod_{j=1}^p d_{ij}^{\delta_j} \right)^{1/\sum_{j=1}^p \delta_j}, \quad (6)$$

где p - количество обобщаемых показателей; d_{ij} - частные функции желательности i -го образца по j -му показателю; δ_j - статистический вес (важность) j -го показателя ($0 \leq \delta_j \leq 1$).

В работе [1] была предложена формула (1) для определения условной вероятности виновности источника загрязнения атмосферы. Однако не было указано, что для нахождения вероятности того, что виновником загрязнения является рассматриваемый источник, использовать объективную вероятность нельзя, так как нет предварительных статистических данных и вероятность превращается в субъективную оценку. В данной статье дано обоснование метода условной вероятности виновности источника загрязнения на основе теории выбора многокритериальных решений с использованием функции желательности. Показано, что взаимная независимость критериев по предпочтению влечет за собой существование аддитивной функции ценности, имеющей вид (3). Предложено использовать функцию желательности вида (6) для нахождения субъективной вероятности того, что виновником загрязнения является рассматриваемый источник.

Литература

1. Колесников В.Л., Урбанович П.П., Жарский И.М. Компьютерные модели в промышленной экологии: Учебное пособие для вузов. – Мн.: БГТУ, 2003.– 248 с.
2. Козелецкий Ю. Психологическая теория решений.- М.: Прогресс, 1979. - 504 с.
3. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: Предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с. 4.

ОРГАНИЗАЦИЯ ВИБРАЦИОННОГО КОНТРОЛЬНО-ДИАГНОСТИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА

Бранцевич П.Ю., Борисюк В.Ю., Шакер Ш.А.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск

Одним из основных условий обеспечения экономической эффективности производства является оптимизация энерго- и ресурсопотребления, что во многом обеспечивается минимизацией затрат, направляемых на обслуживание и ремонт основного и вспомогательного оборудования, предотвращение аварийных ситуаций. Для достижения этой цели требуется внедрение и активное использование систем контроля и диагностики.

Функционирование механизмов и оборудования с вращательным движением, которые в больших количествах задействованы в технологических процессах предприятий энергетики, нефтехимии, машиностроения, сопровождается механическими колебаниями (вибрациями) их корпусов, опор, отдельных деталей и составных частей. Анализ этих вибраций позволяет получить важную информацию о текущем и прогнозируемом техническом состоянии механизма, выявить зарождающиеся дефекты за значительное время до того момента, когда ремонт становится неизбежным.

Эти задачи для крупных объектов, например турбоагрегатов, решаются путем применения многоканальных измерительно-вычислительных комплексов (ИВК), построенных на базе универсальных вычислительных машин с типизированными модулями аналого-цифрового ввода, объединенных в многоуровневые сети. Такой подход позволяет обеспечить изменение и расширение функциональных возможностей комплекса на неизменной аппаратной части за счет модификации программного обеспечения.

ИВК, как звенья низшего уровня сетевой иерархии, выполняют функции непрерывного виброконтроля, сигнализации и защиты по стандартизованным параметрам. Они работают в режиме реального времени и их предназначением является постоянное предоставление оперативному эксплуатационному персоналу объективной информации о параметрах вибрации в контролируемых точках, сохранение вычисленных результатов в файлах на жестком диске, сбор разнообразных виброметрических данных, выдача простых протоколов по результатам измерений.

Основные вычислительные алгоритмы комплекса - дискретное и быстрое преобразование Фурье, определение амплитудно-фазовых параметров вибрации, удаление низкочастотных дрейфов, цифровая фильтрация, расчет параметров динамической модели валопровода, реализация алгоритмов сигнализации и защиты. Важен также выбор формы представления результатов на экране дисплея.

Вычислительные машины на этом уровне функционируют при минимальном вмешательстве оператора и поэтому программные средства должны обеспечивать возможность автоматического восстановления работоспособности комплекса при кратковременных пропадающих питающего напряжения и случайных выключениях.

Главным информационным результатом функционирования ИВК являются файлы данных, представляющие изменения во времени вычисленных параметров вибрации, и файлы временных реализаций исходных вибросигналов. Эти файлы создаются со свойством общего доступа, а записанные в них данные могут параллельно перезаписываться и обрабатываться вычислительными машинами автоматизированных рабочих мест (АРМ) второго уровня сетевой иерархии, подразделяемых по назначению.

АРМ по вибрации оперативного персонала обеспечивает удобный пользовательский интерфейс, реализует относительно простые алгоритмы вторичной обработки виброметрических данных, позволяет их представить в разнообразных формах (графики, шкальные индикаторы, траектории движения векторов и т.п.), наглядно отобразить предысторию развития вибрационных процессов. Особое место отводится построению характеристик пуска или выбега и определению информативных параметров этих характеристик. Основным назначением таких АРМ является облегчение принятия решений по управлению техническим объектом и сокращению времени на их принятие.

АРМ вторичной обработки и протоколирования предоставляет широкие возможности по дополнительной обработке данных, полученных ИВК, содержит несколько программных подсистем и, при необходимости, может быть реализован на нескольких вычислительных машинах.

Подсистема обработки файлов параметров вибраций выполняет функции:

- сглаживания, усреднения и сжатия обрабатываемых данных;
- представления результатов в виде разнообразных графиков;
- выделения отдельных участков исходных файлов и их перезапись в другие файлы;
- вычисления статистических оценок;
- определения зон постоянства, роста и спада;
- вычисления значений информативно-значимых признаков (ИЗП) для систем оценки технического состояния и диагностики;
- преобразования исходного представления данных в другие форматы для обработки универсальными и специализированными программными средствами;
- расчета параметров и графической реализации динамической модели валопровода.

Подсистема обработки характеристик пуска-выбега позволяет выделять участки переходных характеристик, осуществляет их аппроксимацию, преобразование единиц измерений, представление в виде графиков, сохранение рассчитанных характеристик в файлах специального формата для дальнейшей обработки, вычисление ИЗП, сравнительный анализ характеристик, полученных в разное время.

Подсистема обработки временных реализаций вибросигналов предоставляет широкий спектр возможностей по их преобразованию и исследованию. Интегрирование однократное и двойное позволяет перейти от единиц виброускорения к единицам вибро скорости и виброперемещения. Реализованы разнообразные виды цифровой обработки сигналов: низкочастотная, высокочастотная и полосовая цифровая фильтрация (рекурсивная и методом частотного окна), спектральный и полосовой частотный анализ, кепстральный анализ, выделение огибающей сигнала и определение её спектра, сглаживание сигнала с использованием разностей, удаление низкочастотных дрейфов, вычисление пик-фактора, построение разностных спектров, вейвлет-анализ. Для более полного исследования вибросигналов, полученных на механизмах с вращательным движением, имеется возможность определить точное значение амплитуды спектральной составляющей, частота которой не кратна частотному разрешению спектрального анализа, и выполнить порядковый частотный анализ. Также реализована статистическая обработка. Все результаты представляются в графическом и численном виде. По указанию оператора выбираются параметры, значения которых записываются в специальные файлы и используются в дальнейшем в качестве ИЗП в системе диагностирования.

АРМ оценки технического состояния и диагностирования является элементом следующего уровня иерархии. Исходные данные для его функционирования получаются на более низких уровнях. Адаптация данной системы производится под конкретный технический объект на протяжении определенного времени эксплуатации. За этот период формулируется множество дефектов, требующих обнаружения; определяется множество ИЗП, характеризующих техническое состояние объекта; устанавливаются базовые значения ИЗП; для каждого типа дефекта устанавливается подмножество ИЗП, по изменению значений которых можно идентифицировать проявление дефекта; формулируются решающие функции для обнаружения дефектов; определяется множество рекомендаций по устранению выявленных дефектов; создается подсистема выбора набора этих рекомендаций для конкретно возникающих ситуаций. В дальнейшем система диагностирования функционирует по разработанным правилам и продолжается ее совершенствование. При достаточном уровне развития ее функционирование может быть организовано в режиме реального времени, а информация непосредственно выдаваться оперативному персоналу.

Данный комплекс реализован в различных конфигурациях и эксплуатируется на ряде предприятий Беларуси.

О НОВОМ ВАРИАНТЕ СИСТЕМЫ ТЕСТИРОВАНИЯ — ЧТО И КАК

Ванюков С. В., Теут А. А.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Своя собственная система тестирования знаний учащихся есть сейчас практически в любой школе, колледже, вузе. Большинство из них написаны учениками и преподавателями, поэтому их файловые форматы, возможности и даже принципы взаимодействия весьма различаются. Большинство из них разработаны для строго определённого типа тестов.

Начиная разработку системы тестирования ТЕНМА, нам была поставлена задача создать, по возможности, универсальный инструмент, который можно будет легко расширить и приспособить для любой системы тестирования. В качестве инструмента раз-

работки был выбран язык C# на платформе Visual Studio .NET 2.0. Предоставляемые ею средства для сетевого программирования, построения классов и шифрования передаваемых данных оказались подходящими для решения поставленной перед нами задачи.

Основное внимание при проектировании мы собираемся уделить открытости системы и простоте её обновления.

Версия 1.0, которая находится сейчас в разработке, позволит проводить тестирование в режиме «вопрос-ответ» для различных типов тестов. В частности, она должна позволить:

- строить древовидно организованные структуры связей, благодаря которым разработчик тестов сможет моделировать динамически организованный диалог «опрашивающий-опрашиваемый»; и

- обеспечить поддержку импорта тестов формата TQF, который применяется в настоящее время в системе теоретического тестирования на математическом факультете БрГУ.

- в дальнейшем обеспечить тестирование практических задач. Мы полагаем, что такая возможность будет реализована в следующих версиях данной системы. Принцип же работы системы мы планируем оставить таким же, как и у тестирования теоретического.

Пакет состоит из двух частей — клиентской и серверной. Клиентская часть устанавливается на все компьютеры, за которыми производят тестирование. Серверная часть устанавливается только на один, с которого и осуществляется администрирование. Пакет содержит следующие программы:

1. Клиентская часть

- TENMAN Client — клиентская часть, на которой и осуществляется тестирование.

2. Серверная часть

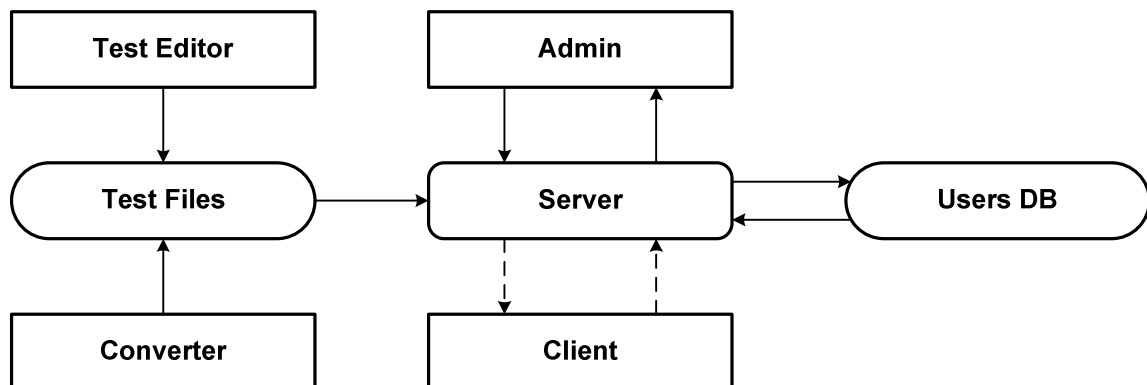
- TENMAN Server — сервер тестирования, оформленный в виде службы Windows. Отвечает за обмен данными и сохранение результатов. Для доступа к настройкам и информации сервера используется TENMAN Admin;

- TENMAN Admin — оболочка для доступа к серверу. В текущей версии доступна только с того же компьютера, на котором запущен сервер;

- TENMAN Converter — небольшая утилита для преобразования из TQF в TNM — формат тестов TENMAN;

- TENMAN Test Editor — программа для создания и редактирования тестов.

Для работы тестирующего комплекса потребуется работающая сеть, ОС Windows не ниже 98, установленный .NET Framework 2.0 (он включен в дистрибутив и устанавливается автоматически) и пакет Microsoft Office 97 или выше (для доступа к базам данных). Никаких специализированных программ (локальные сервера, СУБД) не требуется. Более того, нет даже жёстких требований к головной машине сети — сервером может стать любая машина, подключённая к сети. Структура взаимодействия компонентов программы будет выглядеть следующим образом:



Непрерывными линиями обозначены взаимодействия на локальном компьютере, прерывистыми — сетевые.

Всё управление сервером осуществляется через оболочку TENMAN Admin. Данные о группах и тестируемых загружаются из базы Users DB. Данные самих тестов берутся из файлов Test Files.

Соединение с клиентом осуществляется посредством технологии .Net Remoting. Клиенту отправляется только форма вопросов, оформленная в виде блока HTML кода, все сопутствующие изображения также передаются вместе с ним. Ответ клиента посылается обратно на сервер и уже там обрабатывается. Результаты сохраняются в Users DB.

Формат теста TNM основан на языке XML и позволяет создавать весьма сложные тесты с различными типами ответа на один и тот же вопрос, ветвлениями вопросов и ступенчатыми ответами. Кроме того, архитектура XML, включающая в себя средства XLST, позволяет легко и удобно обновлять старые версии.

Достаточно ли всего этого, чтобы система тестирования была полноценной и универсальной? Для этого попытаемся определить основные требования, которые обычно предъявляются к программе, тестирующей теоретические знания или навыки программирования? Мы будем рассматривать только аналогичные TENMAN системы простого сетевого тестирования — когда имеется несколько компьютеров, объединенных между собой в сеть, на которых различные пользователи запускают клиентские части программы и проходят на них тестирование, данные о результатах которого можно впоследствии сохранить в некоторой общей базе данных. С точки зрения программирования, такими требованиями будут:

1. **Удобство администрирования.** Серверная часть должна представлять администратору все необходимые возможности для отслеживания процесса тестирования, но при этом (желательно) работать и без его участия. В TENMAN это реализовано посредством разделения серверной и администрирующей частей.

2. **Совместимость.** Программа должна поддерживать уже существующие форматы тестов или поставляться с конвертером. Крайне желательно, чтобы отчёт о результатах тестов был представлялся в известном и удобном формате. Как уже было упомянуто, в программу включены возможности для поддержки из существующих форматов. В будущем их можно легко расширить, добавив распознавание и других популярных форматов.

3. **Полнота.** Всё необходимое для работы программы должно быть включено в её дистрибутив, чтобы не создавать проблем с инсталляцией. Все необходимые библиотеки .NET Framework включаются в дистрибутив и инсталлируются автоматически. Серверная часть программы является полноценным локальным сервером, и сама осуществляет все необходимые операции.

4. **Универсальность.** Программа должна поддерживать различные типы вопросов и ответов. Например, вопрос может содержать картинки и текстовое форматирование, ответ может быть только одним из предложенных, набором из нескольких предложенных вариантов или вводиться с клавиатуры. Однако помимо обычного теста по принципу «вопрос-ответ» возможны и другие виды тестов — например, на написание программы, которая, получая из командной строки входные данные, выводит на экран результат вычислений. Получив эти результаты, мы можем сравнивать их с эталонными и определить, насколько точно решена задача. Действующий формат тестов TNM обеспечивает самые широкие возможности в плане построения вопросов. В будущем будет добавлен и модуль для практического тестирования, работающий по тому же принципу.

5. **Лёгкость апробирования.** Особенностью любой сетевой системы тестирования является то, что с ней одновременно работает несколько человек. Произвести её испытания в условиях, близких к «рабочим», весьма непросто — не у всякого разработчика найдётся под рукой необходимое количество компьютеров. Даже представляя готовый продукт заказчику, нам при обычной схеме требуется как минимум два компьютера. Именно поэтому крайне желательна независимость программы от внутреннего устройст-

ва сети. В идеальном случае и сервер, и клиент (а, возможно, даже несколько клиентов) должны запускаться на одном и том же компьютере и взаимодействовать точно так же, как если бы они были запущены на различных. Благодаря технологии .NET Remoting, клиент и сервер можно запускать в том числе и на одном и том же компьютере.

6. **Защита данных.** И клиентская, и серверная часть должны быть устойчивы к различного рода атакам. Клиентская часть требует защиты в первую очередь для внутренних данных, серверная — от атак прямым перебором паролей и «отказ в обслуживании» (DDOS атаки). Даже без применения криптографии сама структура программы делает невозможным большинство методов взлома. Узнать правильный ответ, работая с клиентом, невозможно в принципе: сравнение и анализ ответов производится только на сервере. Перехват трафика и попытка «обмануть» сервер поддельными пакетами возможны только в том случае, если известна структура запроса, то есть, фактически, если на руках у злоумышленника будут полные исходники клиентской и серверной части.

7. **Мобильность.** Сеть любого университета или даже школы — сложная и хорошо отлаженная система. Программа должна быть проста в установке, настройке и апробировании. Кроме того, она не должна требовать существенного изменения текущих настроек сети. В нашем случае мобильность реализована за счёт использования технологии .NET Remoting, которая целиком абстрагирует разработчика от специфики данной сети.

8. **Высокая отказоустойчивость.** Программа должна чётко и грамотно реагировать на сбои в работе сети, потерю пакетов, внезапный разрыв связи, уметь взаимодействовать с различными системами защиты (антивирусами, файрволлами, системами защиты на самих узлах связи). В случае ошибки и администратор, и пользователи должны чётко знать, что произошло и как устранить возникшую проблему. Благодаря системе исключений C# и отказу от технологии сетевого программирования через сокеты, система тестирования будет весьма устойчива. Так, в случае обрыва связи она может просто дожидаться, когда связь восстановится и дать пользователю возможность продолжить тестирование.

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПРЕЦЕДЕНТОВ В СИСТЕМАХ ДИАГНОСТИКИ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ МЕХАНИЗМОВ С ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

Гончарова С. А.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск

В настоящее время системы поддержки принятия решений (СППР) используются во многих сферах жизнедеятельности человека: в медицине для постановки диагноза, в промышленности для диагностирования технического состояния оборудования, в экономике для принятия управленческих решений и даже в философии для построения высказываний. Одним из способов организации системы поддержки принятия решений является построение системы на основе прецедентов.

Вывод на основе прецедентов — это метод, основанный на использовании знаний о ситуациях и случаях из предыдущего опыта (прецедентов). Прецедент в СППР представляет собой описание случая в виде набора информативно значимых признаков и их значений, совокупность действий, предпринятых в данных условиях (набор рекомендаций), а также возможно сохранение признака ошибочности решения проблемы, для исключения подобных ситуаций в будущем. Как правило, такие методы рассуждений включают в себя четыре основных этапа, образующие так называемый цикл рассуждения на основе прецедентов или CBR-цикл (Case-Based Reasoning) [1]:

- извлечение наиболее соответствующего (подобного) прецедента (или прецедентов) для сложившейся ситуации из библиотеки прецедентов (БП);

- повторное использование извлеченного прецедента для попытки решения текущей проблемы;
- пересмотр и адаптация в случае необходимости полученного решения в соответствии с текущей проблемой;
- сохранение вновь принятого решения как части нового прецедента.

Как правило, последний этап в описанном выше CBR-цикле исключается и выполняется лицом, принимающим решения (ЛПР).

В таких СППР чаще всего используются следующие два способа нахождения прецедентов: метод ближайшего соседа и кластеризация. В основе метода ближайшего соседа лежит измерение степени близости текущего случая и прецедента. Во втором методе база прецедентов подвергается кластеризации в пространстве признаков. При поиске аналогов для текущего случая его точка в этом пространстве сравнивается с расположением полученных кластеров. Близкими считаются прецеденты, принадлежащие кластеру, в который попадает случай.

Рассмотрим возможность применения СППР на основе прецедентов для оценки технического состояния механизмов с вращательным движением на основе вибрационных сигналов пуска-выбега. Существует множество способов оценки технического состояния механизмов по вибрационным параметрам, основанных на использовании различных типов вибрационных характеристик. Одной из важных характеристик является характеристика пуска-выбега, которая снимается во время останова или пуска объекта и показывает зависимость изменения вибрационного параметра от частоты вращения вала.

В случае сложных комплексных объектов таких, как турбины на энергетических предприятиях, может иметь место большое количество возможных неполадок, например: неуравновешенность ротора, дефект соединительной муфты, автоколебания ротора в подшипниках, дефект системы смазки и т.д. В таких случаях применение СППР на основе прецедентов нецелесообразно из-за сложности накопления вибрационных характеристик объектов с различными неполадками. Тем не менее, остается возможность применения СППР данного типа как дополнения к основной СППР, основанной на сравнении текущей характеристики с эталонной. При этом в основной СППР текущая характеристика пуска-выбега сравнивается с эталонной и выдается заключение об их степени близости, и о причинах их расхождений на основе концептуальных и экспертных знаний. Затем текущая характеристика сравнивается с базой прецедентов и выдается заключение - имела ли место подобная ситуация в прошлом или нет.

Приведем структуру отношения для хранения прецедентов в базе данных СППР оценки технического состояния механизмов по вибрационным характеристикам пуска-выбега.

Исходные данные для построения характеристик пуска-выбега накапливаются в результате работы измерительно-вычислительного комплекса «Лукомль-2001» и после предварительной обработки сохраняются в текстовых файлах.

Турбина 1, Подшипник 1, 14. 12. 1999 г.

Групповой просмотр. Направление вертикальное
фаза 2 об

Оборот	Подш. 1	Подш. 2	Подш. 3	Подш. 4	Подш. 5	Подш. 6	Подш. 7	Подш. 8	Подш. 9	Час	Мин	Сек
475.0	225.75	352.11	205.75	189.21	23.44	127.85	154.08	147.56	166.27	7	23	23
500.0	310.10	23.41	272.58	243.50	40.72	162.07	132.37	131.05	139.74	7	22	51
525.0	285.19	21.28	244.35	242.27	55.80	55.92	170.67	154.01	151.84	7	22	21
550.0	274.86	117.67	279.77	274.37	24.09	116.10	211.60	206.97	189.37	7	21	52
575.0	332.17	217.76	304.08	327.40	23.65	137.45	214.31	170.81	186.87	7	21	24

Рисунок 1. Пример файла данных

Каждый файл данных характеризуется такими параметрами, как предприятие, объект и точка получения характеристик пуска-выбега, дата проведения испытаний, направление контроля, тип процесса и самой характеристики.

Файлы представляют собой таблицу данных, в первой колонке которой указывается частота вращения вала, а в остальных - значение соответствующего вибрационного параметра и время (рис. 1) [2].

Структура отношения в СППР для хранения информации о характеристиках имеет следующий вид (рис. 2):

Characteristic	
PK	CharacteristicID
	Enterprise
	Object
	TestDate
	Number
	Process
	Direction
	Type
	FilePath
	FileName

Рисунок 2. Структура отношения *Characteristic*,

где поле *CharacteristicID* – уникальный идентификатор характеристики;

Enterprise – название предприятия, на котором проводились измерения;

Object – объект или механизм исследования;

TestDate – дата сбора данных;

Number – номер опыта;

Process – тип исследуемого процесса (пуск или выбег);

Direction – направление измерения (горизонталь, вертикаль, осевое);

Type – тип снятой характеристики (первая оборотная, вторая оборотная, фаза первой оборотной, фаза второй оборотной);

FilePath – путь размещения файла данных;

FileName – имя файла, содержащего характеристики пуска-выбега.

Для расширения БД для хранения информации о прецедентах необходимо добавить поле для хранения признака характеристики (прецедент или эталонная) и ввести новое отношение для дополнительной информации о прецеденте (рис. 3), где:

Kind – тип характеристики (эталонная или прецедент);

Problem – тип неполадки;

Solution – действия, предпринятые для решения данной проблемы;

Result – результативность решения.

Связь между данными отношениями «один ко многим», т.к. возможна ситуация, когда возникает несколько неполадок, либо есть несколько вариантов решения проблемы.

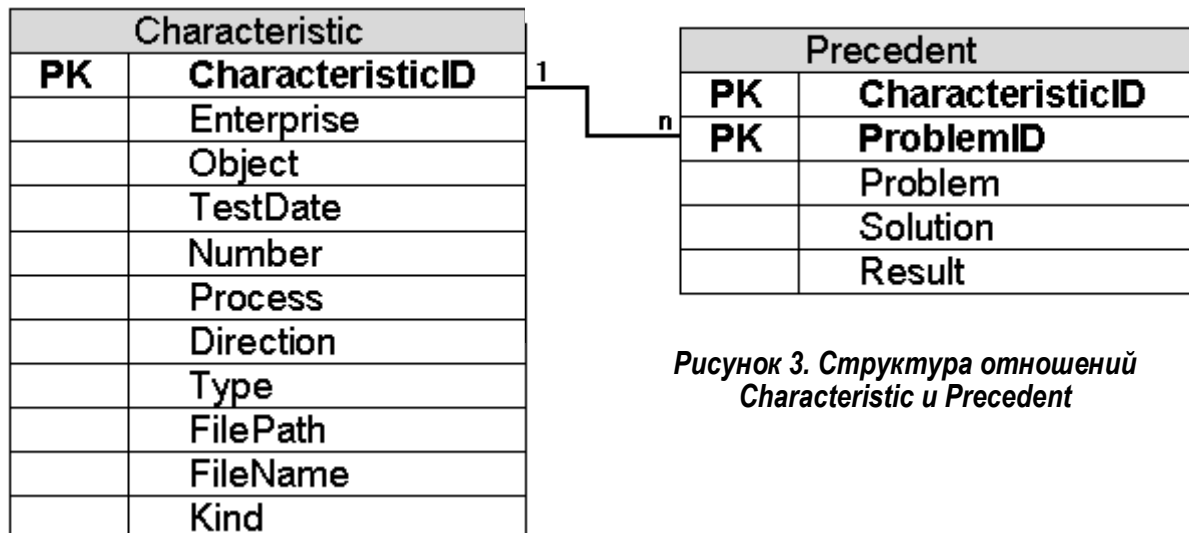


Рисунок 3. Структура отношений *Characteristic* и *Precedent*

Для возможности использования двойной обработки характеристики (сравнения с эталонной характеристикой и с базой прецедентов) необходимо:

- ввести величину максимального отклонения текущей характеристики от эталонной, что является признаком начала процесса сравнения характеристики с базой прецедентов;
- ввести признак максимального отклонения от наиболее близкого прецедента для выдачи заключения о том, что данная ситуация в прошлом не возникала.

Также в данной системе необходимо реализовать возможность изучения новых проблемных ситуаций и занесений их в базу прецедентов.

Реализация дополнительного модуля вывода на основе прецедентов в СППР оценки технического состояния механизмов по вибрационным характеристикам пуска-выбега позволит повысить эффективность работы системы за счет увеличения количества методов анализа характеристики.

Литература

1. Aamodt A., Plaza E. Case-based reasoning: foundational issues, methodological variations, and system approaches // AI Communications. IOS Press. Vol. 7: 1. 1994. – P. 39-59.
2. Бранцевич П.Ю., Гончарова С.А. Программная система обработки и анализа вибрационных характеристик выбега/ «Известия Белорусской инженерной академии» №1(15)/2 – Минск, 2003. - с. 26-28.

РАЗРАБОТКА ПАКЕТА ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ СИНТЕЗА СИСТЕМ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ НА БАЗЕ UML

Жуляк Н. А.

Белорусский государственный технологический университет, г. Минск

Одной из важнейших задач при разработке системы становится уменьшение количества ошибок, вносимых в нее. При этом значительно возрастает роль стадий проекта, предшествующих его непосредственной реализации.

Кризис разработки сложного программного обеспечения, а особенно корпоративных информационных систем (КИС), как правило, выражается в следующих обстоятельствах: проекты не сдаются в срок; существенно перерасходуется бюджет проектов; проекты не удовлетворяют заданным спецификациям; модификация проектов становится чрезвычайно трудоемкой и рискованной.

Преодоление этого кризиса связывают с объектно-ориентированной технологией программирования. Теперь говорят о начале "революции в программировании". При этом имеется в виду уже не объектно-ориентированное программирование, а разработка проектов КИС на основе визуального моделирования компонент (CBD – Component Based Development).

Современные инструментальные средства визуальной CBD-разработки характеризуются следующими свойствами:

1. Поддержка генерации кода и обратного проектирования (т.е. восстановление визуальной модели по программному коду) сразу для нескольких языков, включая: Visual Basic, C++, Java, PowerBuilder, CORBA Interface Definition Language (IDL), а также Data Definition Language для большинства СУБД [1].

2. Поддержка визуального объектно-ориентированного моделирования и полная совместимость с языком UML (Unified Modeling Language), который, начиная с 1997 года, задает стандарт для языков описания моделей.

В настоящее время широко известны два подхода к проведению декомпозиции системы при построении ее визуальной модели:

1. Основанная на упорядочении событий/потоков данных алгоритмическая декомпозиция (структурный анализ/проектирование).

2. Объектно-ориентированная декомпозиция, базирующаяся на выделении агентов, которые или сами действуют, или являются объектами действия.

Объектно-ориентированное программирование – это метод реализации, в результате применения которого составляются программы, организованные как совокупности взаимодействующих друг с другом объектов. Каждый объект является экземпляром некоторого класса, а все классы являются членами иерархии классов, объединенной отношением наследования. Объектно-ориентированное проектирование состоит в объектной декомпозиции системы. Для визуального выражения разных аспектов модели, логического (структура классов и объектов) и физического (модульная и процессорная архитектура), используется различная нотация.

Визуальное моделирование на UML представляет собой единый подход, который используется для итерационного "изобретения" решения имеющейся проблемы [2]. Это обеспечивает "движение модели" от требований заказчика к программной реализации. Цель визуального моделирования КИС состоит в том, чтобы полученная информационная система удовлетворяла следующим условиям: соответствие заданным (возможно, неформальным) спецификациям; соответствие ограничениям целевой аппаратной платформы; соответствие (явным и/или неявным) требованиям к производительности при заданных ограничениях на аппаратные ресурсы; соответствие требованиям, предъявленным к процессу разработки: стоимость разработки, сроки и т.п.

Методология визуального моделирования помогает преодолеть типичные организационные трудности, возникающие перед командами разработчиков, группами поддержки качества и менеджерами, участвующими в создании сложного программного обеспечения масштаба предприятия, а именно: перерасход бюджета, несоблюдение этапных сроков и проблемы качества продукта.

Реально процесс разработки состоит из нескольких стадий. Причем эти стадии существуют в любых моделях жизненного цикла проектов, они лишь отличаются названиями и группировкой действий.

Цели стадии анализа требований состоят в том, чтобы понять процессы, которые управляют предприятием или системой, определить область деятельности системы и требования пользователя. Система рассматривается с точки зрения конечного пользователя как «черный ящик», составляется представление, что система будет делать, не рассматривая, как она это будет делать.

На данной стадии с помощью UML создается модель прецедентов системы. Она позволяет выделить внешние системы, контактирующие с системой, основные процессы и их взаимосвязь. Диаграммы прецедентов дают возможность выделить функциональную структуру системы, не вдаваясь в детали ее реализации. Кроме того, производится предварительное выделение объектов системы и их классификация. На основании построенной модели составляется план разработки системы.

Стадия системного проектирования включает в себя решения верхнего уровня относительно разработки системы в целом. Здесь производится разработка архитектуры системы с помощью диаграммы развертывания. Она позволяет выделить вычислительные ресурсы, устройства, использующиеся ими, и соединения между ними, спроектировать размещение отдельных процессов и исполняемых компонент на определенных устройствах, что особенно важно при проектировании сложных систем и интернет-приложений.

Для решения проблемы требуются специализированные вычислительные системы реального времени, смоделированные и, в дальнейшем, сгенерированные с помощью UML.

UML позволяет решать данную задачу путем разработки специализированного программного обеспечения и моделирования технических средств, которые могут быть реализованы на заказных БИС и СБИС [2]. С целью снижения сроков и стоимости создания перспективных образцов технических объектов (ТО), контроля и управления ими методы

проектирования должны удовлетворять требованиям высокого уровня формализации описания информационных процессов в контролируемых ТО и системах формирования и анализа воздействия на данные средства, адекватной оценки их состояния, а также возможности автоматизации их синтеза.

Из известных методов решения вышеназванных задач особое место занимают:

- теория синтеза автоматов, позволяющая решать проблему топологического проектирования БИС и СБИС, программируемых логических интегральных схем (ПЛИС), управляющих устройств [3];

- логико-комбинаторный метод синтеза структуры сложных объектов [4].

Метод синтеза цифровых автоматов [5] является эффективным методом проектирования логических схем, управляющих устройств. Однако для синтеза вычислительных структур, ориентированных на реализацию аналитических выражений небулевого характера и алгоритмов их реализации, этот метод является принципиально непригодным.

Использование логико-комбинаторного подхода к синтезу структур сложных систем, ориентирован на комбинацию известных технических решений с последующим выбором оптимальной структуры; таким образом, эта методология сводится к обыкновенному анализу и не обеспечивает нахождение нетрадиционных перспективных решений.

Известные системы автоматизированного проектирования позволяют решать задачи синтеза цифро-аналоговых, логических структур, трассировки, компоновки, выпуска технической документации (САПР P-CAD, AUTO-CAD и т.д.). В то же время отсутствуют средства автоматизации структурного и функционального проектирования, что связано, в первую очередь, с отсутствием до недавнего времени математических методов решения задачи.

Решение указанной проблемы становится возможным благодаря появлению теории синтеза вычислительных структур реального времени, разработанной А.С. Кобайло [6], основанной на назначении уровней временной иерархии вершинам графа вычислительного алгоритма реализации математической модели процесса и условия реализуемости пути графа в РМВ. Высокая степень формализации процесса проектирования сложных технических систем и возможность на основании этого его алгоритмизации позволит создать уникальную систему проектирования вычислительных структур РМВ. Обобщенный алгоритм, основанный на базовых положениях данной теории, представляет последовательность процедур реализации частных алгоритмов синтеза.

Исходными данными для алгоритма синтеза вычислительной структуры реального времени являются:

- 1) аналитическое выражение вычислительного процесса параметров модели;
- 2) условие требования реализации вычислительного процесса в реальном масштабе времени, в частности могут быть заданы временные характеристики обработки данных;
- 3) характеристики функциональных устройств, способных в совокупности реализовать все операции алгоритма исходной математической модели вычислительного процесса.

В результате реализации алгоритма, основанного на теории синтеза вычислительных систем реального времени, будут сформированы: граф вычислительной структуры и спецификация его вершин, транспонируемый в структурную схему проектируемой системы; вектор назначения, который может стать основой создания принципиальных схем; вектор временной развертки, являющийся основой синхронизации проектируемой системы и создания средств управления данной системы; такт вычислительной структуры, определяющей частоту следования тактовых импульсов.

Вектор временной развертки определяет программу взаимодействия функциональных устройств, составляющих вычислительную систему, на одном цикле ее функционирования [6].

Создание пакета прикладных программ синтеза систем реального времени на базе UML и сопряжение ее с лучшими мировыми образцами САПР предоставит возможность автоматизации всех стадий проектирования ВС и других технических систем, начиная с эскизного проекта и заканчивая выпуском технической документации, а также оптимального планирования технологических процессов.

Литература

1. Буч, Рамбо, Якобсон. UML.
2. Bruce Powell Douglass. Real-Time UML.
3. Скляров В.А. Синтез автоматов на матричных БИС. – Минск: Наука и техника. – 1984.
4. Кобайло А.С. Основы теории синтеза вычислительных структур реального времени. – Мн.: БГУИР, 2001.
5. Анкудинов Г.И. Синтез структуры сложных объектов: Логико-комбинаторный подход. – Л.: Изд-во Ленинград. Ун-та, 1986.
6. Кобайло А.С. Единичные функции для математических моделей вычислительных процессов: Деп. в Бел ИСА. - Мн.: РСНР, 1997.

АВТОМАТИЗАЦИЯ НА ОАО "САВУШКИН ПРОДУКТ"

Иванюк Д. С.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

В конце 90-х было осознано, что дальнейшее развитие предприятия (в отношении производства) невозможно без автоматизации, поэтому встал вопрос - что дальше? Либо сторонние предложения, либо свои. Было принято решение разработать свою SCADA-систему. SCADA – Supervisory for Control And Data Acquisition - диспетчерское управление и сбор данных; SCADA-система – название класса ПО для создания систем автоматизации промышленного производства (АСУ ТП). В результате работы трех человек в течение 4-х лет была разработана программа Monitor и EasyServer. Один из первых проектов – контроль температурных режимов, в дальнейшем автоматизация приёмки молока и т.п. Сейчас – более 20-ти проектов, охватывающих различные области производства (начиная от учёта воды и электричества, различные цеха и участки), проекты в филиалах. Система имеет клиент-серверную структуру: на выделенном компьютере (сервере) выполняется серверная часть проекта, к нему подключаются клиенты (рабочие станции).

Общая схема системы управления приведена на рисунке 1.

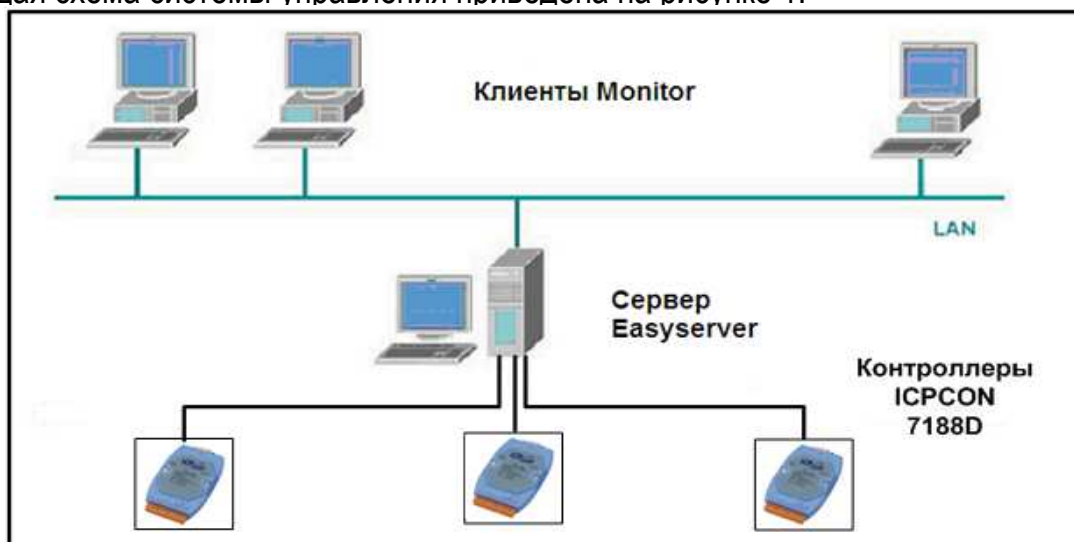


Рисунок 1

Нижний уровень составляют:

- Контроллер – содержит программу, управляющую конкретным технологическим процессом;
- Модули ввода-вывода. Они уже непосредственно управляют оборудованием (клапанами, насосами и т.д.), получают данные с датчиков (температура, давление, концентрация и т.д.);
- Различные операторские панели – автономное управление процессом на рабочем месте.

Для разработки использовались следующие языки программирования: уровень контроллера – C++ (Turbo C 3.0), монитора и сервера – Object Pascal (Delphi).

Monitor – является модульной масштабируемой системой визуализации процесса для приложений различного уровня, начиная с простых однопользовательских приложений в промышленности и до сложных многопользовательских систем.

Monitor обладает удобным пользовательским интерфейсом для создания промышленных приложений и гарантирует стабильную и надежную работу. Пример пользовательского интерфейса программы Monitor приведен на рисунке 2.

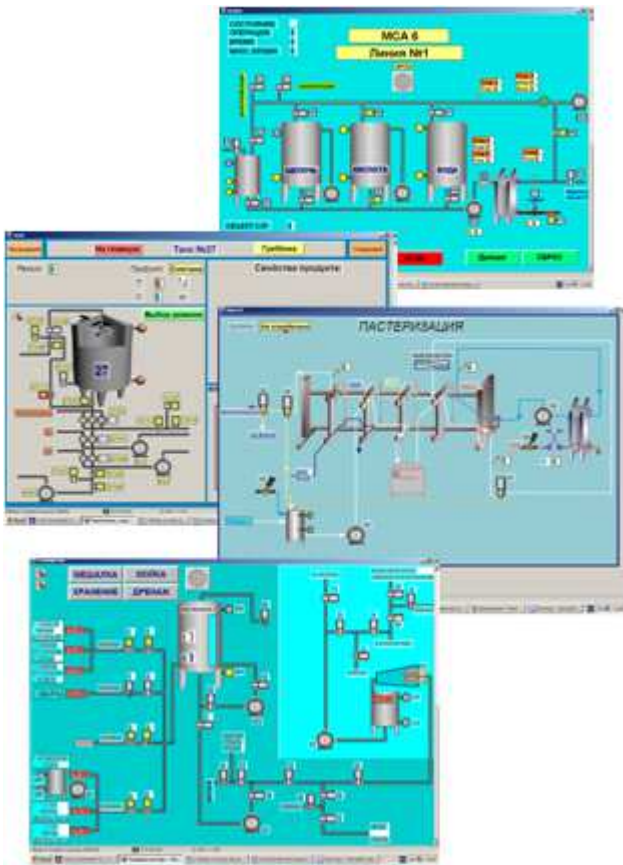


Рисунок 2

Monitor позволяет инженерам-проектировщикам создавать индивидуальные стандарты путем разработки специфических меню, ориентированных на конкретную отрасль промышленности и на конкретный проект.

Monitor также осуществляет архивирование измеряемых значений процесса, предоставляя в дальнейшем возможность отображения их в виде трендов или использования в других отчетах.

Проект, сделанный в программе Monitor, загружается как на сервере, так и локально в качестве клиента. Часть проекта служит как визуализация технологического

процесса и управления (клиент), другая часть выполняет функции обработки данных. При создании проекта тэговые свойства объектов привязываются к тэгу базы каналов. В данном случае тэг является указателем на область памяти (ячейку) области данных. База каналов позволяет связать сервер и устройства измерения и управления (смотри рис. 3). Для ее создания служит программа DbEditor. Перед созданием проекта автоматизации в программе Монитор необходимо создать базу каналов. Результатом будет создание файла, описывающего область адресов устройств (датчики, клапана, насосы и т.д.), которые будут использоваться в проекте.



Рисунок 3

В настоящее время на основе разработанного инструментария ведётся не только разработка новых проектов, но и обновление уже существующих в соответствии со спецификой производства – сфера динамически развивается, поэтому это требует соответствующей модернизации оборудования и систем управления.

РЕКУРРЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА С ВЕТВЛЕНИЕМ НА ЗАДАЧАХ О НАЗНАЧЕНИИ

Кишкевич А.П., Ревотюк М.П.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск

Предмет рассмотрения – рекуррентный алгоритм решения задачи коммивояжера [1] с минимальными изменениями исходной матрицы при переходе от шага к шагу. Потребность учета изменения состояния в представлении задачи возникает в случае ее распараллеливания и синхронизации агентов распределенных вычислений [2,3]. Цель исследования – сокращение расхода памяти и, как следствие, объема передаваемых данных между узлами вычислительной сети.

Задача коммивояжера в классической постановке формулируется так: задана матрица расстояний (стоимости переезда) $C = \|c_{ij}, i, j = \overline{1, n}\|$ между любым из n городов, необходимо найти цикл минимальной длины однократного посещения каждого города.

Если решение задачи коммивояжера представить матрицей булевых переменных $X = \|x_{ij}, i, j = \overline{1, n}\|$, где единица означает включение в оптимальный цикл дуги $i \rightarrow j$, то формальная модель оптимизации имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \Rightarrow \min; \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1; \\ x_{ij} \geq 0, i, j = \overline{1, n}; \\ u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, i = \overline{2, n}, j = \overline{2, n}, i \neq j. \end{array} \right. \quad (1)$$

Среди точных методов решения задачи (1) одним из эффективных считается метод ветвей и границ. Схема алгоритма такого метода может быть реализована разными способами, различающимися правилами порождения ветвей дерева вариантов.

Известно, что на практике наиболее успешным для решения задачи (1) оказывается подход, базирующийся на решении линейных задач назначения, анализе получающихся замкнутых циклов и, если таких циклов более одного, последующем переборе вариантов разрыва циклов. Рекурсия обхода дерева строится на матрице расстояний, где разрывы циклов задаются назначением бесконечных значений длин запрещаемых дуг.

Основной проблемой использования метода ветвей и границ для исчерпывающего поиска является повышенные требования к объему памяти. Его прямолинейная реализация для задачи (1) размерностью n характеризуется потребностью в памяти порядка $n \cdot (n^2 + 2n)$ [2]. Однако минимизация общего объема используемой памяти - не столько вопрос оснащения локальной ЭВМ, сколько минимизация объема передаваемых данных при распараллеливании задачи.

Вместе с тем разностная схема представления состояний процесса ветвления в задаче (1) позволяет получить зависимость $O(n^2)$. Например, реализация такой схемы при ветвлении на двоичных деревьях методом Литтла [1] характеризуется потребностью в памяти $n^2 + 2n \cdot (n + 3)$ [2]. Предметом дальнейшего рассмотрения является способ построения разностной схемы ветвления на множестве линейных задач назначения LAP (Linear Assignment Problem) [4].

Существенно определяющим быстродействие решения (1) частью алгоритма в узле дерева поиска здесь является решение LAP на той же матрице исходных данных C :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \Rightarrow \min; \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1; \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1; \quad x_{ij} \geq 0, i, j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2)$$

Доминирующим по быстродействию программ решения LAP (2) в настоящее время является метод кратчайшего пути приращений SAP (Shortest Augmenting Path) [4,5]. Подобно известному алгоритму венгерского метода, вычислительная схема метода SAP использует двойственную задачу линейного программирования

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j \Rightarrow \min; \\ c_{ij} - u_i - v_j \geq 0, i, j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (3)$$

Имеется ряд модификаций реализации метода SAP[4,5], но чаще всего внимание уделяется эффективности решения независимых LAP вида (3).

Однако в случае решения задачи коммивояжера естественно использовать взаимосвязь матриц рекурсивно порождаемых задач назначения.

Например, можно учитывать следующие приемы:

трансформация исходной задачи перед генерацией дерева решений;

разностная схема изменения исходной матрицы по строкам;

учет возможности прерывания итераций решения задачи LAP.

Трансформация задачи основана на том, что решение задач вида (1) или (2) не меняется при вычитании из строк и столбцов минимальных элементов (приведении матрицы).

Такие действия целесообразно выполнить один раз перед порождением дерева задач назначения. Это позволит при поиске начального назначения в любом узле дерева сразу искать известное минимальное значение – нуль.

Остальные упомянутые выше приемы касаются операций, выполняемых в отдельном узле дерева вариантов.

Предположим, что в очередном узле дерева на уровне ветвления l , $l = \overline{0, n-1}$, решается задача назначения с некоторой матрицей C^l .

Пусть $R^l = \{i \mid x_{ij} = 1, j = \overline{1, n}\}$ – номера единичных элементов строк матрицы решения задачи (1) или (2). Вектор R^l исключает необходимость хранения решения в матричном виде и пригоден для выявления циклов, не являющихся гамильтоновыми.

Действительно, если k – некоторая вершина цикла решения (2), представленного вектором R^l , то последовательность

$$K^l(k) = \left\{ K(0) = k, \left\langle K(i) = R^l_{K(i-1)} \mid K(i) \neq k \right\rangle \right\} \subseteq R^l, \quad (4)$$

только тогда соответствует гамильтонову циклу, когда условием останова является $K(n-1) = k$, $k \in \overline{1, n}$.

Если цикл не гамильтонов, то есть $K^l(k) \subset R^l$, то необходимо породить множество задач уровня $l+1$. Для этого следует указать цикл минимальной длины, выбрав в соответствии с (4) вершину входа в цикл $k^l = \arg \min_k \{ |K^l(k)|, k \in \overline{1, n} \}$.

Правило порождения тривиально – необходимо для каждой вершины обнаруженного цикла запретить посещение других вершин этого цикла. Количество порождаемых задач – $|K^l(k^l)|$.

Запрет на использование элемента матрицы предпочтительно установить не его тривиальной заменой на значение $c_{\max} = \infty$, а смещением текущего значения этого элемента на величину

$$c_{\max} = \max_{i,j} \{c_{ij} : i \neq j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}\}. \quad (5)$$

В этом случае дополнительный буфер для сохранения элементов строки не требуется. Надежность реализации такого способа очевидна, если выполняется условие размещения в машинном слове, выделяемом для хранения элементов матрицы, значения $c_{\max} \cdot n$. Количество смещений не превышает максимально возможного количества уровней дерева вариантов – $(n-1)$. В случае целочисленных неотрицательных значений элементов матрицы C можно использовать установку и сброс старшего двоичного разряда k положительного значения $2^k > c_{\max}$.

Изменения матрицы выполняются построчно, поэтому достаточно сохранить изменяемые элементы в буфере размером n :

$$c_{ij}^{l+1} = c_{ij}^l + c_{\max} * (i \in K^l(k^l) \wedge j \in K^l(k^l)), i, j = \overline{1, n}. \quad (6)$$

После использования модифицированной матрицы легко произвести откат в исходное состояние, используя (4)-(6). Таким образом, матрица описания задачи не требует копирования.

При решении LAP на основе (3) имеется возможность получения нижних оценок целевой функции. Это позволяет прервать анализ бесперспективного варианта матрицы, используя глобальное значение рекордной оценки среди просмотренных листьев дерева [2,3]. Однако вопрос эффективной реализации функции решения задачи LAP можно рассматривать отдельно [4,5], а его решение не меняет смысл рассматриваемых здесь приемов представления процесса ветвления.

Основным достоинством рассмотренной здесь разностной схемы реализации ветвления на множестве задач назначения является экономное использование памяти. Оценка потребности в памяти – $n^2 + (n - 1) \cdot (n + 1)$, где первое слагаемое – исходная матрица задачи (1), в второе - память стека вариантов ветвления.

Литература

1. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ/Пер. с англ. – М.: МЦМНО, 2002. – 960 с.
2. Ревотюк М.П., Кузнецова Н.В. Агентная система кооперации ресурсов вычислительной среды для решения задач выбора//Известия Белорусской инженерной академии, № 1(15)/1, 2003. – С. 265-268.
3. Кишкевич А.П., Ревотюк М.П. Разностная схема представления состояний решения задачи коммивояжера//Материалы IV Респ. научной конф. молодых ученых и студентов (Брест, 28-30 ноября 2005 г.) – Брест: БГТУ, 2005. – С. 135-136.
4. Burkard R.E., Cela E. Linear assignment problems and extensions// Handbook of Combinatorial Optimization Vol.4 Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. - 57 p.
5. Jonker R., Volgenant A. A shortest path algorithm for dense and sparse linear assignment problem//Computing, vol. 38, 1987. – pp. 325-340.

ПРОГРАММНО-АППАРАТНАЯ СИСТЕМА АКУСТИЧЕСКОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА КОРРОДИРУЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Козак А.Ф., Костюк Д.А., Марчик Д.В.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Акустика диссипативно-дисперсионных сред (ДДС) позволяет создать высокочувствительный метод ультразвуковой диагностики процессов агрегатного, фазового и другого изменения состояния вещества, заключающийся в измерении спектральных характеристик акустического импульсного сигнала, отраженного от границы твердотельного звукопровода с исследуемым объектом [1]. Метод применим для широкого круга объектов, являющихся ДДС, т.е. значительно поглощающих ультразвук. К числу достоинств, привносимых методами акустики ДДС в техническую диагностику, можно отнести отсутствие непосредственного контакта между датчиком и предметом диагностики, отсутствие движущихся частей, возможность проведения измерений в реальном масштабе времени и непосредственно на работающем оборудовании, пригодность для диагностики сильно вязких сред и твердых веществ.

Положения акустики ДДС послужили основой для разработки приборного решения акустического спектрального анализа – дешевого, компактного и несложного в обращении устройства, позволяющего определять характеристики ДДС, такие как влажность, вязкость, концентрацию конкретных веществ и т.д. Предусмотрена возможность сохранения результатов измерения с последующей передачей их в ЭВМ для более подробного анализа, наличие средств ЖК-индикации и минимальной клавиатуры.

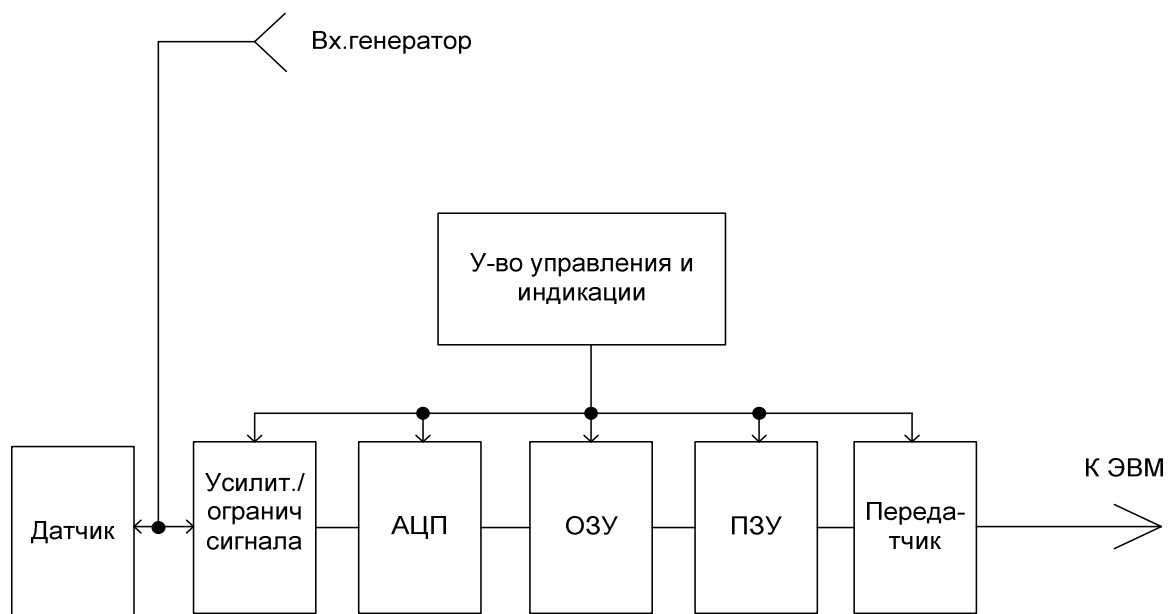


Рис. 1. Структура устройства

Устройство включает в себя (рис. 1) датчик, усилитель/ограничитель сигнала, аналого-цифровой преобразователь, память, передатчик и блок управления/индикации. Высокоскоростной АЦП обеспечивает оцифровку считанного импульса для хранения в памяти прибора и последующей передачи в ЭВМ. Устройство управления и индикации управляет работой системы и синхронизирует процессы оцифровки сигнала и передачи информации внутри устройства и в ЭВМ. В качестве управляющего ядра устройства был выбран микропроцессор Atmel C8051F000. В качестве датчика используется ультразвуковой пьезокерамический преобразователь. Для обеспечения резонанса на заданной частоте параллельно преобразователю подключается индуктивность [1, 2].

Устройство позволяет в автономном режиме проводить первичную диагностику труднодоступных объектов, не прибегая к использованию большого и громоздкого оборудования. Для более тонкого анализа результаты измерений могут быть сохранены в flash-ЗУ и затем считаны ЭВМ по интерфейсу USB.

Одной из перспективных сфер применения разработанного комплексного программно-аппаратного решения является акустический контроль состояния корродирующей поверхности.

Коррозия железа приводит к окислению поверхностного слоя, т.е. изменению химического соединения в его деструкции. Материальные и химические характеристики такого преобразованного слоя заметно отличаются от его металлического объема [3].

При контроле коррозии средствами разработанного устройства анализируется сигнал, отраженный от границы раздела сред - стенки металлической емкости и содержащейся в ней жидкости. Закрепление датчика со звукопроводом на внешней стенке емкости избавляет от необходимости обеспечения непосредственного контакта со средой. В штатном режиме в качестве ДДС выступает внутренняя среда емкости. При наличии коррозионного слоя, последний изолирует материал емкости от ДДС, являясь, в свою очередь, материалом со свойствами ДДС, отличными от содержимого емкости. Различие в параметрах отраженного сигнала позволяет отслеживать оба варианта, равно как и отсутствие какой-либо ДДС в месте контакта датчика. Таким образом, производится оценка состояния внутренней поверхности и фиксируется наличие необходимого уровня содержимого.

Теоретическое рассмотрение особенностей отражения акустического сигнала от поверхности раздела твердого тела и диссипативного покрытия [2], продемонстрировало корреляцию коэффициента отражения акустического сигнала с характеристиками физического состояния покрытия, его силой адгезии. Это актуально и для оксида железа (ржавчины) на стальной поверхности детали [3, 4].

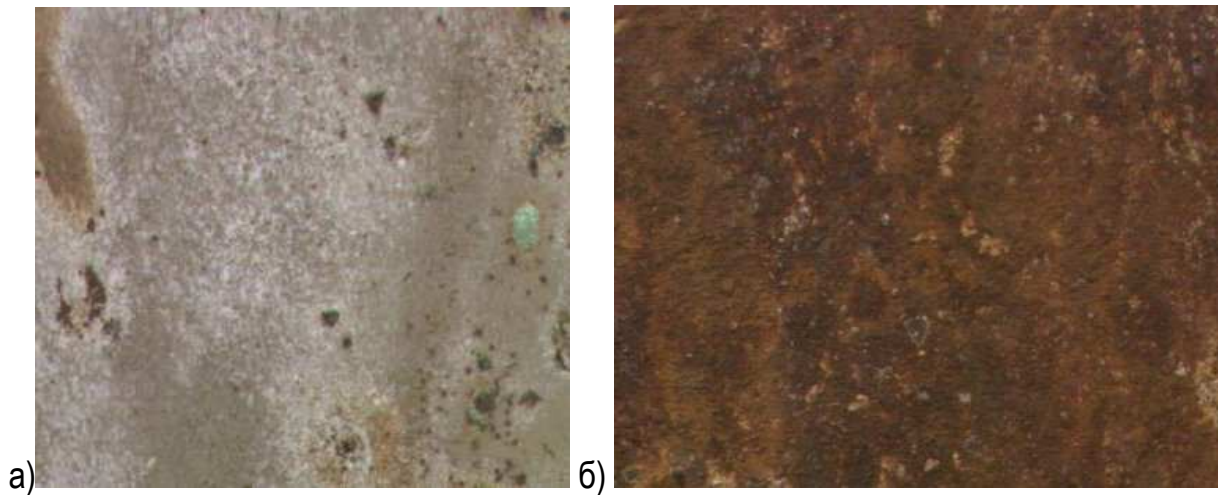


Рис.2. Экспериментальные образцы:

поверхность с очагами коррозии (а) и плотным коррозионным слоем (б)

На рис. 2 показаны образцы, использовавшиеся в серии экспериментов: образец с условно-некорродированной поверхностью и образец с корродированной поверхностью.

При исследовании образцов датчик закреплялся на тыльной (не подверженной коррозии) стороне и производилось зондирование образца импульсами продольного ультразвука частотой 3.5 МГц. Рис. 3 демонстрирует изменения отраженного импульса, наблюдаемые при перемещении датчика по тыльной стороне образца, визуализированные с помощью специально разработанного программного обеспечения [4], предназначенного для запуска на ЭВМ, работающей в комплексе с прибором.

Как видно, отраженный импульс изменяется как на корродированном образце, так и на контрольном, не подвергавшемся процессу ускорения коррозии. Изменения объясняются как неравномерностью коррозионного слоя (рис. 2), так и наличием тонкого слоя окислов, а также погрешностью, вносимой переходным слоем при перемещении датчика.

Для преодоления ограничений встроенного дисплея, не позволяющего вывести с допустимым разрешением осциллограмму отраженного сигнала, а также с целью упрощения работы оператора по интерпретации данных была исследована возможность выполнения прибором первичных интегральных оценок, четко отражающих степень корродированности образца. Критерием отбора интегральной оценки является ее чувствительность к наличию коррозионного слоя, а также приемлемая для микропроцессора Atmel C8051F000 вычислительная нагрузка.

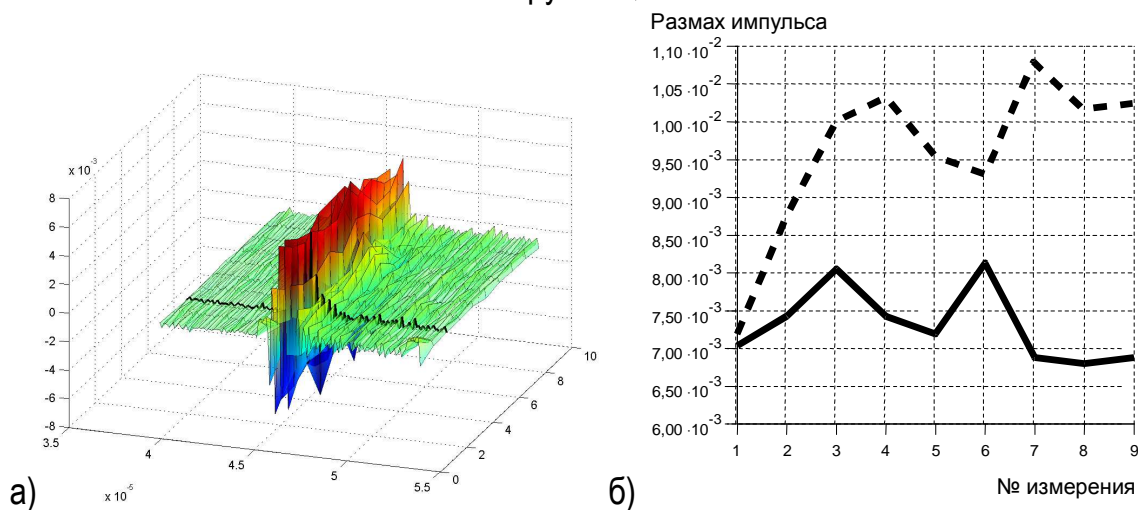


Рис. 3. Визуализация результатов измерений:

а) представление последовательности измерений в ЭВМ;

б) вычисление размаха для серии импульсов, отраженных от сильно корродированной поверхности (сплошная линия) и поверхности с очагами коррозии (пунктир)

В качестве интегральных оценок отраженного сигнала выбраны размах сигнала, коэффициент амплитуды и коэффициент формы сигнала. Основой для данных характеристик являются такие первичные параметры сигнала, как его среднеквадратическое значение, максимальная девиация от постоянной составляющей в сторону меньших и/или больших значений, а также постоянная составляющая сигнала и его текущее среднее значение.

Авторы благодарны БРФФИ (Т06М-227), ГКПНИ «Снижение рисков ЧС» и МО РБ за финансовую поддержку исследований.

Литература

1. В.П. Данилевский, Д.А. Костюк, Н.В. Кудинов, Ю.А. Кузавко. Акустические спектроскопические методы и средства диагностики материалов и веществ // «Материалы, технологии, инструменты», №3, т. 8, 2003. С. 104-112
2. Д.А. Костюк, Ю.А. Кузавко. Аномалии граничного отражения ультразвука от пленки диссипативной среды // Инженерно-физический журнал, т. 75, No. 4, 2002. - С. 181 - 186
4. Козак А.Ф., Костюк Д.А., Кузавко Ю.А., Николаюк Л.Н. Акустический спектральный анализ коррозии ферромагнитных металлов и сплавов. // Сб-к тезисов 15 Петербургских чтений по проблемам прочности. - Санкт-Петербург, 2005. стр. 87-88
5. Kozak A., Kostiuk D., Kuzavko Y., Nikolayuk L., Tomassi P. The acoustic spectral analysis of metal corroding surfaces // Proc. of the Internat. Conf. CORROSION 2005 „Science & Economy”. Poland, Warsaw, 8 – 10 June 2005, Inżynieria Powierzchni, 2005, 2A, 63 - 70.

ПАКЕТ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ ДЛЯ РЕГИСТРАЦИИ ВИДЕОИЗОБРАЖЕНИЙ И ТЕСТИРОВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПЗС-МАТРИЦ

Кравцевич Л. И.

Белорусский государственный университет, г. Минск

В современной науке, технике и производстве широко используются оптические методы контроля различных параметров. Для преобразования оптического излучения в электрические сигналы в таких устройствах часто применяются приборы с зарядовой связью, такие как ПЗС-линейки и ПЗС-матрицы [1].

Это были первые твердотельные преобразователи излучения в видеосигнал. Они отличались такими важными качествами, присущими только ФПЗС, как жесткий геометрический растр, возможность обработки информации непосредственно на кристалле, нечувствительность к магнитным полям [2].

Важным этапом создания регистраторов оптического излучения на основе ФПЗС является тестирование общих параметров регистратора, а также контроль параметров ПЗС-датчика на соответствие данным, указанным фирмой-производителем.

Данная работа посвящена разработке пакета программных средств тестирования ФПЗС-матриц, представляющий удобный инструментарий, автоматизирующий процесс тестирования и отбора матриц с заданными характеристиками.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи: изучить физические основы работы ПЗС-матриц и проанализировать их параметры, разработать архитектуру программного обеспечения, разработать алгоритмы обработки измерительной информации, разработать структуру и состав программных модулей и реализовать их в среде программирования Microsoft Visual Studio 2005 на языке высокого уровня C++ с использованием фундаментальной библиотеки классов Microsoft, а также провести апробацию работоспособности разработанного программного инструментария и корректности исполнения алгоритмов обработки измерительных данных.

Рассмотрим систему «ПЗС-камера – компьютер – человек».

Камера регистрирует излучение. Связь устройства с компьютером происходит посредством USB 2.0 интерфейса. Управление камерой осуществляется с помощью драйвера, написанного на языке ассемблера. Обращение программного обеспечения к драйверу а, значит, и к камере идет через DLL-библиотеку.

Данные от камеры поступают программе в виде массива целых чисел. Каждый элемент массива соответствует ячейке матрицы и хранит количество отсчетов АЦП, который дискретизировал сигнал ячейки. Данные подвергаются предобработке. Под предобработкой понимается приведение данных к типу с плавающей точкой для удобства ведения последующих расчетов. Программой будет выполняться обработка данных, полученных после регистрации как светового (с освещением датчика), так и темнового сигнала (без освещения). При работе со световым сигналом необходимо вычитать из него средний темновой кадр, для уменьшения погрешности измерений, сделанных датчиком. Вычитание удобно производить на этапе предобработки, что позволяет сохранить аппаратные ресурсы системы.

После предобработки данные можно предоставить пользователю в удобном виде, для этого производится визуализация данных, а также расчет параметров датчика.

Необходимо предоставить пользователю возможность сохранения данных, полученных в результате предобработки, чтобы пользователь мог останавливать работу программы и затем, при необходимости, возобновлять ее. Необходимо обеспечить возможность сохранения и печати результатов расчета и визуализации для ведения отчетности.

Взаимодействие пользователя с программой будет осуществляться через графический интерфейс пользователя. Интерфейс должен предусматривать способы управления регистрацией, в частности количеством регистрируемых в ходе эксперимента кадров, переключение между кадрами, временем накопления сигнала для каждого кадра.

Диаграмма обработки данных программными средствами представлена на рис. 1. На основе диаграммы задача написания программного пакета может быть разделена на части. Каждая часть выступает в виде отдельного модуля в программе. Каждый модуль должен быть разделен на классы, в соответствии с концепциями объектно-ориентированного программирования. Такое программирование является наиболее удобным для создания и поддержки сложных программных проектов [3, 4]. Программа разбита на следующие модули: модуль регистрации-предобработки данных; модуль визуализации; модуль расчета; графический интерфейс пользователя.

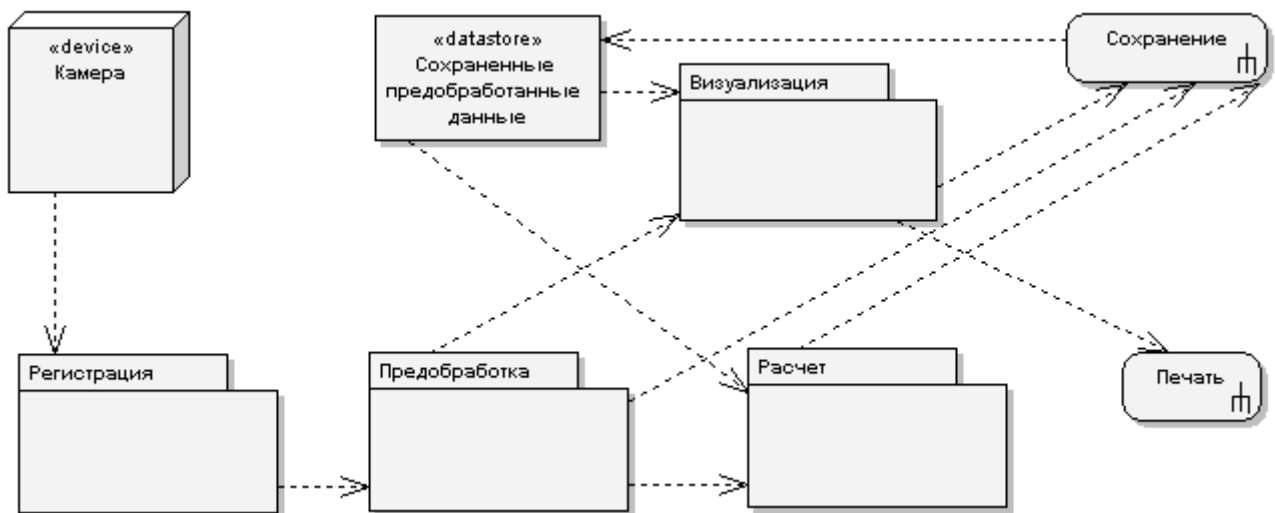


Рис. 1. Диаграмма обработки данных программными средствами

В модуле визуализации предусмотрено три способа представления зарегистрированных данных. При трехмерном отображении зависимости амплитуды излучения попадающего на прибор от положения пикселя на матрице, величина амплитуды отображается цветом пикселя (градацией серого), максимальной амплитуде соответствует белый цвет, минимальной амплитуде (отсутствие излучения) – черный. Также величина амплитуды отображается расстоянием от плоскости xOy до данной точки. При двухмерном изображении зависимости амплитуды излучения попадающего на прибор от положения пикселя на матрице, величина амплитуды отображается цветом пикселя (градацией серого), максимальной амплитуде соответствует белый цвет, минимальной амплитуде (отсутствие излучения) – черный. При изображении распределения амплитуды излучения по строке или по столбцу матрицы горизонтальная ось отображает пиксели строки или столбца, вертикальная – отсчеты АЦП прибора. Предусмотрены способы детализации каждого представления, возможность измерения амплитуды в каждом пикселе датчика.

Работу модуля расчета проиллюстрируем параметрами, полученными для ПЗС-датчика Sony ICX415AL. Это следующие параметры: неравномерность темнового сигнала DSNU, среднеквадратичный шум темнового сигнала STD и динамический диапазон темнового сигнала DR.

DSNU = $(42,0 \pm 2,4)$ отсч. АЦП; $\varepsilon = 3,9\%$.

STD = $(7,27 \pm 0,81)$ отсч. АЦП; $\varepsilon = 11\%$.

DR = $(2271,0 \pm 87,2)$; $\varepsilon = 3,8\%$.

Параметры, заявленные производителем датчика, имеют следующие значения [5].

DSNU = 42,0 отсч. АЦП.

STD = 12,0 отсч. АЦП.

DR = 1365.

Производитель ожидает, что каждый параметр конкретного датчика будет не хуже, чем заявленный в техническом паспорте. Для данного конкретного датчика неравномерность темнового сигнала совпадает с неравномерностью, указанной в паспорте, а среднеквадратичный шум темнового сигнала и динамический диапазон оказываются лучше, чем заявлено.

В программе предусмотрено четыре формата сохранения данных.

*.cim – внутренний формат программы, предназначен для сохранения серии кадров, затем эту серию можно открыть с помощью данной программы и продолжить работу с этой серией.

*.txt – текстовый файл, числа записываются по строкам и столбцам, если сохраняется файл или кадр, и в столбец при сохранении строки или столбца (для совместимости с пакетами MATLAB 7.0.1 и Mathematica 4.0.1).

*.bin – файл двоичных чисел (сохранение двоичного представления десятичных чисел).

*.bmp – формат для сохранения изображений.

Графический интерфейс пользователя программы и окна визуализации данных, зарегистрированных ПЗС-матрицей, представлены на рис. 2. На рисунке представлены все типы визуализации данных, предоставляемых пакетом программ. В качестве источника был использован импульсный лазер.

Пакет используется в лаборатории лазерной плазмодинамики НИИ Прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко при тестировании параметров ПЗС-датчиков для разрабатываемых видеокамер, в лаборатории радиационной плазмодинамики Института физики НАН Беларуси при проведении физических экспериментов по тематике лаборатории.

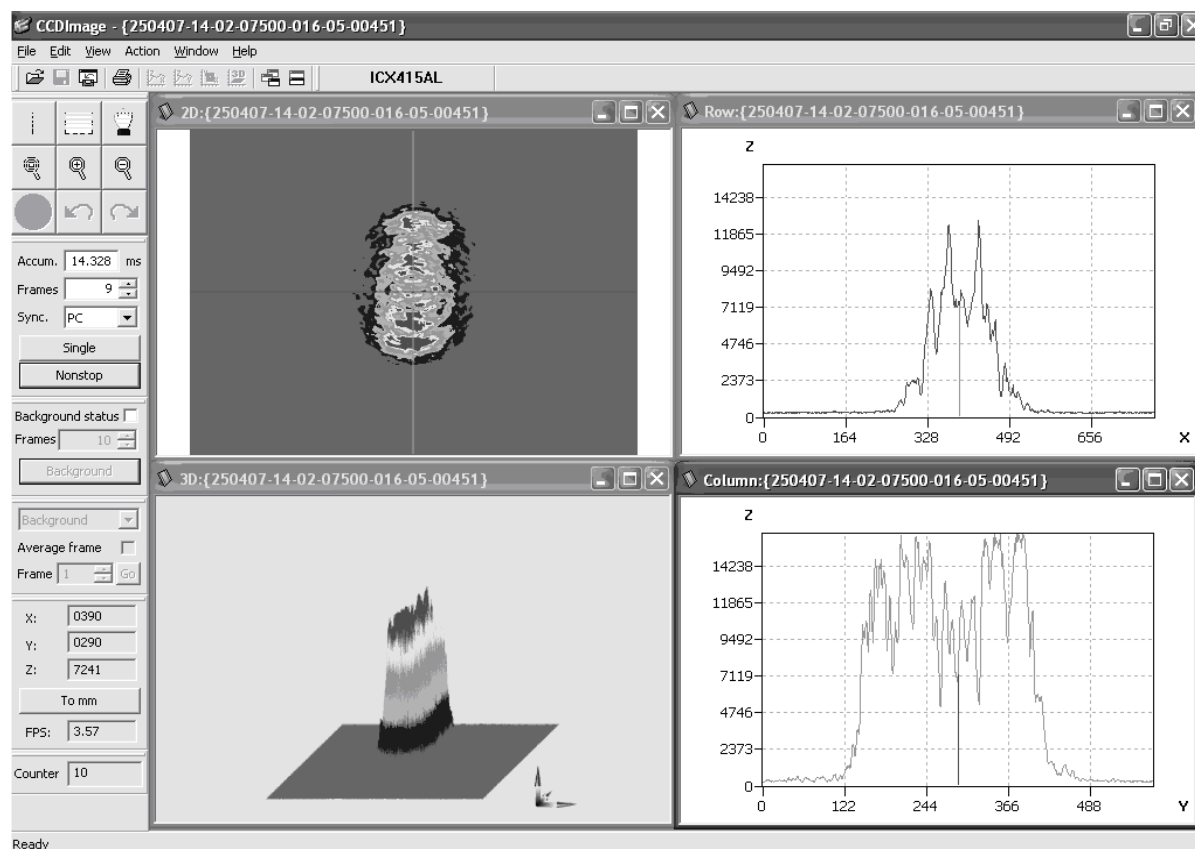


Рис. 2. Работа программы с камерой на основе матрицы Sony ICX415AL

Литература

1. Пресс Ф.П. Фоточувствительные приборы с зарядовой связью. - Москва, 1991.
2. Писаревский А.Н., Чернявский А.Ф. Системы технического зрения. - Ленинград, 1988.
3. Страуструп Б. Язык программирования C++. Специальное издание. – Москва: Издательство БИНОМ, 2006. – 1099 с.
4. Гамма Э., Хелм Р., Джонсон Р., Влссидес Д. Приемы объектно-ориентированного проектирования. Паттерны проектирования. – Санкт-Петербург: ПИТЕР, 2007. – 366 с.
5. Sony. Diagonal 8mm (Type 1/2) Progressive Scan CCD Solid-state Image Sensor ICX415AL with Square Pixel for CCIR B/W Cameras. 2004.

ПРОБЛЕМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ В СТРОИТЕЛЬНЫХ КОМПАНИЯХ.

Куган С.Ф.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Многие современные строительные организации, несмотря на бурное развитие и широкий спектр программных продуктов, имеют достаточно низкий уровень автоматизации. В большинстве случаев это связано с высокой рентабельностью в среднем по отрасли. Зачастую в комплексной автоматизации заинтересованы в первую очередь те организации, у которых снижены доходы, и они вынуждены бороться за своё место на рынке путём строгого учета и экономии, которые даёт именно применение автоматизированного учета.

Немалую роль в этой ситуации играет и специфичность отрасли: любая строительная организация нуждается в автоматизации большого количества участков деятельности, при этом необходима их постоянная взаимосвязь. Однако, при достаточной разрозненности участков строительной деятельности, существуют и общие направления, обязательные для автоматизации.

Во-первых, необходим автоматизированный контроль расходов и доходов, позволяющий точно и быстро определить, сколько денег есть и сколько планируется (вперёд на месяц, квартал, полугодие), какова величина затрат, а также – объекты затрат. Т.е. строителям необходимо такое программное обеспечение, которое позволит за короткий период времени достаточно точно рассчитать финансовый результат деятельности предприятия за определенный период времени.

Во-вторых, особого внимания требует контроль расходов, работ и задолженностей в разрезе договоров подряда. Учёт задолженностей заказчиков, исполнение планов подрядчиками, а также поступление денежных средств по договорам – всё это должно найти своё отражение в используемом компанией программном продукте. Причём составление отчетов по этим вопросам не должно вызывать трудностей, а сами отчеты должны иметь возможность перехода к первоначальным документам, если какие-то суммы в отчёте вызывают вопросы.

В-третьих, управление проектной и сметной (для сметной документации достаточно часто используются автономные программные продукты) документацией необходимо рассматривать как расчет необходимых ресурсов для определения расходной части бюджета, т.е. во сколько обойдется весь проект.

Помимо описанных выше процессов в каждой строительной организации ведётся автоматизированный бухгалтерский и кадровый учёты.

Конечно, возможно рассматривать каждую бизнес-ситуацию отдельно, что имеет место в большинстве строительных компаний. Но вообще обойтись без автоматизации невозможно и, чем больше компания, тем большим количеством компьютерных программных продуктов она пользуется. Но зачастую эти программы вообще не связаны между собой, что неизбежно приводит к дублированию вводимой информации. И, как следствие, к потере не только времени, но трудовых и финансовых затрат.

Возможен вариант интеграции разнородных приложений между собой. Но это не только трудоёмко и высокооплачиваемо, нет гарантии, что удастся соединить все программные продукты в единое целое. Именно поэтому большинство строительных компаний всё чаще обращают своё внимание на продукты разработчиков ERP-систем, создаваемых с учётом специфики данной отрасли.

Для полноценного управления предприятием в современных условиях необходимо использование корпоративных информационных ERP-систем с богатым учетным и аналитическим функционалом, таких как, например, «1С: Предприятие 7.7», «1С: Предприятие 8» или ПК «Галактика».

Галактика ERP, модуль «Управление строительством» имеет возможность управления затратами, договорами, проектами, снабжением, составлением смет и многое другое. Автоматизация учета в ПК «Галактика» осуществляется настройкой и ведением множества аналитик (групп объектов учета): системных (встроенных таблиц базы данных) и пользовательских (создаваемых для потребностей детализации учета самим пользователем). Богатейший функционал ПК «Галактика» по карману крупным преуспевающим предприятиям. На средних и мелких предприятиях популярность имеют системы автоматизации на базе «1С: Предприятие 7.7» и «1С: Предприятие 8». Их функционал зависит от творческих доработок программистами типовых конфигураций, адаптированными для законодательства Республики Беларусь ЗАО «МиСофт» и ОДО «Юкола-Инфо». Типовые российские конфигурации, развиваемые фирмой «1С» централизованно, намного богаче по своим функциям и полностью отвечают потребностям в учете российского предприятия. Совсем новые решения в направлении автоматизации бухгалтерского, налогового и других форм учета предлагает «1С: Предприятие 8» в конфигурации «1С: Подрядчик строительства 1.4», ПК «Гектор-строитель». Все эти программные продукты имеют возможность создания интегрированного решения в рамках единой

системы с минимальной интеграцией там, где это необходимо. Имеется возможность автоматической подготовки данных по списанию материалов для использования в программах "ГЕКТОР: СКЛАД-МАТЕРИАЛЫ" и 1С бухгалтерии версии 7.7. Обеспечивается загрузка смет из других сметных программ (ABC, APC, ABePC, WinСмета, Багира); полностью поддерживается блок обмена сметной информацией АРПС, являющейся обязательной при проектировании и строительстве объектов городского заказа. Эти программы автоматизируют не только учёт и отчётность, но и позволяют проводить плановый и финансовый анализ.

Программный продукт "1С: Подрядчик строительства 2.3" предназначен для автоматизации средних и крупных строительных организаций, а также строительных трестов, имеющих структурные подразделения. Применяется в работе финансового, бухгалтерского, частично планового и сметного отделов. Может использоваться в:

1. Головной строительной организации (тресте);
2. Строительном управлении (СУ);
3. Управлении механизации (УМ);
4. Автотранспортном управлении (АТУ);
5. Управлении производственно-технологической комплектации (УПТК).

Для автоматической передачи данных между территориально удаленными подразделениями используется отдельная программа "Управление распределенными информационными базами".

Как правило, выбор делается в пользу ERP-системы, связанной с системами бухучета и сметного планирования либо в пользу нескольких, объединенных между собой программ, каждая из которых решает ту или иную задачу (бухучет, управленческий учет, проектное планирование и контроль, сметное планирование).

Специализированных решений класса ERP для строительной отрасли (систем, полностью автоматизирующих управление ресурсами) на белорусском рынке не так уж и много, а внедрение белорусской адаптации пока идет медленными темпами. Выбор того или иного варианта зависит от масштаба текущей и планируемой деятельности компании и, разумеется, объёма инвестиций, которые она готова вложить в автоматизацию.

Литература

1. Республика Беларусь в цифрах: Крат. Стат. Сб./Министерство статистики и анализа Республики Беларусь. - Мн.:2006.
2. материалы VI Международного конгресса по строительству, сайт WWW.eurocem.ru
3. материалы сайта www.sekachev.ru/index.html
4. Хорнгрен Ч.Т., Фостер Дж. Бухгалтерский учет: управленческий аспект: Пер. с англ./Под ред. Я.В.Соколова. – М.: Финансы и статистика, 2004.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ MS.NET-ПЛАТФОРМЫ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ КОМПОНЕНТОВ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Кузьмицкий Н.Н., Савчук Л.Н.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Движение современного общества к информационному этапу своего развития способствует проникновению средств информационно-коммуникационных технологий во все сферы жизни и деятельности человека, кардинальным образом меняя их. В сфере образования информационные технологии позволяют адаптировать учебный процесс к нуждам каждого учащегося, т.е. появилась реальная возможность перейти от репродуктивного обучения к продуктивному, гуманистическому.

Созданная система автоматизации тестирования и обучения (САТО) предназначена для проектирования диалоговых сценариев, имеющих характер испытания с их последующим проведением и получением подробных результатов, а также обучения.

Программно-технологической основой реализации CATO является .NET-платформа и специализированный для .NET объектно-ориентированный язык программирования C#.

При этом были применены следующие возможности .NET-платформы:

- удобство реализации графического интерфейса Windows.Forms при построения диалоговой структуры программы;
 - использование ADO.NET для взаимодействия с данными, хранящимися в СУБД;
 - использование пространств имен подсистемы GDI+ для представления графической информации;
 - использование многофункционального элемента управления DataGrid в работе с таблицами;
 - удобство .NET для построения и использования многокомпонентных приложений и др.
- CATO представляет собой Windows-приложение, состоящее из взаимосвязанных форм-классов, реализующих следующие режимы работы:

- 1) проектирование - режим преподавателя;
- 2) тестирование (или обучение) - режим учащегося.

Режимы являются равноправными и способны выполняться независимо друг от друга.

Для преподавателя система предоставляет следующие возможности:

- ведение базы, содержащей информацию для организации и проведения процессов контроля и обучения;
- создание разнообразных типов вопросов в их числе: бинарный выбор, выбор "один из многих", множественный выбор, манипулирование объектами (Drag-and-drop), вставка пропущенного слова, установление соответствия на основе графических образов;
- создание сценариев контроля (порядок перехода между вопросами) и обучения (переход между порциями учебного материала - кадрами);
- возможность ограничения времени тестирования (обучения), ответа на конкретный вопрос;
- создание подсказок для ответа на вопрос, прохождения текущего этапа обучения;
- регулирование оценки вопроса по типу (количество баллов за правильный ответ (вариант) на данный вид вопроса) и выражение итогового результата тестирования в процентном отношении максимума баллов к набранному количеству;
- фиксирование результатов контроля (обучения), отчетов прохождения, списков учащихся и вопросов, как на экране монитора, так и на принтере;
- получение статистической информации о пройденном тестировании (обучении) в графической форме;
- создание учетных записей учащихся;
- защита данных индивидуальным паролем преподавателя.

Для организации базы данных использовалась СУБД Microsoft Access 2003. Вся информация хранится в виде отдельных таблиц данных, таких как: Ответы, Вопросы, Результаты, Отчеты и др.

Подключение к базе осуществляется с помощью класса OleDbConnection, основные операции с данными – с помощью объектов OleDbDataAdapter, построенных на основе соответствующих их назначению SQL – инструкциях.

Для непосредственной работы с данными, создания отношений, назначения событий используется класс DataSet, представляющий собой виртуальную динамическую базу. В роли основного средства взаимодействия с ней был выбран элемента управления DataGrid.

При использовании системы преподавателем вариантами работы являются: 1) сценарии; 2) результаты и отчеты; 3) статистика.

Данные варианты реализованы в виде отдельных форм, предоставляющих следующие функциональные возможности:

- 1) создание сценариев контроля (обучения) с помощью элемента управления DataGrid, а также взаимосвязанных и синхронизированных текстовых полей и списков;
- 2) просмотр информации, отфильтрованной на основе представлений DataView по различным признакам и сочетаниям признаков (№Группы, №Сценария и др.);
- 3) печать полученных данных с помощью подключенных библиотек StimulSoft;
- 4) получение дополнительной информации для анализа (в графической форме).

Для учащегося САО предоставляет такие возможности как:

- самостоятельный выбор необходимого сценария;
- прохождение тестирования (последовательные ответы на вопросы сценария);
- обучение (изучение выбранного теоретического материала, представленного в виде серии кадров);
- защита своей учетной записи индивидуальным паролем;
- прекращения тестирования (обучения) в любой момент времени;
- получение результатов и отчетов по прохождению тестирования (вывод информации на экран монитора или в печатной форме).

Следует отметить, что САО может использоваться на любом локальном (клиентском) компьютере. При реализации технологии File Server база данных располагается на сервере.

Используя возможности .NET платформы, можно модифицировать программу для технологии Client Server, для этого достаточно, чтобы на пользовательских компьютерах был установлен браузер, а на сервере - Web Server IIS (при этом будет реализовываться технология ASP.NET).

Таким образом, для повышения эффективности обучения и контроля была создана система автоматизации тестирования и обучения, которая может найти свое применение в образовательном процессе школы и вуза.

САО позволяет индивидуализировать процесс обучения, качественно и быстро проверить знания учащихся практически по любому предмету.

Литература

1. Гарнаев, А. Ю. Самоучитель Visual Studio .NET / А. Ю. Гарнаев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 688 с.
2. Петрусос, Е. Эффективная работа: Visual Basic .NET / Е. Петрусос. – СПб.: Питер, 2002. – 928 с.
3. Троелсен Э. С# и платформа .NET / Э. Троелсен – СПб.: Питер, 2005. – 796 с.
4. Шилдт, Г. Полный справочник по С# / Г. Шилдт. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2004. – 752 с.

НЕЙРОМОРФНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕЛОВЕКА

Лежнин А. В.

Марийский государственный технический университет, г. Йошкар-Ола, Россия

Математическое моделирование в настоящее время является одним из самых распространенных методов изучения окружающей среды. Сегодня невозможно представить себе изучение предмета или явления без использования аппарата математического моделирования в том или ином виде.

Под математической моделью понимается совокупность основных свойств исследуемого объекта, описанных на языке математики. Исследование получаемого формального объекта проводится с использованием тех или иных математических методов [1].

Основная цель математического моделирования как метода исследования – планирование и предсказание результатов практических экспериментов, проведение экспериментальных исследований на ЭВМ без привлечения человека, что позволяет решать многие практические и морально-этические проблемы. Для моделирования биологических систем принято использовать функциональные и структурно-функциональные модели [2].

Вследствие увеличения вычислительных мощностей компьютеров в последнее время стало быстро развиваться так называемое нейроморфное моделирование биологических систем.

Под нейроморфными моделями понимают модели биологических систем, построенных на основе искусственных нейронных сетей, дизайн которых основан на особенностях структуры и принципах работы реальных нейробиологических систем.

Зрительный анализатор человека – сложная многоуровневая структура, обладающая множеством параметров, при отсутствии полной информации о функционировании всех его составляющих. Известно множество моделей зрительного анализатора, в которых, в основном, используется метод передаточных функций, который позволяет определить взаимосвязь входного и выходного сигнала для каждого нейронного звена.

Предлагается использовать принципы нейроморфного моделирования для исследования инерционных свойств зрительной системы. В качестве модели единичного нейрона сети необходимо использовать модель, учитывающую временные задержки, которые характерны для каждого нейрона зрительного пути, а именно: задержки при передаче информации через синапсы дендритам, прохождении сигналов в дендритах, генерации импульса в соме, прохождении сигналов в аксоне.

Литература

1. Ашихмин, В.Н. Введение в математическое моделирование / В.Н. Ашихмин, М.Б. Гитман, И.Э. Келлер, О.Б. Наймарк, В.Ю. Столбов, П.В. Трусов, П.Г. Фрик. – М.: Логос, 2005. – 440 с.
2. Кадыров, Х.К. Синтез математических моделей биологических систем / Х.К. Кадыров, Ю.Г. Антонимов. – Киев: Наукова думка, 1974. – 223 с.

СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО БИЗНЕСА В РЕСПУБЛИКЕ БЕЛАРУСЬ

Лозовский А.В.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Широкое распространение электронного оборудования и средств коммуникации привело к необходимости планировать эффективное его использование для достижения различных целей. В частности, информационные технологии предоставляют новые возможности для решения задач управления производством. В данной работе мы излагаем некоторые результаты анализа электронного бизнеса на территории Республики Беларусь.

Согласно определению [1] электронный бизнес – это способ извлечения материальной выгоды посредством электронных устройств. Существуют другие определения электронного бизнеса (см., например, [3]).

На основе вышесказанного сформулируем следующее определение: электронный бизнес – это коммерческая деятельность, основанная на использовании новых информационных технологий, главным компонентом которых является Интернет. Интернет-технологии являются одним из основных, но не единственным ключевым аспектом в электронном бизнесе. Кроме того, электронный бизнес является составным компонентом традиционного.

В электронном бизнесе обозначились следующие направления [1]:

Бизнес на интернете (Интернет-провайдинг, контент-провайдинг и сервис-провайдинг).

Бизнес вокруг интернета (поставка технических средств, поставка программных средств).

Бизнес в интернете (интернет-реклама, интернет-магазины, интернет-расчеты и т.д.).

Исходя из вышесказанного и опираясь на источники [2, 4], условно разделим весь электронный бизнес на три категории. К первой категории относится электронный бизнес в рамках одной организации на базе интранет. Основной характеристикой данной категории является то, что электронный бизнес используется только работниками компании для доступа к внутренней информации организации. Вторая категория электронного бизнеса включает взаимодействие двух и более компаний посредством экстранет (под экстранет мы будем понимать внешнюю сеть компаний). При этом каждый субъект электронного бизнеса получает доступ к закрытой от прочих информации партнера. Третья категория – бизнес для потребителей. В Республике Беларусь эта категория развита лучше других и является прозрачной для пользователей.

В подтверждение последнего утверждения проведем анализ состояния электронного бизнеса в Республике Беларусь. Для этого мы выбрали несколько организаций и провели сравнительный обзор их электронных ресурсов. Приведем результаты анализа для СП “Санта-Бремор” (<http://www.santa-bremor.com>), СП ОАО “Газоаппарат” (<http://www.gefest.by>) и Книжного интернет-магазина OZ.by (<http://www.oz.by>).

Первые две организации осуществляют свою деятельность в регионе Брест. Состояние их электронных ресурсов характерно для производственных предприятий Республики Беларусь. Перечислим наиболее характерные свойства этих ресурсов. Сайты производственных предприятий являются преимущественно информационными. Они содержат информацию о характеристиках продукции, адресах и контактных телефонах, истории и структуре предприятий и др. На указанных сайтах отсутствуют интернет-магазины и это значительный минус предприятий, так как они могли бы расширить аудиторию клиентов. На данных ресурсах нет информации, открытой для партнеров предприятия и закрытой для всех остальных. Таким образом, указанные ресурсы являются информационными и рекламными. Следовательно, электронный бизнес на перечисленных предприятиях, как и на подавляющем числе предприятий РБ, находится на первом этапе — “присутствия” [3] и развивается в первом направлении “бизнес на интернете” [см. выше].

Совсем по-другому выглядит ситуация с ресурсом OZ.by. Книжный магазин OZ.by находится на рынке восемь лет [см. на сайте]. В электронном бизнесе данной организации присутствуют элементы менеджмента – это весомое преимущество данного магазина. Электронный бизнес этого предприятия находится на довольно высоком уровне — этапе “взаимодействие” [3] и развивается в третьем направлении — направлении “Бизнес в интернете” [см. выше].

Несмотря на очевидные преимущества, в Республике Беларусь существует ряд причин, по которым невозможно полноценное развитие электронного бизнеса. Наиболее значимой является то, что Республика Беларусь — страна, недостаточно компьютеризированная на уровне персональных пользователей. По данным американских исследований, электронная торговля товарами народного потребления является выгодной при условии, что пользователями Сети являются 12% населения страны [4]. Что касается количества белорусских пользователей Сети, то их численность на данный момент составляет около 150000 [5], что составляет 1,5% населения страны. Этот показатель слишком мал для того, чтобы можно было говорить о выгодности электронной коммерции. В этом состоит одна из основных причин отставания Республики Беларусь и других стран СНГ от экономически развитых стран.

Среди других причин, сдерживающих развитие электронного бизнеса в Республике Беларусь, укажем слабую инфраструктуру связи и телекоммуникаций, состояние электронной платежной системы (недостаточно развитая и безопасная, большинство интернет-магазинов вынуждено работать по принципу доставил — получил наличные), низкий уровень доверия клиентов, недостаточно развитая законодательная база, регулирующая электронный бизнес, отсутствие технических средств для осуществления электронного бизнеса у предприятий.

Отличительной особенностью Республики Беларусь является также практически полное отсутствие работающих систем “B2B”. На конец 2006 года число зарегистрированных интернет-магазинов составляло около 400, а количество активных около 100 [5, 6]. В целом Республика Беларусь идет по традиционному пути.

В числе успехов электронного бизнеса на территории страны укажем: введение услуг sms- и internet-банкинга (<http://www.belarusbank.by>, <http://www.priorbank.by> и др.) практически всеми банками Республики Беларусь. На сайтах мобильных операторов (<http://www.mts.by>, <http://www.velcom.by>) государства стало возможным быстро и удобно управлять услугами абонента, следить за состоянием счета, получать детализацию звонков и др. Появилась торговая площадка Shop.by, на которой действует около сотни интернет-магазинов, осуществляющих продажу разнообразных товаров и доставку по территории Республики Беларусь. Национальный портал TUT.by становится одним из самых посещаемых ресурсов байнета, данный портал постоянно совершенствуется, добавляются новые разделы и услуги.

Итогом нашего анализа являются следующие выводы:

1. Электронный бизнес в нашей стране прошел этап “присутствия” и становится неотъемлемой частью деятельности организации, при общем отставании от Европы по разным направлениям на два-четыре года [причины отставания см. выше];

2. В Республике Беларусь процесс становления электронного бизнеса протекает достаточно динамично;

3. По некоторым позициям Республика Беларусь имеет шанс опередить Европу, в частности, в области законодательства, так как мы учимся на опыте развитых стран.

4. Электронный бизнес, при грамотном финансировании его развития, принесет значительные прибыли компаниям, решившим использовать его наравне с обычным бизнесом.

Электронный бизнес открывает массу новых возможностей для компании, а одним из главных достоинств является скорость осуществления большинства операций, связанных с ним.

Результатом выполненного анализа стала постановка следующих целей собственной научной работы:

- разработка методик и рекомендаций для исследования эффективности использования новых информационных технологий в деятельности предприятий на территории Республики Беларусь;

- проектирование средств присутствия предприятия в среде электронного бизнеса.

Литература

1. В.А. Грабауров, Информационные технологии для менеджеров — М.: Финансы и статистика, 2005.
2. <http://www.intertech.ru>
3. А.Н. Соколова, Н.И. Геращенко, Электронная коммерция: мировой и российский опыт. — М.: Открытые системы, 2000г.
4. Internet-форум по вопросам развития электронной коммерции <http://www.forum.net/ecommerce/>
5. Белорусский интернет портал <http://www.tut.by> 6. Интернет-площадка <http://www.shop.by>

О ПОДХОДАХ К ПРОЕКТИРОВАНИЮ СИСТЕМЫ АДМИНИСТРИРОВАНИЯ ИЗ КОМПЛЕКСА ТЕСТИРОВАНИЯ ЗНАНИЙ

Люлькович М. С.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Проверка знаний всегда была и остается довольно трудной задачей. Наиболее популярным вариантом выполнения данного вида преподавательской работы в настоящее время является тестирование. Для автоматизации этого процесса нами проектируется и в настоящее время реализуется оригинальная система тестирования теоретических знаний. Нашей частью проекта является система администрирования комплекса тестирования знаний.

Администрирование системы проверки знаний служит для упрощенного доступа к структуре базы данных, для внесения в нее, удаления из нее определенных записей и просмотра ее содержимого. Как-то:

- возможность авторизации, регистрации администратора(-ров);
- редактирование информации об администраторе(-рах);
- редактирование информации о группах пользователей и об отдельных пользователях;
- редактирование информации о группах тестов и об отдельных тестах;
- редактирование информации сборных тестов;
- редактирование информации для формирования содержания бланков тестирования;
- редактирование информации о результатах тестирования.

Для решения поставленных задач нами был выбран сервер MS IIS (5.1 и выше) и база данных MS SQL 2005. В качестве языка кодирования исходных текстов программ используется язык C#, открывающий большие возможности для работы с базами данных, наличие в нем некоторого количества уже готовых компонентов, и позволяющий работать с форматами данных XML и таблицами стилей XSL.

Дополнительно отметим, что в ASP.NET 2.0 появилось новое понятие «провайдеры профилей», API управление членством и ролями.

В качестве основы хранения данных нами выбрано сочетание формата XML и таблиц базы данных. Это необходимо для более простого и удобного представления информации, тем более что объем дополнительной работы при этом возрастает незначительно.

Для разграничения доступа администраторам и преподавателям нами планируется использовать встроенный механизм управления ролями. В этом случае пользователи получают доступ не только от обслуживающей программы администратора, но и от самой операционной системы. Это дает возможность закрывать для просмотра даже обычные каталоги в системе администрирования.

Новые компоненты данной технологии предоставили нам возможность расширить и упростить возможности комплекса тестирования и системы администрирования, в частности. Только элемент управления GridView имеет дополнительную возможность редактирования и удаления записей, фильтрации данных, вывода информации из различных таблиц, разбивку таблиц на страницы, если в этом возникает необходимость и многое другое.

Особое внимание хотелось бы обратить на то, что в проектируемой системе администрирования преподаватели смогут посмотреть историю прохождения определенного теста некоторым студентом, что дает возможность пересмотреть и подтвердить выставленную системой тестирования знаний оценку.

Планируется такая возможность работы разрабатываемого комплекса тестирования, которая в случае аварийного (случайного) разрыва связи с сервером позволила бы продолжить прохождение прерванного сеанса тестирования от точки останова. Данную возможность, а также сохранение всех результатов работы мы собираемся обеспечить системой протоколирования, в которой будут учитываться не только все ответы тестируемого, но и время начала и окончания определенного теста.

В системе тестирования будут реализованы два типа тестов: обычные, сгруппированные по темам и сборные, которые создаются средствами данной компоненты комплекса, несут на себе итоговый характер и состоят из вопросов обычных тестов.

В данном (четвертом) варианте комплекса тестирования мы планируем особое внимание уделить возможностям работы с группами вопросов, объединенных в древовидные структуры (в общем случае с структуры «обычное дерево»). При тестировании с участием групп вопросов, связанных указанным свойством, частично «прописываются» траектории получения очередных вопросов в зависимости от качества ответа на вопросы-предшественники.

Подобными свойствами прежние системы тестирования, разработанные при кафедре ИиПМ БрГУ, не обладали. Планируется, что в анонсируемой системе тестирования такие вопросы будут храниться аналогично обычным. Порядок же «выдачи» вопросов будет определяться, с одной стороны, при формировании теста - в него будет включаться избыточное количество вопросов в случае попадания в конкретный тест вопросов, связанных в древовидную структуру; а с другой – конкретным качеством ответов тестируемого.

В составе комплекса проектируемая нами система и технология ASP.NET, по нашему мнению, поставит ее (систему), если не выше, то хотя бы на тот же уровень уже с существующими системами, испытанными практикой использования на математическом факультете БрГУ.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПАРКОВОК С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ ВИДЕОНАБЛЮДЕНИЯ

Науменко Д.Ю.

Брестский государственный технический университет, г.Брест

Введение

Республика Беларусь переживает бурную автомобилизацию, причем рост числа автомашин значительно опережает темпы строительства новых дорог. Являясь одним из показателей благосостояния общества, высокая автомобилизация влечет за собой всё больше негативных последствий, особенно в крупных городах. При чрезмерно высокой плотности транспортных средств, скорость движения снижается настолько, что автомобиль полностью утрачивает одно из важнейших своих достоинств - динамичность. Обеспечение быстрого и безопасного движения в современных городах требует применения целого комплекса мероприятий архитектурно-планировочного и организационного характера. К числу архитектурно-планировочных мероприятий относятся: строительство новых и реконструкция существующих улиц, многоуровневых транспортных развязок, подземных и надземных пешеходных переходов, объездных дорог вокруг городов для отвода транзитных транспортных потоков и т.д. Организационные мероприятия способствуют упорядочению движения на уже существующей улично-дорожной сети. При реализации таких мероприятий особая роль принадлежит внедрению технических средств регулирования с применением ЭВМ, средств автоматики, телемеханики, диспетчерской связи и телевидения для управления движением в масштабах крупного района или целого города. Одной из наиболее назревших проблем в этой области является организация и управление парковками автотранспорта. Даже при наличии специально организованных парковочных стоянок типичной ситуацией является то, что при въезде на территорию многорядной открытой парковки водители не в состоянии увидеть расположение свободных мест. В результате водители вынуждены искать место без каких-либо ориентиров. Возникающее при этом беспорядочное движение создает излишний трафик и соответственно заторы.

Данная работа рассматривает один из подходов к решению проблемы парковок автотранспорта с использованием систем видеонаблюдения.

1 Структура и характеристики современной системы видеомониторинга автотранспорта

Анализ задач, стоящих перед автоматизированными системами видеомониторинга автотранспорта в Республике Беларусь, позволил сформулировать следующие требования к функциональным характеристикам системы (рис. 1):

- возможность обнаружения автомобиля на динамическом изображении (последовательности кадров);
- распознавание класса и габаритов обнаруженного автомобиля (мотоцикл / легковой автомобиль / грузовик или автобус);

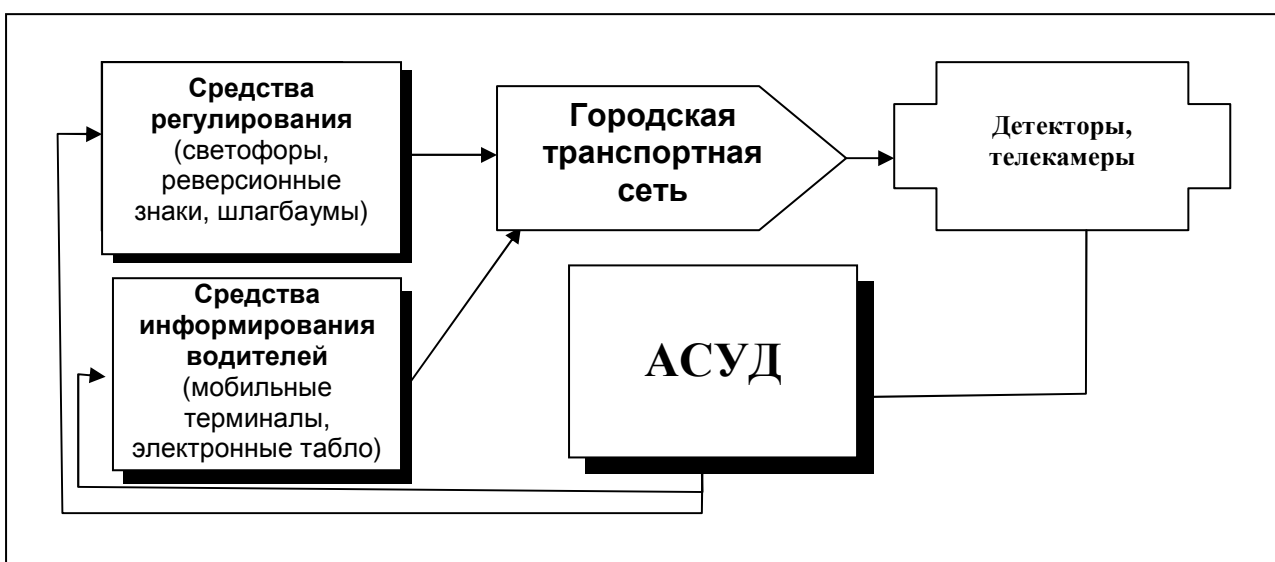


Рис. 1. Структура средств автоматизированной системы управления движением (АСУД)

- определение координат обнаруженного автомобиля;
- определение скорости обнаруженного автомобиля;
- определение события «остановка автомобиля в зоне наблюдения»;
- определение события «начало движения автомобиля в зоне наблюдения»;
- обнаружение автомобиля на статическом изображении (отдельном кадре);
- сопровождение движущихся автомобилей при их переходе из зоны наблюдения одной телекамеры в зону наблюдения другой телекамеры (при условии, что зоны наблюдения телекамер пересекаются, а переход совершен в зоне пересечения);
- согласованная работа обзорной телекамеры, дающей общий вид определенного участка, и PTZ-телекамеры, которая может наводиться на отдельный объект для распознавания государственного регистрационного номера.

Повышение качества телекамер, увеличение быстродействия вычислительных платформ, развитие алгоритмов анализа изображений позволяют создавать системы мониторинга с принципиально новыми возможностями и потребительскими качествами.

Рассмотрим в рамках АСУД отдельно подзадачу управления парковками автотранспорта.

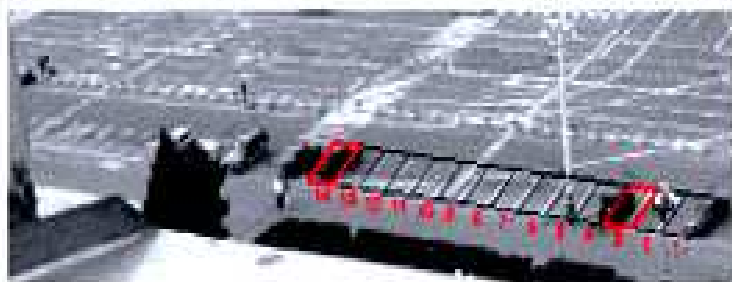
2 Мониторинг парковок на основе современных систем видеонаблюдения

Основное назначение модуля мониторинга парковок - автоматически контролировать свободные и занятые места на парковочной стоянке (рис. 2).



Рис. 2. Определение свободных и занятых парковочных мест на видеоизображении

Модуль принимает изображение с телекамер, дающих общий вид открытой стоянки, и находит на нем автомобили. В систему заложена схема автостоянки, т.е. разметка, показывающая, где должны стоять автомобили. Когда автомобиль встает на такое место, сис-



тем автоматически определяет, свободен ли этот участок, и сообщает об этом оператору.

тема автоматически определяет, что оно занято. Водитель, который подъезжает к парковке, может видеть на мониторе, расположенном при въезде или даже у него в салоне, схему стоянки, на которой он сразу найдет свободные места. Когда видеодетектор обнаруживает движение в кадре, он помечает то место, каким-либо знаком. Если объект перемещается, детектор следит за объектом. Система не воспринимает это как движение определенного предмета. На каждом шаге она заново детектирует движение и отмечает то место, где это происходит. При таком слежении весьма востребована поворотная телекамера. Система определит координаты объекта, за которым ведется слежение, направление и скорость его движения. Она будет передавать телекамере команды, а телекамера держать объект в кадре.

В основе детектирования движения лежат три базовых метода:

1. *Сравнение двух последовательных кадров.* Яркость каждого пикселя из одного кадра вычитается из яркости пикселя, имеющего те же координаты и входящего в другой кадр. Те участки, в которых произошло значительное изменение яркости, провозглашаются движущимися.

2. *Вычитание фона.* Если навести телекамеру на объект, то изображение, полученное в тот момент, когда в кадре ничего нет, можно считать фоном. При работе детектора этот фон вычитается из каждого вновь получаемого кадра.

3. *Оптический поток.* Представляет собой сумму векторов изменения местоположения некоторого объекта на последовательных кадрах видеоизображения. Там, где поток имеет большую величину, движение присутствует. Другой вариант – сравнивать части изображений, взятые из разных кадров, а по пространственным гармоникам. Каждый участок изображения раскладывается в ряд, т.е. представляет как сумму периодических функций. Если после разложения коэффициенты при этих функциях получились одинаковые, значит это один и тот же объект, который смещается от кадра к кадру.

3 Возможные проблемы и пути их решения

Для обеспечения приемлемой вероятности правильного распознавания автором, с учетом возможностей современных камер видеонаблюдения, проанализированы следующие возможные проблемы и пути их решения:

1. Детектирование «ложного» движения (например, блики от солнца, движение листвы на ветру, рябь на воде и пр.). Для решения подобных вопросов предлагается на этапе обработки изображения вводить нижний порог чувствительности: если изменение яркости изображения меньше порога, то детектор на это изменение не реагирует. Еще один метод борьбы с эффектами типа «дрожание листвы» - автоматическое выделение периодических во времени процессов и вычитание их из изображения.

2. Контроль минимального размера регистрируемого объекта. Его назначение - обозначить круг объектов, появление которых должно приниматься во внимание системой. Варьируя порогом чувствительности, можно абстрагироваться от появления в кадре мелких животных и пр.

3. Контроль за расстоянием между объектом и телекамерой.

4. Контроль за максимальной скоростью предметов, которые будут обнаружены.

Литература

1. <http://www.secnews.ru/articles/2236.html>
2. <http://www.itv.ru/products/Auto-Intelligence/>

ПРИМЕНЕНИЕ ЯЗЫКА JAVA ДЛЯ РАЗРАБОТКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ

С.Н. Нестеренков

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск

В настоящее время информационные технологии являются неотъемлемой составляющей прогресса во всех сферах общественного развития. От уровня их развития во многом зависит конкурентоспособность отдельных организаций и отраслей, регионов и стран в целом.

Повышение эффективности деятельности организации определяется, в значительной мере, его возможностями по доступу, хранению и качественной обработке информации, отражающей все сферы его функционирования. Такие возможности реализуются в современных корпоративных информационных системах, создающих открытое информационное пространство, основанное на общепринятых стандартах, и обеспечивающих эффективное использование разнородных информационных ресурсов в процессе принятия решений.

Наиболее интенсивно развиваются информационные технологии управления, в основе которых лежит технология «клиент-сервер», предполагающая два информационно-программных слоя:

- корпоративное пространство, содержащее интегрированную информацию и корпоративные правила (сервер);
- пользовательскую среду, содержащую аналитические и интерфейсные блоки, индивидуальные решающие правила и технологии поддержки субъективных решений (клиент).

В последние годы широкую популярность завоевывает трехуровневая технология «клиент-сервер», с использованием так называемого «тонкого» клиента. В ней предполагается три уровня программного обеспечения: уровень пользовательского интерфейса (клиент), уровень бизнес-логики и обработки данных (сервер приложений), СУБД, в которой хранятся данные, с которыми работает сервер приложений (сервер базы данных). Дополнительное преимущество заключается в том, что трехуровневая архитектура довольно естественно отображается на среду Web, где Web-браузер выполняет роль «тонкого» клиента, а Web-сервер – сервера приложений.

С точки зрения разработки прикладного программного обеспечения, Web оказал огромное влияние на разработку средств доступа к информационным ресурсам. Основным здесь является отказ от программирования интерфейсов пользователя, что составляло львиную долю времени работы программистов. Теперь таким универсальным интерфейсом пользователя стал браузер. Требования к квалификации разработчиков резко снизились. Фактически, нужно уметь только работать со стандартными потоками ввода/вывода. Таким образом, был сконструирован универсальный способ построения сетевых информационных систем, не зависящих от платформ.

Доступ клиентов из Интернета или корпоративной сети бесспорно является наиболее простым способом доступа многих пользователей к данным и ресурсам.

На использовании трехуровневой архитектуры базируется Интегрированная информационная система (ИИС) БГУИР, которая включает в свой состав множество подсистем, различающихся по своему функциональному назначению и форме представления данных.

Все подсистемы работают с единой разделяемой базой данных, вследствие чего проблема доступа к данным других подсистем снимается. Использование разделяемых

данных соответствует общему подходу к построению единой информационной системы университета и обеспечивает актуальность хранящихся и используемых данных.

Например, подсистема «Управление учебным процессом» предназначена для автоматизации работы учебно-методического управления вуза. Она включает:

- формирование и учет базовых и рабочих планов;
- формирование и учет перечней дисциплин специальностей и специализаций; формирование учебных планов групп студентов и формирование потоков для чтения дисциплин;
- формирование учебной нагрузки на кафедру и факультет;
- ведение архива данных о рабочих планах;
- раздел планирования и организации учебного процесса, в который входит планирование аудиторной и внеаудиторной педагогической нагрузки образовательного учреждения, его подразделений и преподавателей.

Подсистема «Управления учебным процессом» входит в состав ИИС БГУИР, занимая главное место в структуре вуза.

За последние годы интерес к Java был обусловлен не особенностями его как языка программирования, а появлением таких технологий, как J2EE (Java 2 Enterprise Edition), включая JSP (Java Server Pages), J2ME (Java 2 Micro Edition), и ряда других спецификаций, сделавших Java популярной платформой для создания корпоративных решений поддерживаемой почти всеми производителями ПО. Основная сфера применения Java - это приложения масштаба предприятия и распределенные системы, создаваемые коллективом разработчиков.

С появлением языка программирования Java стало можно создавать распределенные Web-приложения и одновременно решать наиболее серьезные клиент-серверные проблемы при помощи новых возможностей:

- ограниченные взаимодействия. Web-модель запрос/ответ обладает всеми характеристиками терминальной разработки. Пользователь вводит информацию в форму, выполняет запрос и получает ответ;

- архитектуры, не использующие общие ресурсы. Основанная на сервлетах модель программирования не сохраняет состояния. Это означает, что один сервлет может обслуживать любого клиента, а фиксированный пул сервлетов может обслуживать намного большее число клиентов. Нет необходимости резервировать сервлет для каждого пользователя;

- общие стандарты для клиентов. Развернув общий браузер у всех клиентов, можно создать один интерфейс и взаимодействовать практически со всеми клиентами. Поддержка многих браузеров проблематична, но это не так трудно, как поддержка родных библиотек пользовательских интерфейсов. Многие проблемы переносимости просто исчезли;

- более совершенная модель развертывания. Используя браузер в качестве стандартного клиентского приложения, стало намного проще распространять разработки. Компания может развернуть приложение на паре Интернет-серверов и предоставить доступ к ним для всего предприятия. Сетевая архитектура может распределять запросы по нескольким серверам, поэтому увеличить мощность стало так же просто, как установить еще один сервер. Развертывание на стороне клиента является настолько простым, что сводится к проверке установки у клиента нужного браузера. Обслуживание значительно упростилось.

Производительность, масштабируемость и переносимость - эти факторы сыграли определяющую роль при выборе технологии Java-сервлетов при построении корпоративной интегрированной информационной системы БГУИР.

Таким образом, с развитием Web Java заняла достойное место в разработке корпоративных распределенных приложений.

РАЗРАБОТКА РЕГИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Печко Е.В.

Белорусский государственный экономический университет, г. Минск

Для обеспечения устойчивого развития региона необходима мобилизация внутреннего ресурсного потенциала, улучшения качественных параметров социо-эколого-экономической системы региона. Возникает необходимость проведения системного анализа и целенаправленных аналитических исследований для своевременного выявления и решения возникающих проблем. Однако процесс принятия управленческих решений характеризуется сложностью реальных проблем, стоящих перед органами власти, при этом приходится обрабатывать большие объёмы экономической информации, что зачастую превышает возможности человеческого мозга по восприятию и анализу.

Обеспечить информационную поддержку выработки и обоснования управленческих решений призваны системы поддержки принятия решений (СППР) – функционально-интегрированные комплексы средств автоматизации, математического, программного и информационного обеспечения, предназначенные для автоматизации процессов выбора и обоснования решений при управлении [1].

Для обеспечения устойчивого развития региона необходима мобилизация внутреннего ресурсного потенциала, улучшения качественных параметров социо-эколого-экономической системы региона. Возникает необходимость проведения системного анализа и целенаправленных аналитических исследований для своевременного выявления и решения возникающих проблем. Однако процесс принятия управленческих решений характеризуется сложностью реальных проблем, стоящих перед органами власти, при этом приходится обрабатывать большие объёмы экономической информации, что зачастую превышает возможности человеческого мозга по восприятию и анализу.

Обеспечить информационную поддержку выработки и обоснования управленческих решений призваны системы поддержки принятия решений (СППР) – функционально-интегрированные комплексы средств автоматизации, математического, программного и информационного обеспечения, предназначенные для автоматизации процессов выбора и обоснования решений при управлении [1].

Предлагается при построении информационно-аналитической системы управления экономическим развитием региона сочетать в себе возможности, предоставляемые как СППР (комплекс средств хранения и анализа данных, связанных единой методологией), так и экспертными системами (генерация решений на основе имеющихся знаний о предметной области и процедур вывода) [2].

Разрабатываемая нами для Брестской области система относится к классу полнофункциональных систем анализа и исследования данных (DSS), предполагает использование технологий хранилищ данных, систем оперативной аналитической обработки данных (OLAP) и средств интеллектуального анализа данных (Data Mining).

В основе разрабатываемой СППР лежит представление региона как слабоструктурированной системы, которая допускает как вертикальную декомпозицию («центр» – «регион»), так и горизонтальную (блоки производственной, финансовой сферы, населения, экологии и т.д.).

Каждое звено в цепочке «анализ – прогноз – выработка стратегии – достижение искомой цели» базируется на сбалансированной по показателям системе экономико-математических моделей. Так, например, главной целью мониторинга социально-экономических процессов является сбор, изучение и подготовка информации для принятия управленческих ре-

шений на различных уровнях иерархии управления. Отвечающая за это система анализа социально-экономического развития (СЭР) региона должна быть многоуровневой и базироваться на соответствующем математическом инструментарии: методиках индексного и индикативного анализа, методах математической статистики, методе динамического норматива и др. [3, 4]. Помимо этого, вычислительное ядро СППР должно позволять пользователю создавать модели разных типов (имитационные, когнитивные и т.д.), проводить вычисления и визуализировать результаты расчетов с помощью средств деловой графики, картограмм и картодиаграмм.

Процесс принятия решения с помощью разрабатываемой СППР разбивается на ряд этапов (см. рис.).

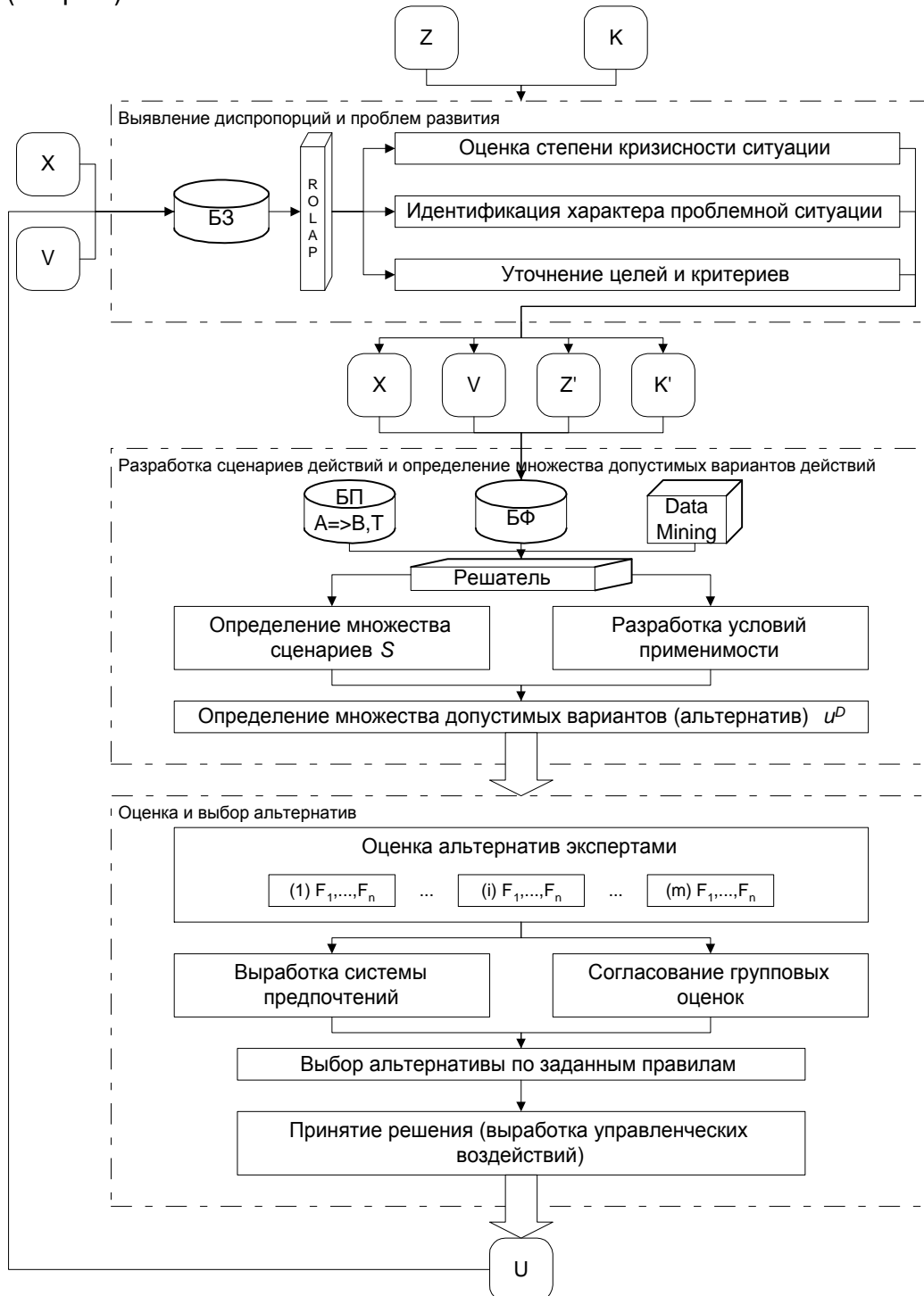


Рис. 1. Процедура принятия решений с помощью разрабатываемой СППР

Входными параметрами задачи выработки управленческих решений являются:

- данные мониторинга X ,
- данные о внешних воздействиях V ,
- множество целей $Z = \{z \mid z \rightarrow P\}$, достижение которых будет означать решение проблемы,
- множество критериев $K = \{k \mid k \rightarrow Z\}$, которые позволяют получить комплексную оценку степени достижения определенной цели.

Подсистема оперативной аналитической обработки (ROLAP) выявляет противоречия между целями, ресурсами и структурой, а также идентифицирует характер проблемной ситуации (временный или хронический). С учетом выявленных проблем и диспропорции развития корректируются цели (Z') и пересматривается набор критериев достижения поставленных целей (K'). Содержимое рабочей памяти СППР представляет собой базу фактов (БФ).

Составление сценариев развития возможно как с использованием экспертной информации, так и автоматически – с использованием накопленной в системе информации (БП) и информации, полученной в результате применения инструментов интеллектуального анализа данных (Data Mining).

Каждый сценарий s из множества возможных сценариев $S = \{s \mid s = \{u, v, k, t \mid u \in U, v \in V, k \in K, t \in T\}\}$ представляет собой совокупность действий U , внешних воздействий V , оценок последствий действий по критериям K и набор решающих правил перехода T по узлам дерева сценария.

Анализ сценариев и определение множества допустимых альтернатив управляющих воздействий u^D и их оценка также происходит либо с непосредственным участием эксперта(-ов), либо в автоматическом режиме (выбирается лучшая альтернатива, которая и выдается системой в качестве рекомендации).

Затем проводится оценка эффективности управления и оценка соответствия выполнения принятых решений намеченным целям. Оценивая таким образом эффективность применения какого-либо управленческого решения в рамках реализации выбранной стратегии, лицо, принимающее решения (ЛПР), сможет «отсеять» заведомо неэффективные решения, а также предвидеть возможные негативные последствия. Принимая решения на основе оценки их ресурсоемкости и степени достижения цели, ЛПР будет действовать на основании принципа мягкого резонансного управления – перевод управляемой системы из одного качественного состояния в другое с минимальными затратами ресурсов, времени и усилий [5].

Таким образом, разрабатываемая система позволит не только проводить комплексный анализ СЭР Брестской области, своевременно выявлять диспропорции между основными составляющими потенциала региона, а также в системе «цели – ресурсы – структура», но и даст возможность рассматривать сложившуюся ситуацию системно, получая необходимую для принятия решения информацию непосредственно из математических расчетов.

Литература

1. Железко Б.А., Морозевич А.Н. «Информационно-аналитические системы поддержки принятия решений». - Мн., 1999.
2. Бирин В.С., Асанович В.Я. Интеллектуальная информационная система поддержки принятия управленческих решений.
3. Состояние и перспективы развития экономики России и Республики Беларусь в рамках союзного государства/ под ред. А.И. Татаркина, А.А. Куклина. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2001. – 536 с.
4. Соколов Д.В. Основы организационного проектирования – СПб, Изд-во СПб ГУЭФ, 1996.
5. Прангишвили И. Об эффективности управления сложными социально-экономическими системами /И. Прангишвили//Проблемы теории и практики управления. – 2006. – №2.

NUMERICAL SIMULATION OF FLUID FLOW AND MASS TRANSPORT USING LATTICE-BOLTZMANN METHOD

Pavel Viktoravich Prybytak
Belarusian state university, Minsk

Introduction

The development of novel numerical methods for applications in computational fluid dynamics (CFD) has made rapid progress in recent years. The traditional approaches of CFD are based on solve the Navier-Stokes equations by some direct discretisation. In contrast to that, the lattice-Boltzmann method (LBM) uses a more rigorous description of the transport phenomena, the Boltzmann equation. Compared to other methods, the LBM makes use of several significant physically motivated simplifications that allow to construct more efficient computational codes as compared to the classical approaches. Thus, the LBM have attracted a lot of attention in the fluid dynamics community and emerged as an attractive alternative in many application areas.

Lattice-Boltzmann hydrodynamics

Historically, the lattice Boltzmann approach developed from lattice gases [1], In lattice gases, particles live on the nodes of a discrete lattice. The particles jump from one lattice node to the next, according to their (discrete) velocity. Then, the particles collide and get a new velocity. Hence the simulation proceeds in an alternation between particle propagations and collisions [3]. It can be shown that lattice gases solve the Navier-Stokes equations of fluid flow [4].

The general form of the lattice Boltzmann equation is

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{u}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{r}, t) + \Omega_i \quad (1)$$

where the f_i is the concentration of particles that travels with velocity \mathbf{u}_i . With the discrete velocity \mathbf{u}_i the particle distributions travel to the next lattice node in one time step Δt . The collision operator Ω_i differs for the many lattice Boltzmann methods, in the Bhatnager-Gross-Krook form can be written as [4]:

$$\Omega_i = \frac{1}{\tau} (f_i(\mathbf{r}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{r}, t)) \quad (2)$$

Where $f_i^{eq}(\mathbf{r}, t)$ is the equilibrium distribution, and τ is the relaxation parameter

The equilibrium distribution $f_i^{eq}(\mathbf{r}, t)$ is a function of the local density ρ and the local velocity \mathbf{u} . These are the first and second order moments of the particle distribution as,

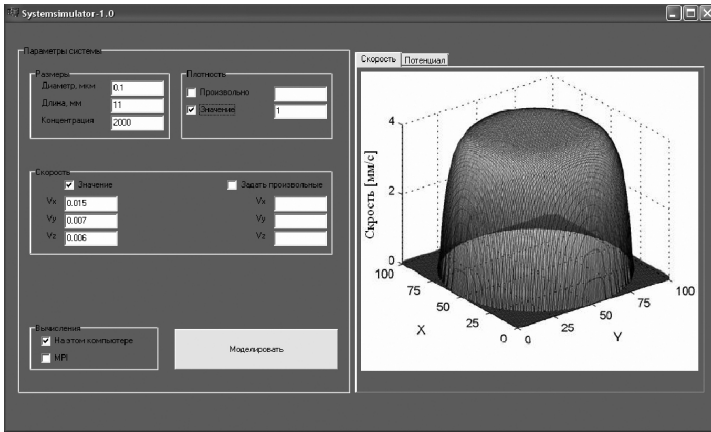
$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_i f_i(\mathbf{r}, t) \quad (3)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{r}, t)} \sum_i \mathbf{u}_i f_i(\mathbf{r}, t) \quad (4)$$

The equilibrium density $f_i^{eq}(\mathbf{v}, \rho)$ is calculated as

$$f_i^{eq}(\mathbf{v}, \rho) = w_p \rho \left[1 + \frac{(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v})}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{v}^2}{2c_s^2} \right] \quad (5)$$

in which c_s is the speed of sound, the index $p = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i$ and w_p is the corresponding equilibrium density for $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. For the three-dimensional, nineteen velocity lattice (D_3Q_{19}) that we have used in our simulations, $w_0 = 1/3$ (rest particle), $w_1 = 1/18$ (particles streaming to the face-connected neighbours) and $w_2 = 1/36$ (particles streaming to the edge-connected neighbours) [2].



Numerical simulation

For LBE-study purposes in C++ Builder 6 modeling program was developed and electroosmotic flow (EOF) in an open-straight, cylindrical capillary with homogeneous and smooth surface was simulated.

Figure 1. Modeling program work window

Results

Because there is no general analytical solution available for the EOF problem in a cylindrical capillary, the simulated velocity field was compared with another one obtained by numerical solution of the one-dimensional momentum balance equation.

$$\frac{d^2 v_x}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_x}{dr} = \frac{2E_{ext} q_e n_\infty}{\eta_f} \sinh\left(\frac{q_e \Psi}{k_B T}\right) \quad (6)$$

The solution of this equation provides the radial distribution of the axial velocity component of EOF in the cylindrical capillary. Equation (6) was solved with a very fine resolution (2×10^5 points per channel diameter). Further, the use of different capillary radii allowed to realize aspect ratios r_c / λ_D from 10 to 100. Fig. 2. compares the velocity profiles obtained via both procedures.

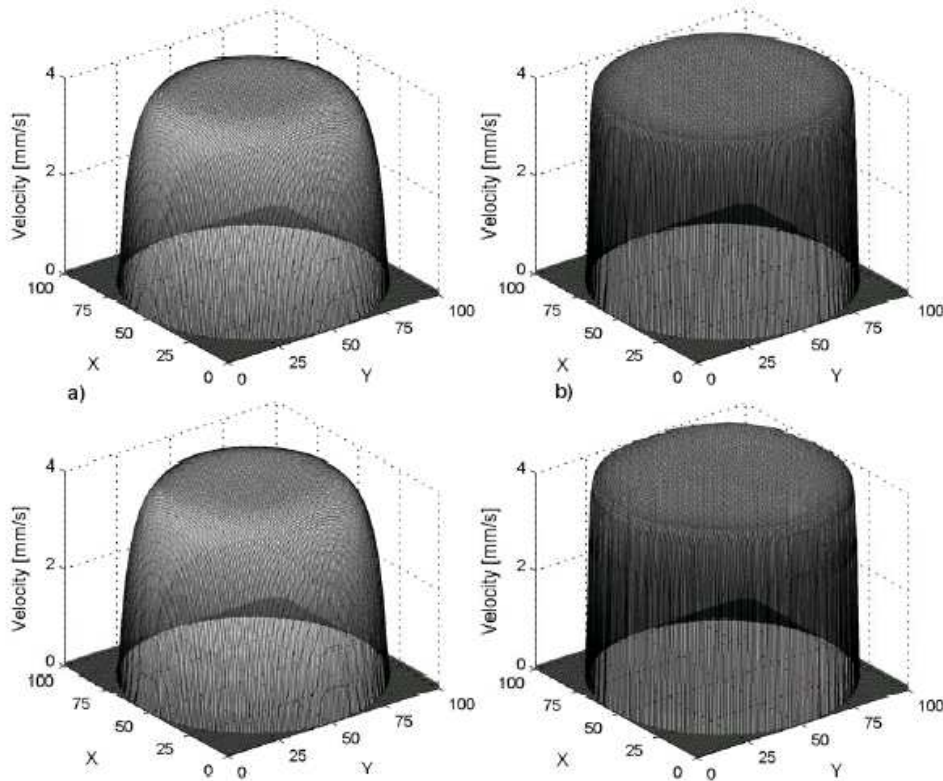


Figure 2. The EOF velocity field in an open-straight, cylindrical capillary with homogeneous and smooth surface: Solution of the momentum balance equation (top) vs. the LB approach (bottom) for a) $r_c / \lambda_D = 10$ and b) $r_c / \lambda_D = 100$.

Accuracy of the LBE approach depends on spatial resolution with respect to the capillary radius, e.g., the use of 100 grid points over one capillary diameter results in γ_{vf} of less than 6% for all aspect ratios.

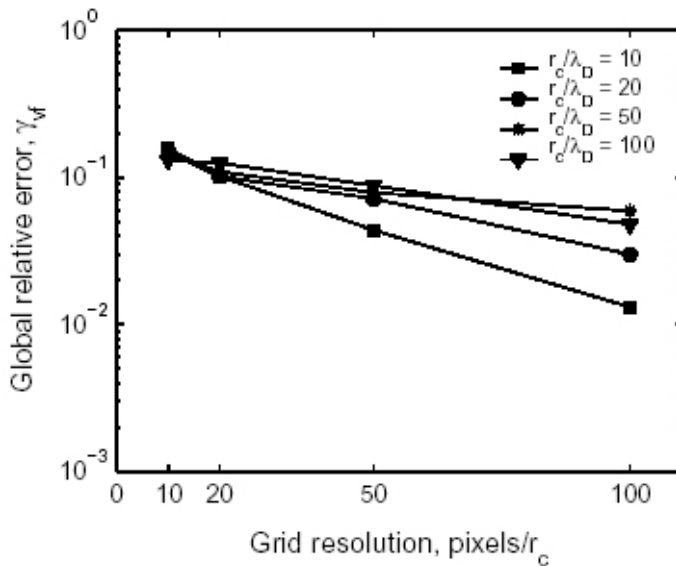


Figure 3. Global relative error of a simulated velocity field (γ_{vf}) relative to the solution of the momentum balance equation

Conclusion

As a result of work the following conclusions have been made:

- 1) LBE-method has been studied
- 2) A modeling program for EOF simulation has been developed
- 3) Derived results have been analysed

References

1. X. He and L.-S. Luo. Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation. *Phys. Rev. E*, 56(6):6811-6817, Dec. 1997.
2. Hlushkou D. Numerical simulation of fluid flow and mass transport in (electro) chromatographic systems, Dissertation – Magdeburg, 2004.
3. A. Masselot and B. Chopard. A multiparticle lattice-gas model for hydrodynamics. *Int. J. Mod. Phys.C*, 9(8):1221-1230, 1998.
4. Y. H. Qian, D. d'Humieres, and P. Lallemand. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation. *Europhys.Lett.*, 17(6):479-484, Jan. 1992.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ КОЛЬЦЕОБРАЗНОЙ ЗАДАЧИ ШЕСТНАДЦАТИ ТЕЛ

Проскура Е.М., Чичурин А.В.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Рассматривается ограниченная кольцеобразная задача с неполной симметрией [1] для шестнадцати тел P_0, P_i ($i = \overline{1,14}$), P с массами m_0, m_i ($i = \overline{1,14}$), μ соответственно. Тела взаимно притягиваются друг другом в соответствии с законом всемирного тяготения и движутся в одной плоскости. При движении тела P_i ($i = \overline{1,14}$) образуют два правильных семиугольника, равномерно вращающихся вокруг тела P_0 с угловой скоростью ω . Угловая скорость вращения точно определяется из условия теоремы Банка-Эльмабсута [2], а также из геометрических и гравитационных параметров модели [2]. Согласно понятию «ограниченная задача трех тел» [3] и интерпретации понятия «ограниченная задача любого конечного числа

тел», данной в работах [4, 5], параметр μ является бесконечно малой величиной. Существование таких динамических моделей доказано в работах [4, 5].

В рассматриваемом гравитационном поле, порождаемом взаимным притяжением пятнадцати тел, и их притяжением на тело P с нулевой массой $\mu = 0$ (такое тело называют пассивно гравитирующим), необходимо исследовать движение этого пассивно гравитирующего тела. Согласно методу Пуанкаре [6] первым этапом исследования таких моделей является определение стационарных решений соответствующих систем дифференциальных уравнений. В нашем случае соответствующая система дифференциальных уравнений в координатной форме примет вид:

$$\mu \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_0}, \quad \mu \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_0}, \quad \mu \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_0}, \quad (1)$$

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad (i = \overline{1,14}), \quad (2)$$

где

$$U(x_0, y_0, z_0, \dots, x_n, y_n, z_n) = \frac{f}{2} \sum_{k=0}^{14} \sum_{i=0}^{14} \frac{m_k m_i}{\Delta_{ki}},$$

$$\Delta_{ki} \equiv \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}.$$

Математическая модель ограниченной задачи шестнадцати тел с неполной симметрией при $p = 2$ описывается во вращающейся системе координат системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = 2\omega \frac{dY}{dt} + \omega^2 X + \frac{\partial U}{\partial X}, \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = -2\omega \frac{dX}{dt} + \omega^2 Y + \frac{\partial U}{\partial Y}, \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial Z}, \quad (3)$$

где

$$U(X, Y, Z) = f \left(\frac{m_0}{\Delta_0} + m_1 \sum_{i=1}^7 \frac{1}{\Delta_i} + m_2 \sum_{j=1}^7 \frac{1}{\Delta_j} \right),$$

$$\Delta_0 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \Delta_i = \sqrt{(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2 + (Z - Z_i)^2},$$

$$X_i = \cos \frac{2\pi(j-1)}{7}, \quad Y_i = \sin \frac{2\pi(i-1)}{7}, \quad Z_i = 0 \quad (i = \overline{1,7})$$

$$\Delta_j = \sqrt{(X - X_j)^2 + (Y - Y_j)^2 + (Z - Z_j)^2},$$

$$X_j = \cos \frac{2\pi(j-1)}{7}, \quad Y_j = \sin \frac{2\pi(i-1)}{7}, \quad Z_j = 0 \quad (j = \overline{1,7}),$$

а ω определяется равенством:

$$\omega_l^2 = \frac{M_0}{|q_{lk}|^3} + \frac{1}{q_{lk}} \left(\sum_{\substack{1 \leq r \leq 2 \\ r \neq l}} m_r \sum_{j=1}^7 \frac{q_{lk} - q_{rj}}{|q_{lk} - q_{rj}|^3} + m_l \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^7 \frac{q_{lk} - q_{lj}}{|q_{lk} - q_{lj}|^3} \right)$$

(l - означает номер окружности, k - номер вершины на заданной окружности, q_{lk} - любую координату точки $P_{l,k}$).

Условия существования точных гамографических решений в задаче взаимнопритягивающихся пятнадцати тел в общей форме записываются с помощью следующих равенств, вытекающих из теоремы Банка-Эльмабсута

$$\omega_l^2 x_{lk} = \frac{m_0 x_{lk}}{(x_{lk}^2 + x_{lk}^2)^{3/2}} + \sum_{\substack{1 \leq r \leq 2 \\ r \neq l}} m_r \sum_{j=1}^7 \frac{x_{lk} - x_{rj}}{\left((x_{lk} - x_{rj})^2 + (y_{lk} - y_{rj})^2 \right)^{3/2}} + m_l \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^7 \frac{x_{lk} - x_{lj}}{\left((x_{lk} - x_{lj})^2 + (y_{lk} - y_{lj})^2 \right)^{3/2}},$$

$$\omega_l^2 y_{lk} = \frac{m_0 y_{lk}}{(x_{lk}^2 + x_{lk}^2)^{3/2}} + \sum_{\substack{1 \leq r \leq 2 \\ r \neq l}} m_r \sum_{j=1}^7 \frac{y_{lk} - y_{rj}}{\left((x_{lk} - x_{rj})^2 + (y_{lk} - y_{rj})^2 \right)^{3/2}} + m_l \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^7 \frac{y_{lk} - y_{lj}}{\left((x_{lk} - x_{lj})^2 + (y_{lk} - y_{lj})^2 \right)^{3/2}}$$

где l - означает номер окружности, k - номер вершины на заданной окружности, q_{lk} - любую координату точки $P_{l,k}$.

Для нахождения всех равновесных решений ограниченной задачи $N = 2n + 2$ тел ($n = 7, p = 2$) требуется решить систему двух уравнений [7]

$$f(x, y) = \omega^2 x - \frac{m_0 x}{\Delta_0^3} + m_1 \sum_{i=1}^7 \frac{x_i - x}{\Delta_i^3} + m_2 \sum_{j=1}^7 \frac{x_j - x}{\Delta_j^3} = 0,$$

$$g(x, y) = \omega^2 y - \frac{m_0 y}{\Delta_0^3} + m_1 \sum_{i=1}^7 \frac{y_i - y}{\Delta_i^3} + m_2 \sum_{j=1}^7 \frac{y_j - y}{\Delta_j^3} = 0,$$

где ω - угловая скорость, с которой вращаются оба семиугольника, (x_i, y_i) ($i = \overline{1,7}$) - координаты вершин первого семиугольника, (x_j, y_j) ($j = \overline{1,7}$) - координаты вершин второго семиугольника.

Неизвестными величинами в этой системе являются x и y . Для решения этой системы воспользуемся алгоритмическими и графическими возможностями системы Mathematica.

Найдены положения равновесия при различных значениях геометрических и гравитационных параметров, приведена их геометрическая интерпретация. Также построены зависимости угловой скорости вращения обоих семиугольников и зависимости массы тел второго семиугольника от массы тел первого семиугольника и расстояния от центрального тела до тел второго семиугольника.

Литература

1. Ихсанов Е. В. Компьютерные методы нормализации гамильтонианов ограниченных задачах небесной механики. - М.: изд-во РУДН, 2004.
2. Bank D., Elmabsout A., Configurations polygonales en equilibre relative // Paris: C.R. Acad. Sci. 2001. Vol. 329. Serie lib. P. 243-248.
3. Албалкин В. К., Аксенов В. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под. Ред. Г. Н. Дубошина. - М.: Наука, 1976.
4. Гребеников Е. А., Козак Д., Якубяк М. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел. М., Изд-во РУДН, 2002.
5. Гребеников Е. А. Существование точных симметричных решений в плоскости ньютоновой проблемы многих тел // Матем. Моделирование. 1998. Т. 10. № 8. С. 74-80.
6. Пуанкаре А. Избранные труды. - М.: Наука, Т. 1, 1971. - 776 с., Т. 2, 1972. - 356 с., Т. 3, 1974. - 773 с.
7. Гадомский Л., Ковальчук И. Р., Чичурин А. В. Построение математических моделей для задач космической динамики в системе компьютерной алгебры Mathematica. - М.: МАКС Пресс. 2007. - 110 с.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОГНОЗОВ ЧИСЛЕННОСТИ И СТРУКТУРЫ НАСЕЛЕНИЯ

Ратобильская Д.В., Сукач Е.И.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, г. Гомель

Демографическое прогнозирование тесно связано с задачами планирования социально-экономических процессов: планирования перспективы производства и потребления товаров и услуг, жилищного строительства, развития социальной инфраструктуры, здравоохранения и образования, пенсионной системы, решение геополитических проблем. Актуальность подобных исследований для Беларуси связана также со сложной демографической ситуацией и поиском возможных путей выхода из нее.

Создана компьютерная модель прогноза структуры и численности популяции (населения). При создании модели был исследован и решен ряд задач: исследованы имеющиеся методы прогноза, их сущность, достоинства и недостатки; произведен анализ и выбор на его основе оптимального метода прогноза; подготовлена структура данных для созданного алгоритма прогноза, на основании которого создана программная модель с удобным и простым пользовательским интерфейсом; проведено тестирование модели (на примере Гомельской области), подтвердившее ее состоятельность.

При создании модели прогноза был использован метод передвижки возрастов или метод компонент для закрытой группы населения для однолетних интервалов при фиксированных и переменных коэффициентах смертности и рождаемости.

Использование метода компонент обусловлено рядом преимуществ этого метода перед другими: он позволяет получать половозрастную структуру населения на прогнозируемый период; дает возможность реализовывать различные варианты прогнозов — при гипотезе о неизменном режиме воспроизводства населения или при гипотезах о различных вероятных изменениях уровней рождаемости и смертности. Цель первого прогноза — оценить возможные последствия длительного сохранения фактической демографической ситуации. Прогнозы с гипотезами о вероятных тенденциях изменения режима воспроизводства позволяют получить нижний и верхний варианты прогнозов, т.е. прогнозы при крайних значениях коэффициентов рождаемости и смертности. Организация метода позволяет успешно использовать полученные прогнозы для сравнения демографических ситуаций как в различных регионах одной страны, так и в различных странах.

Само программное приложение разработано в среде программирования Delphi, что позволило сформировать простой и удобный интерфейс. Использование при моделировании метода компонент задавало строго определенную структуру размещения информации в базе данных программного приложения, которая представляет собой таблицы с данными о рождаемости, смертности и общей численности мужского, женского и всего населения соответственно.

Программная реализация приложения позволяет расширять базу, но данные при этом должны вноситься строго в соответствии со структурой таблиц. Это требование обязательно для правильного расчета.

Отображение данных во время работы приложения можно осуществлять в двух режимах: графическом и табличном. Окно графического отображения снабжено списком строк с индикаторами, позволяющими пользователю делать видимыми требуемые графики и убирать ненужные. Пользователь также имеет возможность сохранять, копировать или печатать полученные результаты.

Практическая значимость созданной компьютерной модели, заключается в возможности быстрого прогнозирования численности и структуры населения, проведения разностороннего анализа на основе полученных результатов. Заложенная в программной модели возможность изменения гипотетических статистических показателей, позволяет также прогнозировать различные варианты развития демографической ситуации, относящиеся как к численности населения, так и деформации его половозрастной структуры.

Проведенное тестирование модели на примере Гомельской области, подтвердило ее состоятельность. Анализ спрогнозированных данных привел к следующим выводам:

Численность населения области будет продолжать уменьшаться по причине естественной убыли.

Продолжится увеличение дисбаланса в распределении населения по полу.

Произойдет некоторый рост числа новорожденных, что связано со вступлением в наиболее активный демографический возраст самой многочисленной на сегодняшний день возрастной когорты.

Что касается численности трудоспособного населения, то в ближайшее 10-летие социально-демографические процессы не окажут на нее резкого воздействия, поскольку имеют долгосрочные последствия. Первоначально на увеличение общей численности лиц трудоспособного возраста будут оказывать влияние два фактора:

1) вступление в эту группу поколения, родившегося в период относительного подъема рождаемости в 80-е годы;

2) выход из нее малочисленных групп населения, родившихся в годы Великой Отечественной войны. Начиная с 15-20 гг. положение будут определять, с одной стороны, малочисленное поколение родившихся в первой половине 90-х годов, с другой - выбывающие из рабочих возрастов более многочисленные послевоенные поколения.

Литература

1. Борисов В. А. Демография: Учебник для вузов 2-е изд., исправленное — М.: Издательский дом NOTABENE, 2001. — 272 с.

ВЫДЕЛЕНИЕ ПРЕДОПРЕДЕЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ НА ГРАФАХ ПРИ МНОГОКРАТНОМ ПОИСКЕ КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ

Ревотюк М.П., Шешко Е.В.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск

В задачах оптимизации управления пространство поиска решений часто формализуемо в терминах графов. На примере классической задачи поиска кратчайших путей рассматривается возможность ускорения поиска решения путем учета априорной информации о пространстве поиска. Выделение предопределенных решений позволит повысить быстродействие процедур, реализующих жадные алгоритмы или алгоритмы с волновым просмотром пространства поиска.

Известно, что при поиске кратчайших путей на нагруженном ориентированном графе $G(N, A)$, где N – множество вершин, A – множество дуг, время построения дерева путей (поиска решения) растет квадратично или, по меньшей мере, при тщательно построенной вычислительной схеме по закону $x \cdot \log_2 x$ с увеличением расстояния x от корня дерева до целевой вершины [1].

Если строится полное дерево путей из любой исходной вершины до всех остальных вершин графа, то время поиска становится характерным параметром графа и реализации алгоритма поиска. Такие случаи оставим далее вне рассмотрения. Однако при задании конечной вершины пути, что требуется достаточно часто, можно ускорить момент ее обнаружения, используя общие свойства искомых путей.

Предварительно отметим, что учет предопределенных решений не потребует существенного изменения форм представления графа. Далее будем полагать, что построение дерева путей идет по волновой схеме однократного просмотра дуг, реализуемой алгоритмом Дейкстры, а граф представлен структурой смежности

$$FSF = \{S_i = \{j : (i, j) \in A\}, i \in N\}. \quad (1)$$

Состояние поиска решения алгоритмом Дейкстры представляется массивом расстояний $D = \{D_i, i \in N\}$, а также очередью вершин $Q = \{Q_i, i \in N\}$, элементы которой упорядочены по текущему значению расстояния от корня дерева.

Обычно в итерационном процессе развития дерева кратчайших путей из заданной вершины основное время построения дерева составляют итерации цикла, в теле которого последовательно выполняются:

выборка очередной вершины из очереди вершин, упорядоченных по значению расстояния;
 развитие дерева из вершины, когда для всех ее выходных дуг выполняется процедура релаксации с включением новых вершин в очередь.

Можно заметить, что каждая дуга окончательного дерева, как минимум, один раз будет представлена в очереди вершин. Однако некоторые дуги в очереди побывают строго один раз, что и предлагается учесть для ускорения поиска решения.

Известно, что любая часть кратчайшего пути является кратчайшим путем [3]. Отсюда следует, что для каждой вершины графа возможно предварительное выделение входных дуг минимальной длины:

$$T_j = (i, j) : i = \arg \min_{i,j} \{w(i, j) : (i, j) \in A\}, j \in N. \quad (2)$$

Очевидно, что в случае ветвления процесса через подобную дугу значение расстояния до ее конечной вершины не изменится. Такую вершину можно не включать в очередь, а сделать еще один шаг вперед. Как следствие, количество операций над очередью сокращается.

Можно показать, что, используя только множество T_j , следующий шаг планировать нельзя. Однако очевидно, что часть альтернатив ветвления из вершины i не попадет в очередь, а дополнительное время тратится лишь на проверку принадлежности дуги (i, j) множеству T_j (2).

Учитывая, что очередь представлена двусвязным списком [4], а также необходимость поддержки упорядоченности элементов очереди по возрастанию значений расстояний, выигрыш по времени несомненный.

Анализируя (1), можно заметить, что для графов с фиксированной структурой возможно предварительное расщепление списков выходных дуг на подмножества T_i и $S_i \setminus T_i$, $i \in N$. Практически это реализуется дополнением веса дуг булевой меткой или введением дополнительных указателей списков [2]. Таким образом, сохраняется первоначальный способ представления графа в виде (1) и исключается необходимость классификации отдельных дуг на каждой итерации.

Таким образом, характерный для жадных алгоритмов шаг решения локальных задач для predetermined альтернатив можно выполнять более экономно, дополняя приемы эффективного кодирования алгоритма [3,4] учетом свойств исходных данных.

Ранее утверждалось, что в общем случае пометка входных дуг минимальной длины позволяет осуществить лишь одношаговый переход вперед при развитии дерева кратчайших путей. Покажем, что это ограничение можно ослабить с сохранением структуры данных представления пометок.

Пусть достигнута вершина i дерева кратчайших путей (рис. 1). Если анализируется альтернатива развития дерева по дуге $i \rightarrow j$, которая является кратчайшей из входных дуг в вершину j , то такая дуга может быть включена в дерево при условии, что $D_j \geq D_i + w(i, j)$. Так как $w(i, j) < \min(w(b, j), w(c, j))$, то изменение расстояний до вершин b и c не приведет к коррекции значения D_j .

Однако продолжение развития дерева по дуге $j \rightarrow k$ (рис. 1), которая является кратчайшей из входных дуг в вершину k , окажется преждевременным, если будет истинно условие

$$w(i, j) + w(j, k) > \min\{w(l, k), (l, k) \in M \wedge (l \neq j)\}. \quad (3)$$

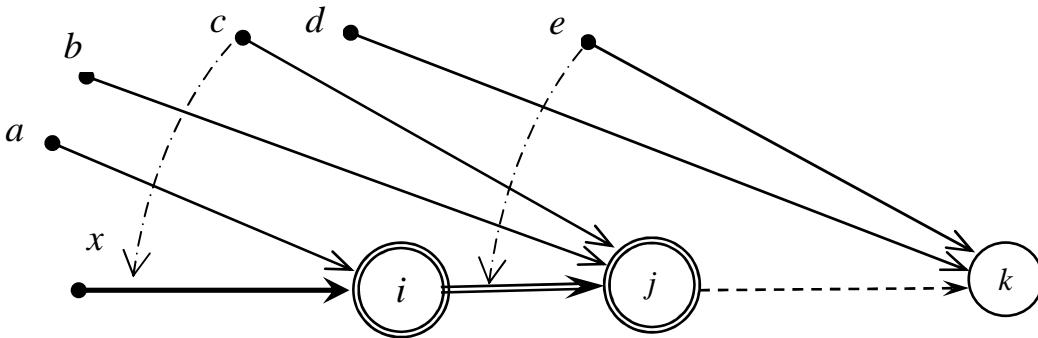


Рис. 1 Иллюстрация процесса развития дерева путей на графе

Истинность последнего условия не фиксирована структурой (1) и ее расширением (2), но ввиду их статичности относительно состояния поиска можно попытаться расширить представление графа. На рис. 2 показана возможность организации более сложного варианта выделения predetermined решений.

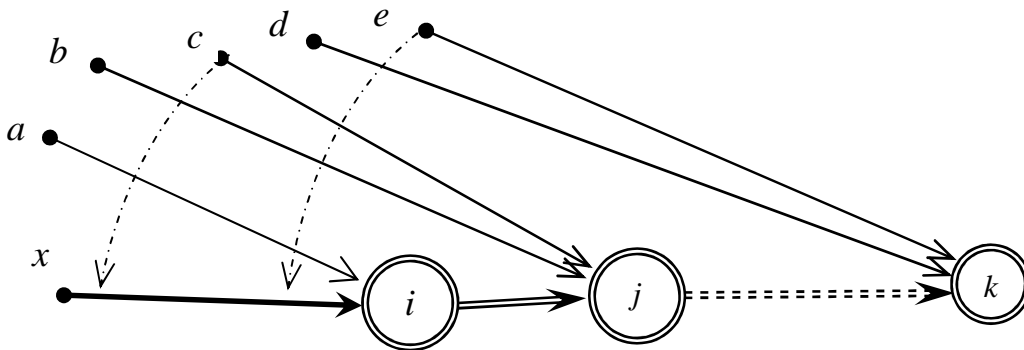


Рис. 2 Иллюстрация возможности многошагового перехода

Здесь истинным является условие

$$w(i, j) + w(j, k) \leq \min\{w(l, k), (l, k) \in M \wedge (l \neq j)\}. \quad (4)$$

Если анализируется альтернатива развития дерева по дуге $i \rightarrow j$, которая является кратчайшей из входных дуг в вершину j , то такая дуга может быть включена в дерево при условии, что $D_j \geq D_i + w(i, j)$. Но для приведенного фрагмента графа (рис. 2) справедливо условие $w(i, j) + w(j, k) < \min(w(e, k), w(d, k))$, поэтому изменение расстояний до вершин d и e не приведет к коррекции значения как D_j , так и D_k .

Таким образом, количество шагов продолжения развития дерева увеличено до двух. Очевидно, что такие шаги могут осуществлены и далее.

Предельное количество разрешенных шагов для любой вершины графа зависит от соотношения длин инцидентных ей дуг. Для любой вершины i нагруженного ориентированного графа можно указать путь $i \rightarrow j_1 \rightarrow j_2 \rightarrow \dots \rightarrow j_m \rightarrow k$, составленный из кратчайших входных дуг промежуточных вершин j_1, j_2, \dots, j_m , для которого справедливо

$$w(i, j_1) + w(j_1, j_2) + \dots + w(j_m, k) \leq \min\{w(l, k), (l, k) \in M \wedge (l \neq j_m)\}. \quad (5)$$

Доказательство здесь элементарно проводится методом математической индукции, если заметить, что (3) есть частный случай (5), когда $m = 1$.

Рассмотренный прием однократного выделения предопределенных решений оказывается привлекательным для случая многократного сканирования графа при решении задач серверного обслуживания потока запросов на поиск кратчайших путей.

Учет предопределенных решений оказывается значимым при решении задач коммивояжера, размещения, составления расписаний и других [1], где реализуется волновая схема сканирования пространства поиска [3]. Количество операций над очередью Q сокращается на величину, обратно пропорциональную средней полустепени захода вершин графа, что является существенным для разреженных графов.

Литература

1. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ/Пер. с англ. – М.: МЦМНО, 2002. – 960 с.
2. Ревотюк М.П., Застенчик Н.И., Шешко Е.В. Поглощение предопределенных решений жадными алгоритмами//Известия Белорусской инженерной академии, № 1(17)/2, 2004. - С. 112-114.
3. Ревотюк М.П., Хаджинова Н.В. Жадные алгоритмы встречного поиска кратчайших маршрутов на сетях. Сетевые компьютерные технологии: Сб. тр. II Межд. науч. конф. (Минск, 21-23 сентября 2005 г.) – Мн.: Изд. центр БГУ, 2005. – С. 59-64.

«СФЕРА» - ИНСТРУМЕНТАЛЬНАЯ СРЕДА АВТОМАТИЗИРОВАННОГО СОЗДАНИЯ И МОДИФИКАЦИИ КОМПЬЮТЕРНЫХ ОБУЧАЮЩИХ ПРОГРАММ

Романцевич Е. В.

Белорусский государственный технологический университет, г. Минск

Преобладание в сфере разработки компьютерных обучающих и тестирующих программ интересов программистов-разработчиков не соответствует потребностям педагогов-предметников, что делает целесообразным создание инструментальных средств автоматизации процессов разработки и модификации компьютерных обучающих программ. Это позволит педагогам создавать собственные электронные учебные курсы, ограничиваясь рамками одного программного средства, не затрачивая усилий на приобретение умений работы с множеством других специальных инструментальных средств и знаний в области программирования.

Система «Сфера» – инструментальная среда автоматизированной разработки и модификации компьютерных обучающих программ, задачей которой является объединение достоинств и преодоление недостатков используемых в нашей стране аналогов системы для создания конкурентоспособного и лицензионно чистого конечного программного продукта при минимальных трудовых и денежных затратах.

Данное программное средство относится к классу сложных систем. Системы подобного типа обычно имеют большое время жизни, и большое количество пользователей оказывается в зависимости от их нормального функционирования. Существенная черта таких систем – высокий уровень сложности. В данном случае аспект сложности включает две составляющие: сложность решаемой задачи и сложность, связанная непосредственно с про-

цессом проектирования. В связи с этим особое значение приобретает вопрос нахождения путей преодоления неограниченной и неоправданной сложности создаваемого программного комплекса, повышения эффективности его разработки. Идеей о том, как бороться со сложностью систем, является объектный подход, концептуальной базой которого является объектная модель. Поскольку узловые элементы «Сферы» – это тоже объекты, именно объектно-ориентированный подход положен в основу разработки инструментального средства. Инструментальное средство «Сфера» объединяет в себе несколько взаимодействующих подсистем, которые в совокупности предоставляют пользователю все необходимые функции для создания и модификации компьютерных обучающих и тестирующих программ.

Разрабатываемая программная среда, прежде всего, ориентирована на пользователя-непрофессионала, что позволяет обеспечить участие в разработке компьютерных систем обучения преподавателей-методистов. Фактически пользователь избавляется от необходимости владения каким-либо языком программирования. Всю ответственность за правильное функционирование созданного пользователем компьютерного обучающего средства система берет на себя. Все это значительно усложняет архитектуру системы, но эта сложность должна быть закрыта для пользователя, а пользовательский интерфейс должен быть построен таким образом, чтобы быть понятным и легким в обучении, что предполагает поддержку шаблонов поведения (например, Safe Exploration, Instant Gratification, Changes in Midstream, Prospective Memory и др.), шаблонов информационной архитектуры и структуры приложения [1].

Поскольку требования к структуре и наполнению учебного материала постоянно меняются, это повышает необходимость предоставления пользователю функции модификации уже существующих компьютерных средств обучения, не вызывающей дополнительных сложностей. Также необходимо предусмотреть возможность повторного использования отдельных частей обучающих программ, разработанных с помощью данного инструментария, или подключение различных внешних по отношению к разрабатываемому компьютерному средству обучения программ, отличающихся принципом функционирования и инструментом разработки. Это также значительно сократит сроки разработки компьютерных средств обучения [2]. Все сказанное предполагает реализацию в рамках системы модульного иерархического принципа, что позволит в случае необходимости осуществить быструю модификацию, функциональную совместимость и переносимость отдельных частей создаваемых компьютерных средств обучения.

Модульный иерархический принцип основывается на разделении программы на модули, т.е. на программы, которые определенным способом взаимодействуют между собой по хорошо определенным правилам. При достижении этой цели разработка отдельных модулей может осуществляться различными исполнителями независимо друг от друга, при этом объединенная программа будет функционировать правильно, без сбоев и ошибок.

Большим преимуществом обладает любая инструментальная среда аналогичная по назначению, если поддерживает возможность сохранения содержимого созданных учебных страниц в качестве универсальных шаблонов и стилей. Эта возможность также предусмотрена и реализована в рамках «Сферы».

Важной особенностью данного программного средства является решение использовать модульную технологию обучения, принципы которой лягут в основу разрабатываемых пользователем системы компьютерных средств обучения. Согласно принятому решению учебная страница будет содержать не только собственно учебный материал, но и ссылку на страницу рекомендаций по его изучению. В состав страницы рекомендаций включены: основная цель изучения материала, задачи, которые необходимо выполнить для ее достижения, рекомендации по изучению учебного материала (в соответствии с задачами), ссылки на программы, ответственные за проведение входного и итогового контроля знаний. При

разработке отдельной страницы учебника разработчик сможет указать степень сложности размещаемого на ней учебного материала. Этот факт в последствии позволит обеспечить адаптацию содержания книги к уровню подготовленности обучаемых.

Предусмотрена возможность публикации материалов, подготовленных с помощью системы в различных форматах (внутренний формат системы, html, pdf и др.). В частности, при публикации страницы учебника или страницы теста в формат html, исходный код файла будет представлять собой синтез синтаксиса html, JavaScript, CSS, PHP.

Синтаксис XML позволяет представить схему курса в виде иерархической структуры. При составлении книги ее содержимое разбивается на части, главы, разделы и т.д., а хранить такую иерархическую информацию легче всего, представив ее на языке XML. В дальнейшем программа может использовать составленную структуру для создания оглавления, оформления различных уровней в структуре с помощью всевозможных стилей, извлечения определенных разделов, а также обработки информации иными способами.

Система отличается легкостью формирования схемы курса, в которой допускается любое количество уровней вложенности. При этом в любой момент по желанию пользователь может изменить схему путем удаления или добавления элементов схемы или изменения свойств отдельного узла схемы. Первоначально учебная страница создавалась при условии ее жесткой привязки к конкретной теме схемы курса, что значительно ограничивало свободу пользователя и усложняло программный код самой системы. В настоящее время принято решение позволить пользователю создавать бесконечное количество учебных страниц в рамках одного курса. При этом пользователь самостоятельно определяет, какие из них будут включены в итоге в учебник, а какие нет.

В заключение следует отметить, что принципы, которым старались следовать разработчики «Сферы» позволяют сместить внимание преподавателя-предметника с проблемы овладения инструментальным средством на проблему соблюдения всех необходимых педагогических законов и принципов.

Литература

1. Тидвелл, Дж. Разработка пользовательских интерфейсов / Дж. Тидвелл. – Спб.: Питер, 2007.
2. Голенков, В.В., Гулякина, Н.А., Елисеева, О.Е. Инструментальные средства проектирования интеллектуальных обучающих систем / В. В. Голенков, Н. А. Гулякина, О. Е. Елисеева // Методическое пособие по курсу "Интеллектуальные обучающие и тренажерные системы" для студентов специальности "Искусственный интеллект". - Мн.: БГУИР, 1999. - 102 с.

“ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ” СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ СКЛАДОМ НА ОСНОВЕ WMS РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОАО «САВУШКИН ПРОДУКТ»

Сайко Д. В.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Что представляет собой WMS – системы

WMS (сокр. от [англ.](#) *Warehouse Management System* — система управления складом) — необходимый атрибут современного, высокорентабельного склада.

WMS — это система управления, обеспечивающая комплексную автоматизацию управления складскими процессами.

Существуют также системы:

- **SSTD**- Единая система решения корпоративных задач.
- **ERP**-системы — Системы планирования ресурсов предприятия.
- **EAM**-системы — Системы управления основными фондами предприятия.

- **MES**-системы — Системы оперативного (цехового) управления производством / ремонтами.

- **CRM**-системы — Системы управления взаимоотношениями с клиентами.

- **SCM**-системы — Системы управления цепочками поставок.

Системы класса WMS были специально созданы для того, чтобы **автоматизировать функции оперативного управления складом**. Их работа базируется на технологиях:

- автоматическая идентификация продукции;

- адресное хранение продукции;

- удаленное управление персоналом;

Эти системы формируют в автоматическом режиме задания для проведения операций, управляя складским персоналом и техникой, оставляя за менеджментом только функции наблюдения:

- ход технологического процесса

- разрешение проблемных ситуаций.

Все операции на складе условно можно разделить на три основных задачи: приём, хранение и отгрузка. Всё остальное – переупаковка, сборка комплектов, покраска, сушка и прочие задачи носят характер вспомогательных и на общую эффективность оказывают незначительную степень влияния.

Кроме задач приёма, размещения, инвентаризации, хранения и отгрузки товара, автоматизированная система управления складом оптимизирует все процессы, связанные с этим.

WMS система — представляет собой комплекс последовательно выполняемых операций:

1. Уровень перемещения: перемещаем товар из одного места хранения в другое.

2. Уровень размещения: планируем, место хранения товара, исходя из специфических для склада характеристик (стеллажи, лотки, паллеты).

3. Уровень сообщения: определяем порядок перемещения товара (комплектация, классификация товара).

Специфичность задач, растет с ростом уровня, если перемещение базовое понятие для всех, то срочная комплектация скоропортящегося товара, это уже признак конкретного склада.

Практика свидетельствует, что склад готовой продукции является важнейшим логистическим звеном, органически связывающим производство и сбыт продукции предприятия. В условиях промышленного производства продукции с номенклатурой, обычно составляющей несколько десятков товарных позиций и цикличности технологических процессов, обеспечение на складах быстроты поиска и простоты доступа к продукции позволяет снизить трудозатраты и ускорить выполнение операций.

Оправданной в этих условиях является напольное хранение упакованной продукции в один или несколько ярусов (в зависимости от прочности упаковки). Однако такой способ хранения предъявляет жесткие требования к организации складских работ, а управление ими в режиме реального времени вызывает необходимость внедрения систем автоматизации класса WMS (Warehouse Management Systems) в комплексе с современными промышленными средствами получения и обработки информации. К таким средствам относятся ручные и монтируемые на складскую технику терминалы сбора данных, и в первую очередь радио-терминалы. Радио-терминалы, по сути, являются мобильными компьютерами, оснащенными средствами поддержания радиочастотной связи с системой управления. Они обеспечивают наиболее высокую эффективность работ именно на складах готовой продукции. При этом во главу угла ставится именно оперативность выполнения работ, поскольку любые задержки складских операций могут привести к остановке производственных линий. Ниже представлена схема типового технологического процесса.

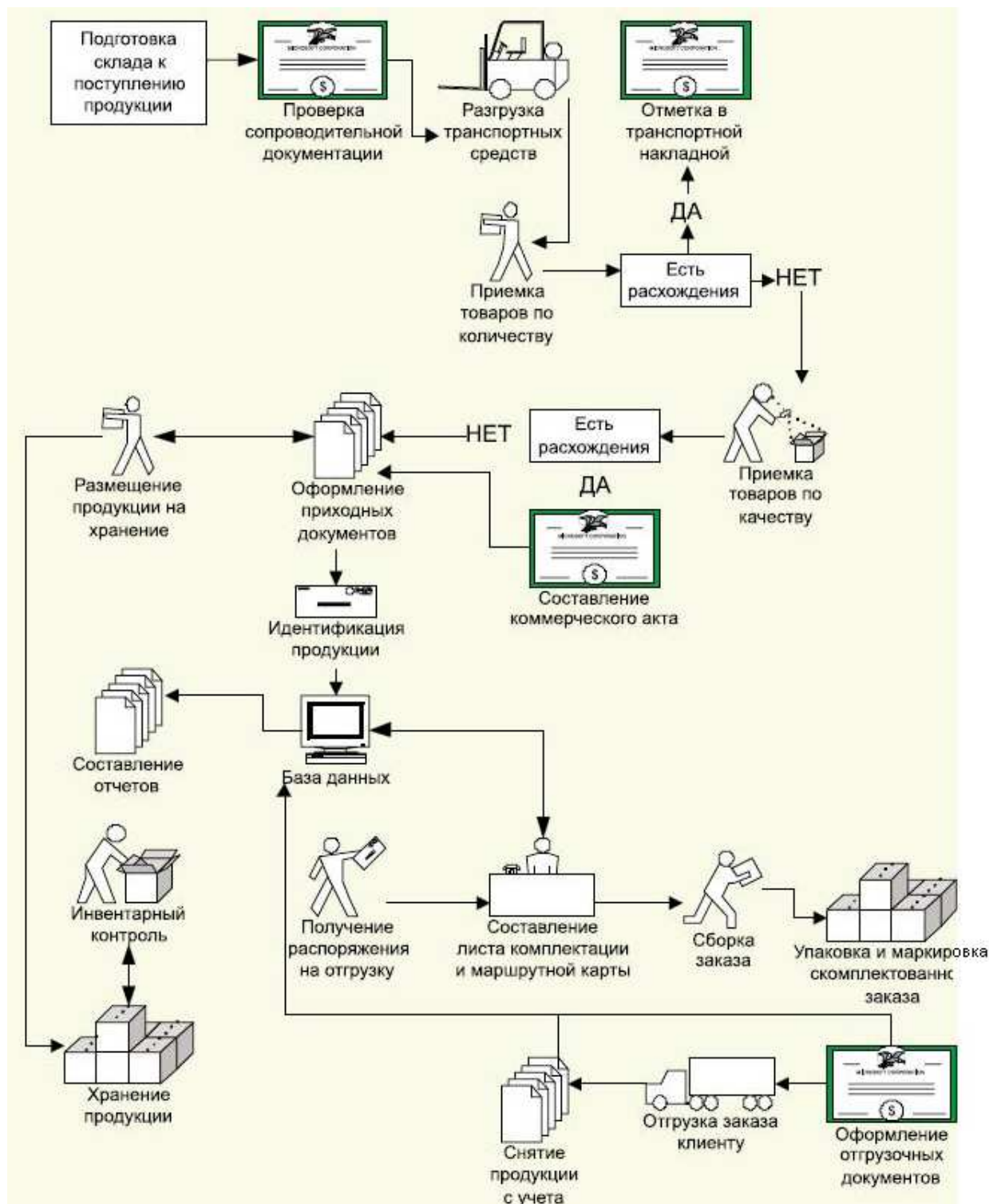


Схема 1: Типовой технологический процесс

Выводы:

В общем смысле, хороший склад - это тот склад, который на первый взгляд кажется неработающим. Когда всё отлажено настолько, чтобы не допустить суеты и лишних движений. Плохой склад - тот, на котором крутится большое количество сотрудников, занятых непонятно чем, товар комплектуется по два часа и т.д. Система WMS даёт значительные преимущества перед другими решениями, повышая рентабельность и эффективность технологического процесса.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ WEB-ТЕХНОЛОГИЙ В ПРОЦЕССЕ ФОРМИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ СРЕД

¹Саникович В.В., ²Саникович О.И.

¹Республиканский институт профессионального образования, г.Минск

²Минский государственный высший радиотехнический колледж, г.Минск

Внедрение и использование Web-технологий в образовательном процессе оказывает благотворное влияние на качественные характеристики подготовки и переподготовки будущих специалистов. Об этом свидетельствует многочисленная практика внедрения разнообразных систем поддержки учебного процесса: начиная от статических HTML страниц и заканчивая многоуровневыми системами электронного обучения (e-Learning systems).

Надлежащее обеспечение учебного процесса современными информационными технологиями – залог успешного функционирования и развития образовательной сферы.

Любая деятельность в сфере образовательных услуг включает в себя оперирование большим количеством специализированной информации. Данная информация может носить как частный, так и глобальный характер. Следовательно, возможность доступа и скорость ее анализа выступает ключевым фактором в гармоническом взаимодействии всех ветвей учебно-воспитательных подразделений, ответственных за обеспечение надлежащего уровня получаемых знаний.

Оперативное представление аналитической информации об учебном процессе, а также создание специализированной отчетности о пройденных этапах позволит существенно увеличить интенсивность обучения. Информационное обеспечение и анализ состояния учебного процесса позволит административно-управленческому аппарату учебного заведения наметить оптимальные пути формирования учебно-методического обеспечения, а также выявлять перспективные пути развития образовательного процесса.

Реализация аналитических функций в информационной среде учебного заведения осуществима при помощи различных систем оперативного анализа данных, а также систем поддержки принятия важных решений (OLAP – «Online Analytical Processing»).

За последнее время появился целый ряд OLAP-средств (их называют Web-OLAP или WOLAP), оснащенных Web-возможностями. Они выполняют аналитические функции, а также обеспечивают высокую производительность, которыми обладают Web-приложения. Современные Web-OLAP продукты, в общей своей массе, имеют некоторые отличия от традиционных клиент/серверных OLAP-инструментов, которые в основном рассчитаны на специалистов-аналитиков. Наличие в Web-OLAP продуктах готовых аналитических приложений, для инструментального исследования данных, позволит обеспечить использование этих продуктов широким кругом пользователей.

С появлением новых технологий обработки данных, а также с возрастанием сферы использования аналитических возможностей, представляется недостаточным использование простой модели клиент/сервер для реализации Web-OLAP архитектуры.

Общая архитектура Web-OLAP реализуется при помощи взаимодействия клиентского браузера с HTTP-сервером. Наряду с этим взаимодействием существует промежуточное программное обеспечение, которое хранится на сервере. Данное программное обеспечение ответственно за выполнение следующих функций:

- взаимодействие с базой данных;
- хранение состояний (предыдущих транзакций базы данных);
- вычисление и буферизация данных, возвращаемых на клиентскую часть приложения.

Клиентская часть программы не соединяется напрямую с базой данных, что обеспечивает достаточную безопасность хранимой информации.

Возможность реализации Web-OLAP решений осуществима на основе технологий HTML (DHTML), Java, ActiveX, XML(XLS), а также комбинаций вышеназванных технологических решений.

Особенности Web-OLAP продуктов.

Удобство использования. Использование интуитивного HTML-решения для получения, анализа и совместного использования учебно-методических данных при помощи любого браузера в любой операционной системе; пошаговое создание отчетов, широкий набор инструментов для создания сложных отчетов, выполнение вычислений, фильтров, детализаций и агрегирования (drill through).

Интерактивность. Создание не регламентированных запросов; форматирование и печать отчетов в режиме визуального проектирования (What You See Is What You Get - WYSIWYG); анализ, оперативное изменение, детализация (drill down), фильтрация данных отчета; выборка данных с заданными измерениями и значениями (slice and dice); быстрое развертывание и настройка OLAP системы.

Функциональность. Анализ информации на уровне транзакций; пересылка отчетности по электронной почте; публикация отчетов для рабочих групп; экспорт в Excel, PDF и HTML-форматы; доступ к данным, хранящимся в реляционных базах данных и на OLAP-серверах;

Доступность. Реализация клиентской части в формате HTML/JavaScript, DHTML, Java, ActiveX.

Переносимость и интеграция. Обеспечение межплатформенной поддержки и интеграции; XML- и SOAP-интерфейсы.

Производительность и масштабируемость. Возможность объединения компьютеров в кластеры; взвешенная балансировка нагрузки между несколькими серверами; оптимизация системных ресурсов.

Обеспечение высокой безопасности. Защита данных на уровне ячеек с использованием фильтров защиты и списков управления доступом; авторизация, брандмауэры, DMZ («demilitarized zone» - часть компьютерной сети, находящаяся между локальной сетью и Интернетом); прокси-серверы; защита данных на транспортном уровне SSL (Secure Socket Level); использование цифровых сертификатов.

Низкая стоимость внедрения и администрирования. Использование интуитивно понятного интерфейса обеспечивает минимум затрат на обучение пользователей и администрирование.

Оперативная аналитическая обработка использовалась до сих пор преимущественно бизнес-аналитиками и другими экспертами в области обработки финансовой информации. Но с недавним появлением Web-OLAP систем, упрощающих внедрение программного обеспечения и предлагающих пользователю знакомый интерфейс браузера, а также с увеличением объемов оперативного анализа статистических данных, учреждениям образования необходимо внедрять в информационную среду аналитические возможности, которые предоставляют Web-OLAP системы.

Дальнейшее развитие информационной среды учреждения образования немыслимо без использования Web-сервисов. Предполагается, что именно Web-сервисы станут тем информационным ресурсом, который позволит с незначительными издержками обрабатывать традиционную структуру хранения данных без изменения используемого программного обеспечения.

Для эффективной организации взаимодействия информационных систем учреждения образования представляется необходимым детальное описание тех организационно-педагогических процессов, которые организованы в учебном заведении для осуществления этих образовательных функций.

С этой целью необходимо организовать:

- 1) декомпозицию функциональных блоков организационно-педагогических процессов до получения цепочек организационно-педагогических процессов;
- 2) декомпозицию цепочек организационно-педагогических процессов до получения единичных организационных и педагогических процессов;
- 3) декомпозицию единичных организационных и педагогических процессов до составляющих их функций.

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К ПОСТРОЕНИЮ ПОДСИСТЕМ ТЕСТИРОВАНИЯ В КОМПЛЕКСЕ ТЕСТИРОВАНИЯ ЗНАНИИ

Сидорович С. А., Силаев Н. В.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Реалистически подходя к процессу преподавания, нельзя рассматривать тестирование, как своеобразную «панацею» повышения качества усвоения знаний, но допустимо и целесообразно использовать этот вид контроля наряду с традиционными формами проверок, испытанными многовековой педагогической практикой. Наиболее гибким вариантом для предлагаемой к рассмотрению формы испытаний, с нашей точки зрения, является компьютерное тестирование. Оно в состоянии обеспечить высокий уровень объективности, коллективность организации опроса, с высоким качеством обработки ответов, гибкость ввода ответов, а также широкий охват материала. Основной упор работы преподавателей при этом можно сосредоточить на разработке хорошо сформулированных, развитых и полно охватывающих материал предмета систем тестов. Заметим, что тестирование может включать как чисто теоретический материал – теоретическое тестирование, так и практический материал. Заметим также, что практическое тестирование (тестирование знаний и умений решения практических задач) разумно выделять в самостоятельный вид тестирования, имеющий свои существенные особенности. В дальнейшем изложении остановимся исключительно на проблемах теоретического тестирования, которое для краткости будем именовать просто «тестированием», и возможных подходах к их решению. По целям тестирования различают:

- тестирование учебных достижений (экзаменационное). Тесты этого вида предназначены для общей оценки приобретенных знаний, умений и навыков в рамках пройденного учебного материала. Основное внимание уделяется проверке знаний учебной программы без выявления тем, которые субъект тестирования знает хуже (или лучше);
- диагностическое тестирование (этапное тестирование типа традиционных коллоквиумов). Данный вид тестов предназначен для определения «узких мест» в знаниях обучаемых. Основное внимание при этом уделяется выявлению тех единиц обучения, которые субъект тестирования знает хуже всего;
- тестирование для выявления общего владения материалом предназначено для оценки уровня владения знаниями, умениями и навыками, которые будут необходимы для изучения данного предмета. Составляются подобные тесты независимо от учебных программ (вуза) и полностью ориентированы на практически необходимые знания и умения;
- специализированное тестирование, например, по владению вычислительной техникой или программной, пользовательской средой;
- полезными также являются психологическое и психофизиологическое тестирование – тестирование, в ходе которого проверяются психофизиологические данные субъекта тестирования, позволяющие оценить его способности к усвоению комплекса знаний. Они позволяют дать прогноз успешности изучения еще до начала обучения;
- распределительное тестирование – предназначенное для распределения субъектов тестирования на примерно равные по уровню подготовленности группы;
- обучающее тестирование. Нередко его не рассматривают как разновидность в классификации тестов. Вероятно, это связано с недостаточной теоретической проработкой вопросов их создания и применения. Трудно четко указать критерий, по которому тест можно было бы назвать обучающим. Между тем, на практике, роль обучающих тестов в процессе обучения возрастает. Чаще всего здесь преобладают обучающие тесты линейной структуры, которые при необходимости могут подсказывать правильные ответы в соответствии с внесенным алгоритмом. Однако более эффективными для процесса обучения нам видятся обучающие тесты древовидной структуры, практику построения и использования которых мы проводим в настоящее время. Исходя из отмеченного выше, можно с уверенностью сказать, что разработка автоматизированных тестирующих систем, в особенности с использованием вычислительных сетей, является актуальной задачей. Именно такой вид тестирования способен предельно поднять технологичность процесса проверки знаний с максимальным учетом, по всему спектру показаний, индивидуальных особенностей как материала опроса, так и психических особенностей человека, подвергающегося опросу.

В настоящем докладе излагаются основные идеи построения подсистемы тестирования в комплексной системе тестирования знаний. Программа представляет собой WEB-приложение, предполагающее использование внешней базы данных, которые являются базами тестов, реквизитов авторизации пользователей, результатов прохождения тестов и статистических данных.

Для прохождения тестирования субъекту тестирования, в дальнейшем – клиенту, необходимо находиться в сети и иметь в своем распоряжении любой браузер, средства которого способны сделать доступным ресурсы и WEB-сервера и установленного на нем приложения.

Поскольку все подсистемы комплекса доступны, в силу специально организованной, единой для всех, точки входа, возникает необходимость ввода ролей для разграничения прав доступа к элементам системы: администратор, преподаватель, клиент. Использование системы разграничения прав доступа позволяет защитить систему от случайного или намеренного несанкционированного доступа. Планируются средства, затрудняющие подбор пароля методом простого перебора.

Для каждого теста мы планируем установить как число разрешенных попыток, так и время тестирования (одного отдельно взятого вопроса и всего теста в целом). Это, с нашей точки зрения, позволит разумно ограничивать общее время тестирования группы клиентов (по образцу установления продолжительности времени приема зачета или экзамена у группы студентов). Кроме того, для повышения уровня конфиденциальности системы планируется установить для каждого теста характеристику, сопоставляющую его (тест) с конкретной группой клиентов тестирования. В дополнение к этому вводятся единовременные пароли на тесты, учитывающие адреса машин, с которых допускается тестирование. Такие меры позволят предотвратить распространение информации о материалах теста за пределы аудитории тестирования.

При построении тестов мы включаем в них вопросы следующих видов:

- вопросы типа «один правильный ответ из нескольких предлагаемых»;
- вопросы типа « m правильных ответов из n предлагаемых»;
- вопросы с открытыми ответами типа «числовые ответы на поставленный вопрос» и «текстовые ответы на поставленный вопрос»;
- вопросы типа «ранжирование»;
- вопросы типа «установление соответствия между элементами двух списков ответов».

Использование компьютера, в отличие от традиционного тестирования на «бумажной основе», позволяет клиенту сконцентрировать свое внимание только на одном вопросе, при необходимости вносить исправления (!) в уже набранный ответ. В текст вопроса могут быть включены рисунки, списки, таблицы и т.д. Может быть задано время на ответ, которое сопоставляется со сценарием тестирования, назначенного на тест, в состав которого входит этот конкретный вопрос. Изначально, при добавлении вопроса в систему, для него может быть задана начальная сложность, которая в дальнейшем меняется на основе статистики, получаемой при многократных ответах на него.

Предусмотрены три вида сценариев тестирования:

- случайная выборка вопросов,
- адаптивная выборка и
- древовидное тестирование.

Планируется, что система тестирования будет допускать гибкие настройки времени для тестов. В связи с этим мы намереваемся реализовать три временных режима: тест без учета времени, установление времени на весь тест, автоматическое вычисление времени в зависимости от количества и сложности вопросов реально сформированного для пользователя теста.

В случае, когда при выводе вопросов теста используется случайная выборка, каждый клиент получает случайный набор вопросов в случайной последовательности. Варианты ответов выводятся также в случайной последовательности. Этот прием формирования тестов позволяет исключить запоминание вариантов ответов «по номеру». Все описанные выше меры позволяют предоставлять клиенту всякий раз уникальный тест, формируемый из базовых блоков.

Планируется, что создаваемая подсистема тестирования будет обладать возможностью адаптивной оценки сложности вопросов и тестов в целом, основанной на сборе статистических сведений в ходе многократных сеансов тестирования. Думается, что это даст возможность системе более гибко производить выборку вопросов при формировании тестов, и позволит исключить необходимость включать в тест вопросы по случайной выборке для определения результата тестирования, применяя различные адаптивные алгоритмы для исполнения сценария тестирования.

Планируется также реализовать группы вопросов, связанные в древовидные структуры. Это значит, что последовательность задаваемых клиенту вопросов будет напрямую связана с тем, каким образом он будет на них отвечать, и, следовательно, «учитывать» качество ответов на вопросы-предшественники. В случае, если ответ клиента окажется неверным (полностью или даже частично), построенная по сценарию опроса древовидная структура будет способна дать ему наводящий вопрос, либо предоставить иную возможность для исправления общей ситуации. В противном случае, появляется возможность выдачи очередного, более детализирующего для исключения случайностей, вопроса. Такой подход позволяет моделировать диалог преподавателя со студентом и вносит в процесс тестирования элементы «осознанности», целенаправленности опроса.

Важной чертой представляемой системы тестирования является фиксация протокола каждого прохождения теста с указанием информации о пользователе, его ответах на заданные вопросы и итоге тестирования. Благодаря этому, преподаватель получает возможность, просматривая протоколы, корректировать тесты, повышая их качество. Эта возможность позволяет совершенствовать вопросы и тест в целом.

Клиенты смогут в определенный преподавателем момент просматривать результаты ранее пройденного теста, видеть комментарии, оставленные для них преподавателем. Этим повышается обучающая составляющая тестирования.

Итак, представляемая нами система удовлетворяет следующим принципам: принцип отделения тестирующей оболочки от баз данных тестов; принцип использования сети; принцип документирования и ведения статистики; принцип использования технологии «клиент-сервер»; принцип защищенности; принцип модульности; принцип использования Интернет-технологий.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЕРЕМЕННОГО МАСШТАБА ПИКТОГРАММ ДЛЯ НАВИГАЦИИ ПО ФАЙЛОВОЙ СИСТЕМЕ

Тавониус К.А.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

В [1] приведено сравнение с лабиринтом ориентирования в современном программном интерфейсе, когда пользователь не имеет возможности видеть одновременно, хотя бы схематично, изображение всего рабочего пространства. В основном такой подход вызван ограниченностью аппаратных ресурсов персонального компьютера, не позволяющих задействовать большие площади для вывода информации.

В последнее время все большее внимание уделяется попыткам использовать уменьшенный масштаб изображений, не находящихся в фокусе работы пользователя, для увеличения наглядности и интуитивности интерфейса [2]. Не в последнюю очередь оживление в данной области связано с ростом разрешающей способности дисплеев, делающей более информативной технологию применения уменьшенных изображений объектов для предварительного просмотра (previews или thumbnails).

В данной работе предпринята попытка создания файлового менеджера, использующего переменный масштаб изображений в качестве альтернативы традиционным средствам прокрутки содержимого окна, в случае когда все подлежащие выводу объекты не помещаются в отведенной области экрана. Традиционным средствам организации прокрутки присущ ряд недостатков.

Согласно требованиям эргономики, полоса прокрутки, как наименее информативный элемент интерфейса, должна занимать минимум рабочего пространства и располагаться на его периферии. Однако это делает доступ к ней крайне невыгодным по времени, которое по закону Фитса [1, 2] определяется как $t = a + b \log_2(D/S + 1)$ (здесь D – расстояние от начальной позиции курсора до объекта, S – размер объекта вдоль линии перемещения курсора, a, b – константы, определяемые производительностью оператора). Кроме того, как элемент, расположенный на периферии окна, полоса прокрутки должна иметь хотя бы одну «бесконечную» размерность [1], что на практике не реализуется из-за наличия рамки окна. Таким образом, нахождение альтернативных средств навигации в человеко-машинном интерфейсе по-прежнему является актуальной задачей.

Изменение масштаба смоделировано нами в виде разделения рабочей области на три зоны: центральную 2 и периферийные 1 и 3 (рис. 1). В зоне 2, имеющей стандартное разрешение, расположены пиктограммы, с которыми пользователь работает непосредственно в данный момент. В зонах 1 и 3 разрешение пиктограмм понижается (соответственно увеличивается масштаб) в направлении от центра:

$$\Delta y = \begin{cases} C, & y \in 2 \\ C \cdot \alpha(y), & y \in 1, y \in 3 \end{cases} \quad (1)$$

где Δy – размер зерна (расстояние между центрами отдельных точек изображения), C – константа, определяющая единичный размер зерна, соответствующий области 2, $\alpha(y)$ – функция пространственных искажений [3], монотонно возрастающая и имеющая область значений, принадлежащую интервалу (0; 1).

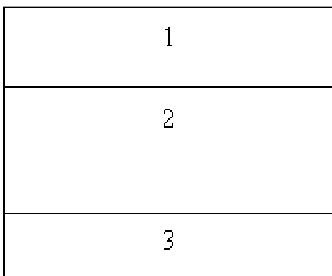


Рис. 1. Зонирование окна

В зоне 2 пиктограммы построчно размещаются в масштабе 1:1 (рис. 2).



Рис. 2. Отображение пиктограмм в зоне 2

Площадь пиктограммы в этом случае равняется $M \times N$ (ширина и высота области вывода пиктограммы); таким образом, окно размером $W \times H$ может вместить максимум $\frac{W}{M} \times \frac{H}{N}$ пиктограмм.

Если A (число пиктограмм для размещения) превышает данное, то $A - \frac{W}{M} \times \frac{H}{N}$ пиктограмм попадает в дополнительные зоны 1 и 3. В дополнительной зоне они размещаются в масштабе $1:2^n$, где n – номер строки. Нумерация строк начинается с единицы и счёт идёт от зоны 2 (в зоне 1 – снизу вверх, а в зоне 3 – сверху вниз – см. рис. 3). Таким образом, в первой строке зоны 3 – размер пиктограммы равен $\frac{M}{2} \times \frac{N}{2}$, а в n -й строке зоны 3 – $\frac{M}{2^n} \times \frac{N}{2^n}$. На практике пиктограммы с размерами менее 4×4 являются неинформативными. Поэтому для большей читаемости представляется целесообразным ограничить уменьшение размера пиктограмм, сведя правило пересчета для n -й строки к $\max\left(\frac{M}{2^n} \times \frac{N}{2^n}, \frac{M}{2^4} \times \frac{N}{2^4}\right)$.

При этом в n -ю строку попадает $\min\left(2^n \cdot \frac{W}{M}, 2^4 \cdot \frac{W}{M}\right)$ пиктограмм. Аналогичная ситуация

наблюдается с подписями к пиктограммам, традиционно содержащими имя файла, иногда сопровождаемое дополнительной сервисной информацией. Вывод текстовых подписей искусственно подавлялся при $n > n_T$ для более ясного восприятия содержимого окна. Значение n_T выбирается исходя из требования к усредненному коэффициенту запечатывания знакоместа не более 70%.

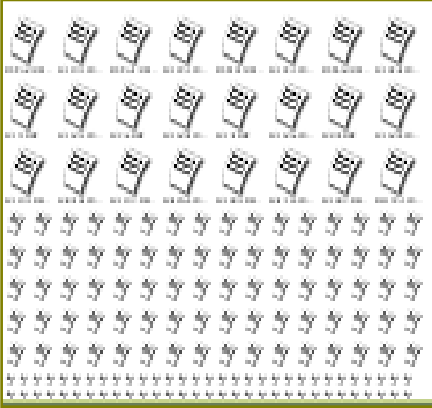


Рис. 3. Строки масштаба $1: 2^n$

После размещения пиктограмм проводится оценка на оптимальность. Критерием для проверки является разница между размерами дополнительной зоны и суммарными размерами области вывода пиктограмм в данной зоне. Если разница равна нулю, размещение оптимально. В противном случае итеративно увеличивается количество строк для каждого n , начиная со строк с меньшими номерами (рис. 3). Операция выполняется с

увеличением n до получения оптимального размещения.

Прокрутка содержимого основной зоны осуществляется при использовании аппаратных средств прокрутки манипулятора «мышь», или путем нажатия левой кнопки мыши в момент нахождения указателя в одной из дополнительных зон. При выполнении прокрутки содержимого основной зоны вниз последние W/M пиктограмм из основной зоны перемещаются в зону 3 и при этом приобретают масштаб $1:2$. Соответственно, из зоны 1 последние W/M пиктограмм перемещаются в основную зону, принимая масштаб $1:1$. После перемещения выполняется описанная выше проверка на оптимальность размещения пиктограмм.

При прокрутке в другую сторону имеет место обратная ситуация.

На основе данного алгоритма было разработано тестовое программное обеспечение и выполнена оценка временных затрат, связанных с навигацией по файловой системе. Результаты тестов представлены на рис. 4. Были апробированы два подхода к отрисовке пиктограмм – с использованием высокоуровневой библиотеки VCL/CLX и низкоуровневого интерфейса программирования Windows GDI+. В эксперименте использовались пиктограммы размером 64×64 пиксела, со значениями $M=N=80$. Эксперименты проводились на современном оборудовании на основе процессора P4 2.0 ГГц.

Наблюдаемая зависимость потребления времени от количества подлежащих отрисовке пиктограмм близка к линейной. Следует отметить незначительность временных затрат на пересчет размещения пиктограмм по сравнению с временем отрисовки при использовании неоптимизированных средств вывода графики и их сравнимость с временем отрисовки на основе оптимизированного механизма GDI+. Согласно полученным данным временной фактор не является значащим при определении целесообразности использования переменного масштаба пиктограмм.

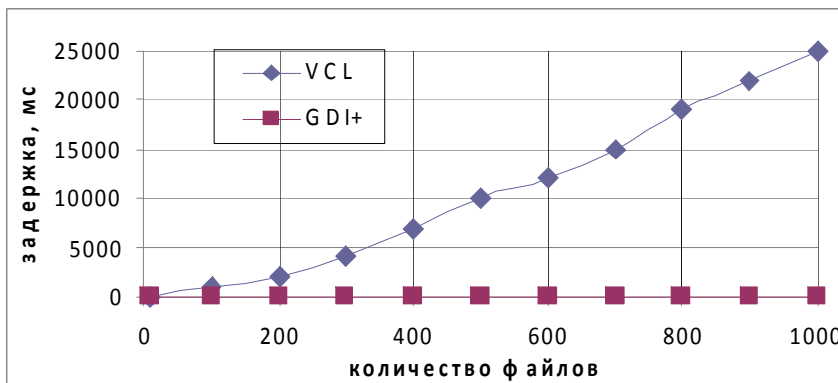


Рис. 4. Тест производительности алгоритма

Литература

1. Раскин Дж. Интерфейс: новые направления в проектировании компьютерных систем. - СПб.: Символ-Плюс, 2003. – 272 с.
2. Борушко И.Н., Гоманова Е.В., Костюк Д.А. Применение модели периферического зрения в графическом интерфейсе пользователя. Современные информационные компьютерные технологии: сб. науч. ст. - Гродно: ГрГУ, 2006. С. 22 – 27.
3. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. Т. 1. - М.: Мир, 1982. 310 с.

ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЭВМ В ОБУЧЕНИИ Федосенко В.И.

Минский государственный высший радиотехнический колледж, г. Минск

Данная проблема возникла около 20-25 лет назад, когда были сделаны первые попытки применить компьютеры в обучении. Несколько лет назад проблема обострилась в связи с тем, что компьютеры стали интенсивно использоваться в процессе обучения, расширились их возможности и область их применения. Одним из направлений использования ЭВМ стала автоматизация обучения, тогда как ранее ЭВМ использовалась только для облегчения расчетов курсовых работ, дипломных проектов и т.д., которые сложно произвести на бумаге.

Вместе с развитием информационных технологий процесс внедрения компьютера как инструмента обучения непрерывно расширяется и совершенствуется. На данный момент времени уже накоплен достаточно большой объем образовательных программ, находящихся на высоком методическом и педагогическом уровне. Тем не менее, создание эффективных обучающих программ, требующих более совершенной методики их использования, а также поиск новых организационных форм и методов обучения представляется приоритетной дидактической задачей современной педагогики.

Однако необходимо помнить, что многие важные задачи педагогики современной технике не по плечу. При всех своих феноменальных возможностях компьютер не способен вдохновлять или служить моделью поведения, не в состоянии вести естественный диалог, так как не понимает аналогий и метафор, и даже несложное общение может поддерживать только в пределах строго заданной программы: учащийся отвечает на вопросы, точно сформулированные на экране ЭВМ. При таком методе обучаемый не имеет возможности самостоятельно сформулировать задачу, проверить собственные гипотезы или поразмыслить над проходимым материалом. Автоматизированный опрос с использованием программных средств, при котором учащийся вводит ответы на поставленные вопросы через компьютер, хоть, очевидно, и экономит время, но живое индивидуальное общение с преподавателем иногда бывает просто необходимым, тем самым вдохновляя учащихся, показывая им, что значит по-настоящему владеть важным предметом, чего не могут предоставить любые электронные устройства. Кроме того, присутствует опасность возникновения барьеров между учащимися, отмежевании обучающихся от обучаемых.

Перечисленные факторы, сдерживающие популяризацию компьютеризации обучения, несомненно присутствуют, но при желании многие из них можно преодолеть. Можно сделать следующие практические рекомендации использования ЭВМ в ходе обучения:

1. Центральной фигурой на уроке с использованием ЭВМ должен быть учитель. Контакт учащегося с ЭВМ должен осуществляться непосредственно под руководством преподавателя, с рациональным выделением времени для самостоятельного общения учащегося со всем комплексом вычислительных средств.

2. Использование вычислительной техники должно быть методически оправданным и не быть самоцелью. Поэтому рациональным является использование ЭВМ в лабораторном практикуме лишь в тех случаях, когда они становятся дополнением к реальным экспериментам, памятуя о том, что только работа с приборами даст учащимся необходимые для практики умения и навыки.

3. Следует с особым вниманием дозировать работу с использованием дисплеев, чтобы не перегружать органы зрения и нервную систему учащихся.

4. Применение ЭВМ желательно на всех этапах урока, но наиболее эффективно их использование перед окончанием занятия и на последних уроках рабочего дня. Это обусловлено снятием усталости, повышением работоспособности и концентрации внимания при переключении его на новый вид деятельности.

5. При работе с ЭВМ следует привносить игровой элемент, воспитывающий у учащихся настойчивость, целеустремленность, открывающий новые возможности для проявления фантазии при формулировке гипотез, повышающий умственную активность.

6. Внедрение ЭВМ в учебный процесс должно носить системно-функциональный характер, который предполагает установление фундаментальных идей, связывающих в единую систему структурные элементы каждой науки, и их преобразование в курсах предметов с обязательным учётом психолого-педагогических возможностей обучаемых на каждом этапе обучения.

Эффективность обучения с внедрением средств вычислительной техники зависит от того, как учащиеся будут распоряжаться сэкономленным благодаря компьютерам временем, ранее затрачиваемым на рутинные, раз за разом повторяющиеся операции. Теперь преподаватель может уделить больше внимания более важным вопросам при изучении материала, требующим напряжения мысли и творческого подхода. Так, обучаемые могут практиковаться в любое время, изменять темп работы и, усвоив одно, самостоятельно переходить к другому. Современные обучающие программные средства, выполненные на должном методическом уровне, обеспечивают учащихся необходимой им помощью и дополнительными разъяснениями, а также автоматически выводят их на тот уровень сложности, который соответствует их подготовке.

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СВОЙСТВ ФОРМОВОЧНЫХ СМЕСЕЙ

Филипенко Е.В.

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого, г. Гомель

Планирование эксперимента является новым методом подхода к постановке и проведению исследования. Математический аппарат метода играет активную роль на всех этапах эксперимента. Планирование эксперимента как одного из прикладных разделов математической теории эксперимента получило широкое применение для решения широкого круга исследовательских задач: построения интерполяционных моделей, изучения кинетики и механизма явлений, оптимизации процессов и др.

Сущность методов математического планирования эксперимента состоит в том, что опыты проводятся по определенной схеме — матрице планирования, характеризующейся оптимальными свойствами. К этим свойствам относятся следующие: алгебраическая сумма элементов каждого вектор - столбца, за исключением столбца, соответствующего свободному члену, равна нулю; сумма произведений элементов двух произвольно взятых вектор - столбцов матрицы равна нулю (ортогональность); сумма квадратов элементов каждого вектор - столбца равна числу опытов.

Благодаря указанным свойствам, исследователь получает максимальную информацию об объекте при минимальном количестве опытов. Понятие «объект» имеет широкий смысл. Это может быть технологический процесс или агрегат, многокомпонентный сплав, формовочная или стержневая смесь и т.д. На объект оказывают действие многие факторы x_1, x_2, \dots, x_n . Факторами могут быть технологические параметры процесса или агрегата: температура заливки или выпуска металла из плавильного агрегата; содержание углерода, кремния, марганца и других элементов в сплаве; содержание глины, влаги, песков различных марок в формовочной смеси. При математическом планировании эксперимента значения факторов задаются исследователем в широких пределах.

Воздействие факторов на объект вызывает изменение его состояния, которое оценивается по изменению значений критерия или функции оптимизации: увеличению выхода годного литья; повышению механических свойств отливок; возрастанию физико-механических

свойств формовочной смеси и т. п. Следует иметь в виду, что критерий оптимизации должен характеризоваться статистической эффективностью, т.е. при данных условиях иметь возможно меньшую дисперсию и соответственно меньшую ошибку определения.

Цель планирования эксперимента может состоять в раздельном или одновременном решении задач двух типов. В первом случае исследователю необходимо решить задачу оптимизации, т. е. определить такие значения переменных факторов x_i , для которых величина критерия оптимизации y была бы максимальной (минимальной). При решении второго типа задач исследователя интересует математическое описание влияния каждого фактора на функцию оптимизации.

При двухфакторном эксперименте множество значений унимодальной функции оптимизации, которые она принимает в случае изменения значений переменных факторов, можно представить в виде поверхности некоторого „холма“ с одной сглаженной вершиной. Такую поверхность, соответствующую выходу изучаемого процесса, называют поверхностью отклика, а точку с максимальным значением одноэкстремальной функции — оптимумом. Обычно процесс оптимизации складывается из двух этапов. Первый этап состоит в достижении кратчайшим путем «почти стационарной области», т. е. участка поверхности на сглаженной вершине «холма», где крутизна относительно невелика. Второй этап предусматривает описание этого участка, т.е. поверхности отклика в «почти стационарной области».

Для большинства исследовательских и технологических задач достаточно ограничиться достижением «почти стационарной области».

Для планирования эксперимента в «почти стационарной области» наиболее эффективны методы полного и дробного факторного экспериментов. Одной из самых распространенных исследовательских задач как раз и является нахождение этой области. Для решения такой задачи весьма эффективно сочетание метода факторного планирования с движением по градиенту.

Следует иметь в виду, что составляющие градиента являются частными производными функции отклика. Так как исходный участок поверхности отклика при крутом восхождении аппроксимируется плоскостью, то частные производные уравнения этой плоскости равны коэффициентам регрессии при факторах. Следовательно, при движении по градиенту необходимо изменять факторы пропорционально значениям соответствующих коэффициентов регрессии. Знак и величина коэффициента показывают, в каком направлении и на сколько единиц варьирования необходимо изменить значение данного фактора по отношению к основному уровню. В установленном таким образом направлении выполняют серию шагов до получения максимального значения параметра оптимизации. Так как движение осуществляется по градиенту, то пройденный путь является кратчайшим к области оптимума.

В области полученного максимального значения функции отклика процедура крутого восхождения может быть повторена. При этом за основной уровень принимается максимальное значение функции, полученное на предыдущем этапе восхождения. Операция может продолжаться до тех пор, пока все коэффициенты регрессии линейной модели станут незначимыми. Незначимость коэффициентов b_i свидетельствует о выходе в область оптимума поверхности отклика.

Высокая эффективность и простота расчетного аппарата обусловили весьма широкое распространение рассматриваемого метода для решения многих исследовательских задач. Однако при использовании его следует строго оценивать достоверность получаемых результатов. Значения коэффициентов регрессии не должны быть соизмеримы с ошибкой их определения. Кроме того, необходимо оценивать адекватность (тождественность, соответствие) описания поверхности отклика за пределами области экстремума линейной моделью.

Если модельное уравнение регрессии существенно нелинейно или влияние эффектов взаимодействия соизмеримо с линейными эффектами, то метод крутого восхождения не применим. В этом случае необходимо использовать планирование второго порядка.

Для решения большинства исследовательских и технологических задач литейного производства, как отмечено ранее, достаточным является достижение «почти стационарной области» поверхности отклика. В тех случаях, когда исследователя интересует описание этой области, применяют планирование второго порядка. Целью такого описания может

быть локализация точки оптимума или определение типа поверхности отклика. Для решения задачи производится аппроксимация обычно полиномами второй степени. Это обусловлено тем, что по мере приближения к оптимуму все большую значимость приобретают эффекты второго порядка, так как отличие поверхности отклика от плоскости возрастает.

Реализация планов второго порядка требует большего объема опытов и расчетных работ. Конкретным результатом такого планирования является математическое описание «почти стационарной области» регрессионным уравнением. Дифференцируя уравнения по каждой переменной и приравнявая полученные выражения нулю, получаем систему уравнений. Решение этой системы дает координаты точки локализованного оптимума. Для описания «почти стационарной области» широкое применение нашло ортогональное и ротатабельное центрально-композиционное планирование.

До разработки и практического использования методов планирования эксперимента построение диаграмм «состав – свойство» было связано с необходимостью проведения огромного количества опытов и ограничивалось максимум трех-четырёхкомпонентными системами. Комплексное использование методов физико-химического анализа и теории планирования эксперимента позволило значительно снизить трудоемкость исследовательского труда при построении многокомпонентных диаграмм.

Планирование эксперимента при построении и исследовании диаграмм состав-свойство, являющихся сложным многокомпонентными системами (МКС), относится к числу наиболее сложных исследовательских задач.

Цель исследования многокомпонентных систем (формовочных и стержневых смесей, шихт и сплавов, противопожарных красок и т.п.) в большинстве случаев – построение зависимостей свойств системы от ее состава и технологического режима обработки или получения, оптимизация состава или технологического процесса по одному или нескольким критериям оптимизации.

В связи с тем, что составляющие многокомпонентных систем («смесевые факторы») не являются независимыми переменными, задача оптимизации может быть решена одним из двух применяемых в настоящее время методов.

В первом случае исходят из того, что независимо могут варьироваться лишь $q - 1$ составляющая МКС, а последняя q -я составляющая определяется как остаток от общей суммы. Это позволяет исключить из рассмотрения одну составляющую, а для оставшихся $q - 1$ независимых переменных МКС и $k - q$ режимных факторов применяют модельный полином соответствующего вида. Эффект влияния q -й составляющей распределяется между коэффициентами полинома.

Во втором случае, когда необходимо исследовать МКС в широком диапазоне изменения всех q переменных $k - q$ режимных факторов, используют модели с наложением ограничения: сумма относительного содержания составляющих МКС должна быть равна единице. Для оценки коэффициентов модельных полиномов строят оптимальные планы на области определения всех k переменных.

Планирование эксперимента при наличии количественных смесевых факторов позволяет установить количественные зависимости между пропорциями отдельных компонентов и свойствами смеси: поиск функциональных зависимостей состав-свойство или построение диаграмм состав-свойство. Целью использования этого метода также может служить нахождение координат точек, обеспечивающих оптимизацию исследуемых свойств.

В тех случаях, когда кроме чисто смесевых необходимо исследовать количественные несмесевые факторы, характеризующие ход процесса (температуру, давление, скорость охлаждения и др.), применяют факторные планы, сложные совмещенные планы, построенные с использованием планов на симплексе и факторных экспериментов типа 2^k .

Задачу планирования эксперимента для МКС с качественными факторами, являющимися основными, решают путем выделения перспективных комбинаций и отсева неприемлемых. Оптимизация, заключающаяся в нахождении оптимальных комбинаций при неполном переборе, осуществляется с помощью гипер-греко-латинских планов.

Если отдельные качественные факторы не относятся к основным, а лишь создают «шумовой фон», то целью исследования является не оценка, а устранение влияния таких факторов. Для этой цели используются латинские квадраты, кубы и параллелепипеды.

РАЗДЕЛ V. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И АЛГЕБРА КЛИФФОРДА

Андрушкевич И.Е., Шиёнок Ю.В.

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, г. Витебск.

Проблема поиска решения системы уравнений Максвелла [1]

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \operatorname{rot} H = \frac{\partial D}{\partial t} + j, \operatorname{div} D = \rho, \operatorname{div} B = 0, D = D(E), B = B(H), j = j(E). \quad (1)$$

по-прежнему является актуальной.

Наработана масса методов для решения системы (1) для случаев конкретных сред и граничных условий [2]. Среди них нас в первую очередь будут интересовать аналитические.

Задача настоящих исследований - изучение вопроса адаптации алгебраического метода разделения переменных (АМРП) [3] на случай системы уравнений Максвелла.

АМРП был разработан для решения ковариантного обобщения уравнения Дирака (КОУД) [4], которое для частицы с нулевой массой покоя можно записать

$$\left\{ \sum_{\nu=1}^4 \gamma^{\nu} (\partial_{\nu} - \Gamma_{\nu}) \right\} \Psi = 0.$$

Матрицы γ являются матрицами Дирака Риманова пространства размерности 4×4 и подчиняются требованиям алгебры Клиффорда [5].

$$[\tilde{\gamma}^i, \tilde{\gamma}^j]_{+} = \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j + \tilde{\gamma}^j \tilde{\gamma}^i = \pm 2 I; i, j = 1, 2, 3, 4, I = \operatorname{diag}(1, 1, 1, 1).$$

Связь с матрицами Дирака пространства Минковского осуществляется посредством следующего соотношения

$$\gamma^{\nu} = h_i^{\nu} \tilde{\gamma}^i = a_{\nu 1} \tilde{\gamma}^1 + a_{\nu 2} \tilde{\gamma}^2 + a_{\nu 3} \tilde{\gamma}^3 + a_{\nu 4} \tilde{\gamma}^4$$

здесь $a_{\nu i}$ - является произвольной положительно определенной функцией четырех переменных, явный вид которых определяется физикой задачи. Введя обозначения

$$B_j = \sum_{i=1}^4 a_{ji} \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j, j = 1, 2, 3, B_4 = -\sum_{i=1}^4 a_{4i} \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^4,$$

получим эквивалентную запись КОУД

$$\left\{ \sum_{\nu=1}^4 B_{\nu} \tilde{\gamma}^{\nu} (\partial_{\nu} - \Gamma_{\nu}) \right\} \Psi = 0. \quad (2)$$

Среди матричных представлений системы (1) [6-10], мы выбрали матричное уравнение в виде (см. [10])

$$\left\{ \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial z} + \xi^4 M \frac{\partial}{\partial t} + \Theta \right\} \Phi = P J \quad (3)$$

где алгебра матриц ξ удовлетворяет соотношениям алгебры Клиффорда

$$[\xi^i, \xi^j]_{+} = \xi^i \xi^j + \xi^j \xi^i = \pm 2 I; i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, I = \operatorname{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Следовательно, уравнения (2) и (3) имеют в основе использование матриц алгебры Клиффорда. Отличием является размерность матриц (размерность матриц в уравнении (3) в два раза больше) и представление дифференциальных операторов (дифференциальные операторы уравнения (3) от различных переменных являются неравноправными).

Таким образом, цель данного исследования сводится к поиску возможности приведения уравнения (3) к виду аналогичному КОУД.

уравнение (4) будет эквивалентно системе (1) с материальными уравнениями, соответствующими анизотропной среде

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} E_j, \quad B_i = \sum_{j=1}^3 \mu_{ij} H_j, \quad j_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} E_j.$$

Матрицы (5) назовем материальными. Уравнение (4) остается эквивалентным системе (1) при произвольном выборе матричных элементов r_1^i, r_2^i , которые для определенности назовем параметрами разделения.

Матричное уравнение в форме (4) является неоднородным и расширяет область применения матричного представления системы уравнений Максвелла на область анизотропных сред. Для случая $\rho=0$ и $j=0$ уравнение (4) становится однородным и его запись упрощается

$$\sum_{i=1}^4 \partial_i \xi^i \tilde{R}_i^a \Phi = 0. \tag{6}$$

Уравнения (6) по внешнему виду совпадают с уравнением (2). Однако сходство является не только внешним, т.к. в их основе лежит использование алгебры Клиффорда. Таким образом, матричная форма (4), (6) является перспективной для адаптации АМРП на решение задач электродинамики. Основным отличием является физика, определяющая материальные матрицы, и большая размерность матриц, делающая целесообразным создание и использование специализированной системы компьютерной алгебры.

Литература

1. М. Планк, Введение в теоретическую физику, Ч.3. Теория электричества и магнетизма. - М.:ГТТИ, 1933.
2. А.Д. Полянина, В.Ф. Зайцева, А.И. Журова, Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. - М.: Физматлит, 2005.
3. Андрушкевич И.Е., Шишкин Г.В. О критериях разделимости переменных в уравнении Дирака в гравитационных полях. Теор. и мат. физика. Т. 70. № 2. 1987. С. 289-302.
4. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. - М.: ГИТТЛ, 1956.
5. Бете Г.А. Квантовая механика. - М.:Мир, 1965.
6. Федоров Ф.И., Обобщенные релятивистские волновые уравнения. Доклад АН СССР, 1952, 82, 37.
7. Bludman S.A. Some theoretical consequences of particle having mass zero. Physical Review, 1951, № 78, С. 113.
8. Lomont J.S., Dirac-Like Wave Equations for Particles of Zero Rest Mass, and Their Quantization. Phys. Rev., 1958, 111 1710.
9. Боргардт А.А., Антикоммутирующие матрицы в теории мезона. Доклад АН СССР, 1951, Т. 78, № 6. С. 1113-1114.
10. Андрушкевич И.Е., Матричное представление системы уравнений Максвелла. «Ученые записки» УО «ВГУ им. П.М. Машерова», том 5. - Витебск 2006.

О РЕШЕНИЯХ В КЛАССАХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ИНВАРИАНТАМИ БИНАРНОЙ ФОРМЫ (АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ПРОГРАММНЫЙ АСПЕКТЫ)

Белемук О.В.

Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина, г. Брест

Рассматриваются нелинейные дифференциальные уравнения шестого порядка, левая часть которых является инвариантом бинарной формы по λ вида

$$uu^{(VI)} - 6u'u^{(V)} + 15u''u^{(IV)} - 10u'''^2 = \alpha(uu'' - u'^2) - \beta u^2, \quad (1)$$

α, β – параметры, уравнение вида:

$$\begin{vmatrix} u^{(VI)} & u^{(V)} & u^{(IV)} & u''' \\ u^{(V)} & u^{(IV)} & u''' & u'' \\ u^{(IV)} & u''' & u'' & u' \\ u''' & u'' & u' & u \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

а также соответствующие упрощенные уравнения.

Согласно [1] уравнение (1) при $\alpha=\beta=0$ имеет целый интеграл, зависящий от пяти произвольных постоянных, а уравнение (2) имеет целый общий интеграл. Используя тест Пенлеве [2], [3] и его уточнение [4], исследуем уравнение (1) и (2), а также используя алгоритм, изложенный в работе [5], находим рациональные решения для уравнений (1), (2). Кроме того, найдены классы решений уравнений (1), (2) отличные от приведенных в работе [1]. Построена программа в кодах СКА *Mathematica*, позволяющая находить рациональные решения и решения в виде специальных функций для дифференциальных уравнений подобного вида.

Литература

1. J. Cзасы. Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes. Acta Math. 34, – 1911, P. 317-385.
2. M.J. Ablowitz, A. Ramani and H. Segur. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. // J. Math. Phys., – 1980, v.21, P. 715-721.
3. М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. - М: Мир, 1987. – 444 с.
4. Н.А. Кудряшов. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва – Ижевск, 2004. – 360 с.
5. А.Г. Здунек, И.П. Мартынов, В.А. Пронько. О рациональных решениях дифференциальных уравнений. // Вестник ГрГУ. – 2000, № 3. – с. 33-39.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ СПОСОБОВ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ

Болтromeюк В. В.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Аппроксимация отражает одну из фундаментальных идей математики - приближение (замену) сложных объектов более простыми и удобными.

Пусть функция $y = f(x)$ задана своими значениями в некоторых, вообще говоря, произвольных n точках $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Важной задачей численного анализа является восстановление в аналитическом виде сеточного представления функции.

Существует ряд методов аппроксимации, среди которых наиболее эффективными считаются: аппроксимация тригонометрическими рядами Фурье, рядами Фурье по полиномам Чебышева 1-го рода, сплайн-аппроксимация.

Наиболее популярна в настоящее время сплайн-аппроксимация линейными и кубическими сплайнами.

Необходимость сплайн-аппроксимации состоит в том, что в отличие от алгебраического интерполирования, где при увеличении числа узлов увеличивается, как правило, степень интерполяционного полинома, в сплайн-аппроксимации можно работать со сплайнами невысокой степени, кроме того, при использовании сплайнов требования к гладкости функции предъявляются минимальные.

При использовании кубических сплайнов, которые имеют вид,

$P_i(x) = a_i + b_i * (x - x_i) + c_i * (x - x_i)^2 + d_i * (x - x_i)^3; i = 1, \dots, n - 1;$, мы имеем дело с трехдиагональными системами, для эффективного решения которых с успехом применяется метод матричной прогонки. Определяющие системы кубической сплайн-аппроксимации имеют вид :

$$a_i = f(x_i); \quad i = 1, \dots, n - 1; \quad (1)$$

$$b_i + c_i * h_i + d_i * h_i^2 = g_i; \quad i = 1, \dots, n - 1; \quad (2)$$

$$b_i + 2 * c_i * h_i + 3 * d_i * h_i^2 = b_{i+1}; \quad i = 1, \dots, n - 2; \quad (3)$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} + c_i}{3 * h_i}; \quad i = 1, \dots, n - 1; \quad (4)$$

$$c_1 = 0; c_n = 0; \quad (5)$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i; g_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i}; \quad i = 1, \dots, n - 1; \quad (6)$$

Подставив (4) в (2), получим :

$$b_i = g_i - \frac{1}{3} * h_i * (c_{i+1} + 2 * c_i); \quad i = 1, \dots, n - 1; \quad (7)$$

Подставив (4) и (7), в (3) получаем:

$$h_i * c_i + 2 * (h_i + h_{i+1}) * c_{i+1} + h_{i+1} * c_{i+2} = 3 * (g_{i+1} - g_i); \quad (8)$$

$$i = 1, \dots, n - 2;$$

Получили трехдиагональную систему относительно коэффициентов C_i , после вычисления которых, подставив их в формулы (7) и (4), получим остальные коэффициенты кубического сплайна.

При использовании тригонометрического ряда Фурье для периодических функций мы используем его дискретный аналог. Функция $f(x)$ заменяется функцией (9), коэффициенты которой (8)-(13) :

$$P_m(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^m \left(A_k \cos\left(2\pi k \frac{x-a}{b-a}\right) + B_k \sin\left(2\pi k \frac{x-a}{b-a}\right) \right); \quad x \in [a, b]; \quad (9)$$

$$A_0 = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j); \quad (10)$$

$$A_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \cos\left(2\pi k \frac{x_j - a}{b - a}\right); \quad (11)$$

$$B_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \sin\left(2\pi k \frac{x_j - a}{b - a}\right); \quad k = \overline{1, m}; \quad (12)$$

$$x_j = \frac{b - a}{2\pi} t_j + a; \quad t_j = \frac{2\pi j}{N}; \quad j = \overline{0, N - 1}. \quad (13)$$

В случае непериодической функции $f(x)$, как показывает вычислительная практика, использование рядов Фурье для аппроксимации функций оказывается нецелесообразным.

В этом случае эффективным способом аппроксимации является аппроксимация рядами Фурье по полиномам Чебышева 1-го рода. Максимальная погрешность интерполирования достаточно гладкой функции на отрезке $[0;1]$ многочленами n -й степени будет минимальна, когда в качестве узлов интерполяции берутся корни многочлена Чебышева. Ниже приводятся используемые формулы (15)-(18):

$$T_{n+1}(x) = 2 * x * T_n(x) - T_{n-1}(x); \quad T_0(x) = 1; \quad T_1(x) = x; \quad (14)$$

$$f(x) \approx P_m(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^m c_k T_k\left(\frac{2x - b - a}{b - a}\right); \quad (15)$$

$$c_k = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j) T_k\left(\frac{2x_j - b - a}{b - a}\right); \quad k = \overline{0, m}; \quad m + 1 \leq n; \quad (16)$$

$$x_j = \frac{b - a}{2} t_j + \frac{b + a}{2}; \quad t \in [-1, 1]; \quad x \in [a, b]; \quad (17)$$

$$t_j = \cos \frac{(2j - 1)\pi}{2n}, \quad j = \overline{1, n}; \quad (18)$$

Вычислительный эксперимент и его обсуждение.

Сравним аппроксимацию на отрезке $[0; \pi]$ некоторых функций:

Кол-во точек разбиения	Кол-во корней полинома Чебышева	Значение нормы в L_2		
		Ряд Фурье	Кубический сплайн	Полиномы Чебышева
$x * \exp(x)$				
51	10	7,6882E-17	3,91264E-3	1,57436E-7
101	30	2,3312E-16	7,09940E-4	1,24411E-13
1001	200	1,3801E-15	2,30121E-6	1,18074E-13
$\sin(x * x) * \exp(x)$				
51	10	1,9474E-17	5,39145E-3	0,08674
101	30	5,6417E-17	6,21925E-5	1,10747E-11
1001	200	2,9472E-16	1,49034E-6	1,2112 E-13

Для аппроксимации тригонометрическим рядом Фурье не целесообразно использовать большое количество точек, так как происходит накопление погрешности, а для аппроксимации рядом Фурье по полиномам Чебышева и кубическими сплайнами целесообразнее увеличение количества точек.

Литература

1. Монастырский, П.И., Сборник задач по методам вычислений / П.И. Монастырский. – 2-е изд. - Минск: Университетское, 2000. – 311 с.
2. Вержбицкий, В.М., Численные методы/В.М. Вержбицкий. – Минск: Высш. шк., 2002. – 840 с.
3. Корнейчук, Н.П., Сплаины в теории приближений / Н.П. Корнейчук. – Минск: Наука, 1984. – 352 с.
4. Богачев, К.Ю., Практикум на ЭВМ. Методы приближения функций / К.Ю. Богачев. – 3-е изд., перераб. и доп. – Минск: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 2002. – 192 с.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ КРИВЫХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Будько Д. А.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

1. Введение

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = P(t, e)x, \quad (1)$$

где $x(t)$ – вектор-функция времени t с компонентами $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, $P(t, e)$ – квадратная вещественная периодическая матрица n -го порядка, представимая в виде сходящегося ряда по степеням e :

$$P(t, e) = P_0 + e P_1(t) + e^2 P_2(t) + \dots \quad (2)$$

Здесь P_0 – постоянная матрица, $P_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) – непрерывные периодические матрицы периода T , e – малый параметр.

Системы вида (1) возникают во многих областях науки и имеют множество приложений [1]. В частности, системы такого вида описывают возмущённое движение в окрестности стационарных решений в ограниченной эллиптической задаче трех тел [2], а также при анализе устойчивости стационарных решений в ограниченных эллиптических задачах многих тел [3].

Исследование устойчивости систем вида (1) обычно начинается с определения областей линейной устойчивости решений системы (1) на плоскости параметров Oae . Известно, что решение системы (1) будет устойчивым при заданных значениях (a, e) , если все соответствующие характеристические показатели $\lambda = \pm i \sigma_{1,2}$ системы (1) являются различными чисто мнимыми числами. Далее в области линейной устойчивости требуется определить кривые, на которых выполняются условия резонансов третьего и четвертого порядков. Напомним, что точка (a, e) на плоскости параметров Oae

принадлежит резонансной кривой $\mu = \mu(e)$, если мнимые части соответствующих характеристических показателей системы удовлетворяют соотношению вида

$$n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 = N, \quad (3)$$

где n_j – целые числа, причем $|n_1| + |n_2| = k$, N – произвольное целое число, а значение числа k определяет порядок резонанса.

При заданных значениях параметров a и e характеристические показатели системы (1) могут быть вычислены с требуемой точностью. Поэтому стандартный подход к определению резонансных кривых системы (1) состоит в следующем. На плоскости параметров Oae вводится сетка с достаточно малым шагом по переменным a и e , и вычисляются характеристические показатели системы (1) в узлах сетки. По найденным значениям характеристических показателей определяют резонансные кривые. Очевидно, точность построения соответствующих кривых в этом случае зависит от величины шага сетки, а при высокой точности время вычислений может становиться весьма значительным.

В работах [4, 5] нами предложен эффективный алгоритм построения границ областей неустойчивости дифференциальных систем второго и четвертого порядков. Основная цель данной работы – показать, что предложенный алгоритм может быть успешно обобщён и применён также для построения резонансных кривых на плоскости параметров Oae системы (1). Все вычисления и построения выполнены с помощью системы компьютерной алгебры *Mathematica* [6].

2. Алгоритм вычисления и построение резонансных кривых

Рассмотрим гамильтонову систему четвертого порядка, описывающую возмущённое движение в окрестности треугольных лагранжевых решений плоской эллиптической ограниченной задачи трёх тел [2, 5, 7], матрицу-функцию которой можно представить в виде:

$$P(t, e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1+4e\cos t}{4(1+e\cos t)} & \frac{\kappa}{1+e\cos t} & 0 & 1 \\ \frac{\kappa}{1+e\cos t} & \frac{5-4e\cos t}{4(1+e\cos t)} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где κ – параметр, связанный с массами тел m_1 и m_2 соотношением [2]:

$$\kappa = 3\sqrt{3}(1-2\mu)/4, \quad \mu = m_2/(m_1+m_2).$$

Легко видеть, что при $e = 0$ система (1) с функцией (4) сводится к системе четырёх дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, характеристические показатели которой легко вычисляются и могут быть записаны в виде

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sigma_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\sigma_2, \quad (5)$$

где

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm \sqrt{1-27\mu+27\mu^2})^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Характеристические показатели (5) являются различными чисто мнимыми числами, если массовый параметр μ принадлежит интервалу

$$0 < \mu < \frac{1}{18}(9 - \sqrt{69}). \quad (7)$$

Известно [2, 7], что на этом интервале имеется пять значений параметра μ , соответствующих резонансам третьего порядка, и восемь значений μ , соответствующих резонансам четвертого порядка.

Поскольку характеристические показатели являются непрерывными функциями параметра e , резонансные кривые на плоскости $O\mu e$, во всех точках которых выполняются соотношения (3), должны пересекать ось $O\mu$. Это условие позволяет применить для их построения следующий оптимизированный алгоритм. Рассмотрим, например [7], точку $P(\frac{1}{24}(12 - \sqrt{139}), 0)$ на плоскости $O\mu e$ и построим полуокружность радиуса r с центром в этой точке (рис. 1). Далее рассмотрим некоторую последовательность точек P_j ($j = 1, 2, 3, \dots$), расположенных на этой полуокружности, и выберем из неё такую точку P_j , для которой резонансное соотношение выполняется наиболее точно.

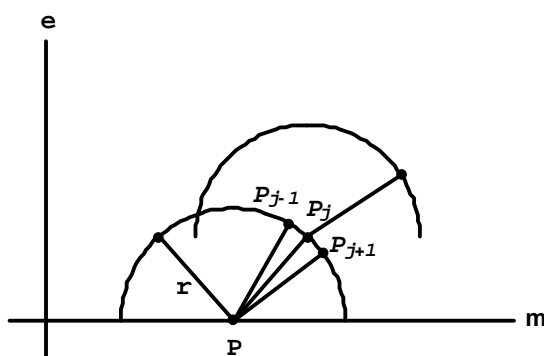


Рис.1. Алгоритм построения резонансных кривых

Отметим, что в окрестности этой точки на полуокружности всегда можно найти такую точку P_j^* , в которой резонансное соотношение выполняется с требуемой точностью. Далее строим новую полуокружность радиуса r с центром в точке P_j^* и повторяем вычисления. Так как характеристические показатели непрерывно зависят от e , достаточно рассмотреть лишь небольшую часть полуокружности в окрестности точки пересечения её с прямой PP_j^* . В конце работы алгоритма получаем некоторую последовательность точек, соединяя которые находим резонансную кривую с требуемой точностью. Таким образом, мы вычисляем характеристические показатели только в окрестности резонансных кривых, а не во всей рассматриваемой области, что позволяет значительно повысить точность вычислений и сократить время работы программы.

Выбирая для стартовых точек значения параметра μ , приведённые в [2, 7], мы вычислили резонансные кривые третьего и четвёртого порядков. Следует отметить, что не все кривые удалось построить. Трудности возникают при построении пересекающихся резонансных кривых, а также при их близком расположении друг к другу. Для их преодоления требуются дополнительные вычисления и соответствующая коррекция алгоритма.

Заключение

Полученные результаты мы сравнили с работой [7], где характеристические показатели, резонансные кривые и границы областей неустойчивости были найдены в виде степенных рядов по малому параметру. Оказалось, что для достаточно малых значений параметра e такие разложения дают хорошую аппроксимацию резонансных кривых и границ между областями устойчивости и неустойчивости. Но при значениях параметра e , близких к единице, более точные результаты получаются при использовании численных методов.

Литература

1. Якубович, В.А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами / В.А. Якубович, В.М. Старжинский. – М.: Наука, 1972. – 720 с.
2. Маркеев, А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике / А. П. Маркеев. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
3. Гребеников, Е.А. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел / Е.А. Гребеников, Д. Козак-Сковородкина, М. Якубяк. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во РУДН, 2002. – 209 с.
4. Budzko, D.A. Computing the stability boundaries for the Hill's equation / D.A. Budzko // Computer algebra in scientific computing: proc. of the international conference of young scientists CYS CASC'2006, Chisinau, Moldova, Sept. 11–15, 2006 / Technical university of Moldova; Eds.: E.A. Grebenikov [and others]. – Chisinau, 2006. – P. 15–20.
5. Budzko, D.A. Determination of the stability boundaries for the fourth order Hamiltonian system / D.A. Budzko // Computer Algebra Systems in Teaching and Research: proc. of the 4th International Workshop CASTR'2007, Siedlce, Poland, Jan. 31 – Feb. 3, 2007 / University of Podlasie; Eds.: L. Gadomski [and others]. – Siedlce, 2007. – P. 30–33.
6. Wolfram, S. The Mathematica book / S. Wolfram. – Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999. – 1470 p.
7. Прокопеня, А.Н. Об одном методе символьных вычислений характеристических показателей линейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / А.Н. Прокопеня // Сб. науч. тр. / Ин-т системного анализа РАН. – Москва, 2005. – Вып. 9(2): Динамика неоднородных систем. – С. 73-87.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СОСТОЯНИЙ ОДНОГО КЛАССА АВТОНОМНЫХ АВТОМАТОВ

Валуева Т.А.

НИИЦ ППМИ, Белорусский государственный университет, г. Минск

Введение

Рассмотрим автономный автомат, реализующий генератор, который состоит из нескольких регистров сдвига и блока управления движением регистров. По набору текущих состояний регистров блок управления определяет, на сколько шагов должен продвигнуться каждый из регистров за один такт работы генератора.

В работе [

1] была рассмотрена математическая модель данного автомата, согласно которой функционирование автомата описывается случайным блужданием на окружности или торе. При этом шаги, на которые сдвигаются регистры, принимают значения из множества $\{1, 2, \dots, K\}$, $K \in \mathbb{N}$. В работе [

1] получена вероятность того, что случайно выбранное состояние лежит на цикле длины n . В данной работе рассмотрен случай, когда каждый из регистров сдвига сдвигается на k или d шагов, $k, d \in \mathbb{N}$, $k \neq d$, найдено среднее время возвращения автомата в начальное состояние, и длина наиболее вероятного цикла, в случае, когда $d = k + 1$.

Вероятность появления цикла длины n

Рассмотрим автономный автомат U , реализующий генератор, состоящий из m линейных регистров сдвига LFSR _{i} , минимальные полиномы которых являются примитив-

ными полиномами степеней n_i , $i = \overline{1, m}$ (см. [2]). Обозначим через $Z = \{0,1\}$ множество выходов автомата U , через $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m$ — множество состояний, где S_i — множество ненулевых состояний регистра LFSR $_i$, $S_i(t)$ — состояние i -того регистра сдвига в момент времени t , $s(t) = (S_1(t), S_2(t), \dots, S_m(t))$ — состояние автомата в момент времени t , $t \geq 1$. Функция переходов состояний имеет следующий вид:

$$S_i(t+1) = S_i(t) \cdot A_i^{\overline{v_i(t)}}, \quad i = \overline{1, m},$$

где $\overline{v_i(1)}, \overline{v_i(2)}, \dots, \overline{v_i(t)}, \dots$ — реализация независимых в совокупности случайных величин $v_i(1), v_i(2), \dots, v_i(t), \dots$ с равномерным на множестве $\{k, d\}$ распределением, A_i — характеристическая матрица минимального полинома LFSR $_i$. Отметим, что данная модель задает класс автоматов мощности $2^{m(2^{n_1}-1)\dots(2^{n_m}-1)}$, каждый автомат которого определяется реализацией случайных величин $\{v_i(t)\}_{t=1}^{2^{m(2^{n_1}-1)\dots(2^{n_m}-1)}}$, $i = \overline{1, m}$.

Пусть $C(n)$ — множество циклических точек автомата U , лежащих на циклах длины n . Обозначим через $L = \max\{k, d\}$, $n_q = \max_{1 \leq i \leq m} n_i$ — степень минимального полинома регистра максимальной длины, $B(n, r) = n! / (2^n x_1! (n - x_1)!)$, где $x_1 = (r - nd) / (k - d)$. Положим $B(n, r) = 0$ в случае, когда $x_1 \notin \mathbb{N}$ или $n \leq x_1$.

Теорема 1. Пусть $s(1)$ — случайное начальное состояние автомата U , равномерно распределенное на множестве S , тогда

$$P\{s(1) \in C(n)\} \leq \prod_{i=1}^m \left(\sum_{\substack{(k+d-L)n / (2^{n_i}-1) \leq d_i \leq \\ Ln / (2^{n_i}-1)}} B(n, d_i (2^{n_i} - 1)) \right), \quad n \geq 1. \quad (1)$$

В случае $1 \leq n < 2 \max_{1 \leq i \leq m} \{(2^{n_i} - 1) / L\}$ в (1) имеет место равенство.

Замечание 1. Доказательство данной теоремы почти полностью повторяет доказательство теоремы 1 [1].

Следствие 1. При $d = k + 1$ и выполнении одного из условий:

1) $k > 0$ и $\max_{1 \leq i \leq m} \{2^{n_i} - 1\} / (k + 1) \leq n < \min_{1 \leq i \leq m} \{2^{n_i} - 1\} / k$,

2) $k = 0$ и $\max_{1 \leq i \leq m} \{2^{n_i} - 1\} < n < 2 \min_{1 \leq i \leq m} \{2^{n_i} - 1\}$,

соотношение (1) имеет вид:

$$P\{s(1) \in C(n)\} = \frac{1}{2^{mn}} \prod_{i=1}^m \left(\frac{n!}{((k+1)n - 2^{n_i} + 1)! (2^{n_i} - 1 - nk)!} \right). \quad (2)$$

Замечание 2. В случае, когда $\{v_i(t)\}_{t=1}^{2^{m(2^{n_1}-1)\dots(2^{n_m}-1)}}$, $i = \overline{1, m}$ независимые в совокупности случайные величины с распределением $P\{v_i(t) = k\} = p$, $P\{v_i(t) = k + 1\} = 1 - p$, а n удовлетворяет ограничениям следствия 1, формула (2) имеет вид:

$$P\{s(1) \in C(n)\} = \prod_{i=1}^m \left(\frac{n! p^{(k+1)n - 2^{n_i} + 1} (1-p)^{2^{n_i} - 1 - nk}}{((k+1)n - 2^{n_i} + 1)! (2^{n_i} - 1 - nk)!} \right). \quad (3)$$

Длина наиболее вероятного цикла есть $\arg \max_n P\{s(1) \in C(n)\}$. В случае, когда $d = k + 1$ и $n_1 = n_2 = \dots = n_m$, для некоторых значений $p = P\{v_i(t) = k\}$ приведем длину наиболее вероятного цикла. Обозначим через $K = 2^{n_1} - 1 = 2^{n_2} - 1 = \dots = 2^{n_m} - 1$. Поскольку максимум вероятностей, определенных в (2) и (3), доставляет вещественное число, а длина цикла — натуральное число, то в таблице 1 приведены нижние и верхние границы промежутка $[n_*, n^*]$, в котором содержится длина наиболее вероятного цикла, максимум берется по всем $n \in [N_1, N_2[$.

Таблица 1. Длина наиболее вероятного цикла

p	k	d	$n \in [N_1, N_2[$	n_*	n^*
$\frac{1}{2}$	1	2	$n \in [K/2, K[$	$\lfloor 2K/3 - 5/9 \rfloor$	$\lceil 2K/3 - 1/3 \rceil$
$\frac{1}{4}$	1	2	$n \in [K/2, K[$	$\lfloor 4K/7 - 33/49 \rfloor$	$\lceil 4K/7 - 3/7 \rceil$
$\frac{1}{2}$	0	1	$n \in [K, 2K[$	$2K - 1$	$2K - 1$
$\frac{1}{4}$	0	1	$n \in [K, 2K[$	$\lfloor 4K/3 - 1 \rfloor$	$\lceil 4K/3 - 1 \rceil$

Среднее время возвращения автомата в начальное состояние

Отметим, что в данном разделе, говоря о состоянии автомата, будем иметь в виду только те состояния, которые являются циклическими вершинами соответствующего автоматного графа. Тогда в качестве начального момента времени считаем тот момент, когда автомат попал в одно из вышеописанных состояний.

Теорема 2. Время T_i , через которое регистр LFSR_i вернется в начальное состояние, представимо в виде:

$$\sum_{j=1}^{T_i} v_i(j) = (2^{n_i} - 1) \cdot h_i, \quad h_i \in \{1, 2, \dots, \frac{|S|}{2^{n_i} - 1}\}, \quad \text{и } \forall t < T_i, \quad \sum_{j=1}^t v_i(j) < (2^{n_i} - 1) \cdot h_i. \quad (4)$$

В случае, когда $k = 0, d = 1, h_i = 1$.

Из теоремы 2 следует, что $T_i + 1$ есть значение процесса восстановления $\eta(t)$ в точке $t = (2^{n_i} - 1)h_i$, причем в случае $k = 0, d = 1$ данный процесс является непрерывным сверху (см. [3]).

Теорема 3. Пусть $k = 0, d = 1$, тогда среднее время, через которое регистр LFSR_i вернется в начальное состояние

$$E\{T_i\} = \frac{2^{n_i} - 1}{1 - p} - 1, \quad p = P\{v_i(1) = 0\}.$$

В случае, когда значения k, d не равны 0, 1, h_i принимает значение из множества $\{1, 2, \dots, |S|/(2^{n_i} - 1)\}$. Обозначим через $T_i(h_i)$ время, через которое регистр LFSR_i вернулся в начальное состояние только после h_i проходов своего периода. В данном случае момент первого возвращения регистра LFSR_i в начальное состояние есть $T_i(h_i) = \eta((2^{n_i} - 1)h_i) - 1$.

Теорема 4. Если все $\{v_i(j)\}, j = 1, 2, \dots$ одинаково распределены и $E\{v_i^2(j) < \infty\}$, то для математического ожидания времени возвращения LFSR_i в начальное состояние справедлива следующая оценка:

$$E\{T_i(h_i)\} = \frac{2^{n_i} - 1}{pk + (1-p)d} h_i - 1 + \frac{p(k^2 + k) + (1-p)(d^2 + d)}{2(pk + (1-p)d)^2} + o(1) \quad (5).$$

Замечание 3. Период последовательности состояний автомата U есть такое число T , для которого выполняются равенства (4) при всех $i = \overline{1, m}$. Очевидно, что в этом случае $h_q = \min_{1 \leq i \leq m} \{h_i\}$. Поскольку для T справедливо представление (4), то период последовательности состояний автомата есть $\eta(2^{n_q} - 1)h_q - 1$, где $h_q \in \{1, 2, \dots, |S| / (2^{n_q} - 1)\}$. Тогда, если $k = 0, d = 1$, то $E\{T(h_q)\} = (2^{n_q} - 1)h_q / (1 - p) - 1$. В других случаях для математического ожидания периода автомата U справедлива оценка (5).

В таблице 2 приведен сравнительный анализ результатов, полученных при изучении периодических свойств последовательности состояний автомата U . Отметим, что $E\{T(1)\}$ (LFSR $_q$ — регистр сдвига наибольшей длины, вернулся в начальное состояние после первого прохода своего периода), близко к длине наиболее вероятного цикла из промежутка $[K/(k+1), K/k[$, если $k > 0$, и $[K, 2K[$, в случае $k = 0$.

Таблица 2. Средний и наиболее вероятный период

p	k	d	$n \in [N_1, N_2[$	n_*	n^*	$E\{T\}$
$1/2$	1	2	$n \in [K/2, K[$	$\lfloor 2K/3 - 5/9 \rfloor$	$\lceil 2K/3 - 1/3 \rceil$	$2K/3 - 1/9 + o(1)$
$1/4$	1	2	$n \in [K/2, K[$	$\lfloor 4K/7 - 33/49 \rfloor$	$\lceil 4K/7 - 3/7 \rceil$	$4K/7 - 13/49 + o(1)$
$1/2$	0	1	$n \in [K, 2K[$	$2K - 1$	$2K - 1$	$2K - 1$
$1/4$	0	1	$n \in [K, 2K[$	$\lfloor 4K/3 - 1 \rfloor$	$\lceil 4K/3 - 1 \rceil$	$4K/3 - 1$

Литература

1. Михайлов В.Г. //Труды по дискретной математике. 2002. Т. 5. С. 167.
2. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля: В 2т. М., 1988. - Т.2. С. 495.
3. Боровков А. А. Теория вероятностей. - М., 2003.

СХОДИМОСТЬ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРАВИЛОМ ОСТАНОВА ПО НЕВЯЗКЕ

Василькович С.И., Савчук В.Ф.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Для решения операторного уравнения $Ax = y$ в гильбертовом пространстве H с положительным самосопряженным ограниченным оператором A предлагается итерационный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^2 x_n + A^{-1} [E - (E - \alpha A)^2] y, x_0 = 0. \quad (1)$$

Здесь нуль не является собственным значением оператора A , поэтому решение единственно. Однако $0 \in SpA$ и, значит, рассматриваемая задача неустойчива, т.е. некорректна. Предполагается, что при точной правой части уравнения y существует точное решение x .

Обычно правая часть уравнения известна с некоторой погрешностью δ , т.е. известен y_δ , для которого $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. Поэтому вместо (1) приходится рассматривать приближения

$$x_{n+1, \delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n, \delta} + A^{-1} [E - (E - \alpha A)^2] y_\delta, x_{0, \delta} = 0. \quad (2)$$

Показано, что метод (2) сходится при условии $0 < \alpha \leq \frac{2}{\|A\|}$, если число итераций n выбирать из условия $n\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$. В случае априорного выбора числа итераций для получения оценок погрешности и априорного момента останова требуется предположение об истокорпредставимости точного решения, т.е. $x = A^s z, s > 0$.

Метод (2) можно сделать вполне эффективным и в случае, когда нет сведений об истокорпредставимости точного решения, если воспользоваться правилом останова по невязке. Зададим $\varepsilon > 0$ и момент m останова итерационного процесса (2) условием

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \quad (n < m), \quad \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \quad (3)$$

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε , т.е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила (3) к методу (2). Метод (2) с остановом (3) является сходящимся, если $\lim_{\delta \rightarrow 0} (\inf_m \|x - x_{m,\delta}\|) = 0$. Рассмотрим функцию $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha\lambda)^2]$. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ выполняются условия:

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq 2n\alpha, \quad n > 0, \quad M = \|A\|, \quad 0 < \alpha < 2/M, \quad (4)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq 1, \quad 0 < \alpha < 2/M, \quad (5)$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \forall \lambda \in (0, M], \quad 0 < \alpha < 2/M, \quad (6)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \left(\frac{s}{2\alpha e}\right)^s n^{-s}, \quad n > 0, \quad 0 \leq s < \infty, \quad 0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}. \quad (7)$$

Аналогично [1] доказываются леммы.

Лемма 1. Пусть $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$, Тогда для любого $w \in H$ выполняется $(E - Ag_n(A))w \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Лемма 2. Пусть $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$, Тогда для любого $v \in \overline{R(A)}$ имеет место соотношение $n^s \|A^s (E - Ag_n(A))v\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, 0 \leq s < \infty$.

Лемма 3. Пусть $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$, Если для некоторых $n_p < \bar{n} = \text{const}$ и $v_0 \in \overline{R(A)}$ при $p \rightarrow \infty$ имеем $w_p = A(E - Ag_{n_p}(A))v_0 \rightarrow 0$, то $v_p = (E - Ag_{n_p}(A))v_0 \rightarrow 0$.

Используем леммы 1-3 при доказательстве следующих теорем.

Теорема 1. Пусть $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$, и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в методе (2) выбирается по правилу (3). Тогда метод (2) сходится.

Доказательство.

По индукции нетрудно показать, что $x_{n,\delta} = A^{-1} [E - (E - \alpha A)^{2n}] y_\delta$.

Тогда,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \quad (8)$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A(E - Ag_n(A))x - (E - Ag_n(A))(y_\delta - y). \quad (9)$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (10)$$

$$\sigma_n = n\|A(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Кроме того, из (4) и (5) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq 2\alpha m \delta, \quad (12)$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \leq 1. \quad (13)$$

Применим правило останова (3). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq b\delta, b > 1$ и из (9) и (13) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \leq \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \leq (b + 1)\delta. \quad (14)$$

Для любых $n < m$ справедливо неравенство $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Поэтому

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \geq (b - 1)\delta. \quad (15)$$

Из (11) и (15) при $n = m - 1$ получаем $\frac{\sigma_{m-1}}{m-1} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \geq (b - 1)\delta$ или,

что то же, $(m - 1)\delta < \frac{\sigma_{m-1}}{m-1} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$, (так как из (11) $\sigma_{m-1} \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$). Если при этом $m \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$, то, используя (8), получим $\|x_{m,\delta} - x\| \leq \|A(E - Ag_m(A))x\| + 2\alpha m \delta \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$, так как из (10) вытекает $\|A(E - Ag_m(A))x\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$.

Если же для некоторых δ_n последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае нетрудно показать, что $x_{m(\delta_n),\delta_n} \rightarrow x, \delta_n \rightarrow 0$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $x = A^s z, s > 0$, тогда справедливы оценки

$$m(\delta) \leq 1 + \frac{s+1}{2\alpha\varepsilon} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{\frac{s}{s+1}},$$

$$\|x_{m(\delta),\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{s(s+1)} \|z\|^{\frac{s}{s+1}} + 2\alpha \left\{ 1 + \frac{s+1}{2\alpha\varepsilon} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{\frac{s}{s+1}} \right\} \delta. \quad (16)$$

Доказательство

Имеем

$$\begin{aligned} \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| &= \|A^{s+1}(E - Ag_{m-1}(A))z\| = \left\| \int_0^M \lambda^{s+1} (I - \alpha\lambda)^{2(m-1)} dE_\lambda z \right\| \leq \\ &\leq (s+1)^{s+1} [2(m-1)\alpha\varepsilon]^{-(s+1)} \|z\|. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (15), получим

$$(b-1)\delta \leq (s+1)^{s+1} [2(m-1)\alpha\epsilon]^{-(s+1)} \|z\|, \text{ откуда } m \leq 1 + \frac{s+1}{2\alpha\epsilon} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{\frac{1}{s+1}}.$$

При помощи неравенства моментов оценим норму

$$\|(E - Ag_m(A))x\| \leq \|A(E - Ag_m(A))x\|^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} \leq [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}. \text{ (см. (14)).}$$

Тогда, поскольку соотношение (8) справедливо для любых n , то

$$\begin{aligned} \|x_{m,\delta} - x\| &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 2m\alpha\delta \leq \\ &\leq [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 2\alpha \left\{ 1 + \frac{s+1}{2\alpha\epsilon} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{\frac{1}{s+1}} \right\} \delta. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Порядок оценки (16) есть $O(\delta^{s(s+1)})$ и он оптимален в классе задач с истокорпредставимыми решениями $x = A^s z, s > 0$.

Замечание 2. Хотя формулировка теоремы 2 даётся с указаниями степени представимости s и истокорпредставимого элемента z , на практике их значение не потребуется, так как они не содержатся в правиле останова (1). И тем не менее в теореме 2 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m , обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокорпредставимость точного решения отсутствует, останова по невязке (1), как показывает теорема 1, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризирующие свойства.

По мажорантным оценкам погрешности метод (2) не имеет преимуществ по сравнению с широко известным методом простой итерации

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y - Ax_{n,\delta}), x_{0,\delta} = 0$$

Его преимущество состоит в следующем: для достижения оптимальной точности методом (2) нужно сделать в 2 раза меньше итераций, чем методом простой итерации.

Литература

1. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах/ Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретейников. – М.: Наука, 1986. – 176 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МОМЕНТОВ ОСРЕДНЕННОЙ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Войнов А.Ф., Мирская Е.И.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Среди непараметрических методов спектрального оценивания одним из наиболее распространённых является метод Уэлча, в котором для построения оценки спектральной плотности производится осреднение периодограмм, построенных по непересекающимся интервалам исходной последовательности наблюдений, и вводятся окна просмотра данных для уменьшения смещения оценок.

Оценки такого вида были исследованы П.Уэлчем для гауссовских процессов. В данной работе обобщаются результаты, полученные Уэлчем на многомерные временные ряды и произвольные окна просмотра данных. Исследуется асимптотическое поведение и скорость сходимости моментов построенной оценки.

Рассмотрим действительный g -мерный стационарный случайный процесс $X(t) = \{X_a(t), a = \overline{1, r}\}$, $t \in Z$, с $MX_a(t) = 0$, $a = \overline{1, r}$, с неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$, $a, b = \overline{1, r}$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$.

В работе в качестве оценки взаимной спектральной плотности исследована статистика вида

$$\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L I_{ab}(\lambda, l), \quad (1)$$

$\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$, $a, b = \overline{1, r}$, построенная по $T = LN - (L-1)K$ наблюдениям, где L - число пересекающихся интервалов, содержащих по N наблюдений, K, L - целые числа, не зависящие от T , а $I_{ab}(\lambda, l)$ - модифицированная периодограмма. Вычислены математическое ожидание, дисперсия и ковариация оценки (1). Показано, что эта оценка является асимптотически несмещённой оценкой взаимной спектральной плотности $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, $a, b = \overline{1, r}$, а

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{cov} \left\{ \hat{f}_{a_1 b_1}(\lambda_1), \hat{f}_{a_2 b_2}(\lambda_2) \right\} = 0, \quad (2)$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$, $\lambda_1 \pm \lambda_2 \neq 0 \pmod{2\pi}$, $a_i, b_i = \overline{1, r}$, $i = \overline{1, 2}$.

В данной работе исследуется скорость сходимости математического ожидания и ковариации статистики (1), в предположении, что $f_{ab}(\lambda)$, $a, b = \overline{1, r}$, $\lambda \in \Pi$, удовлетворяет условию:

$$|f_{ab}(x+\lambda) - f_{ab}(\lambda)| \leq C|x|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (3)$$

для любых $x \in \Pi$, C - некоторая положительная постоянная $a, b = \overline{1, r}$.

Для одномерного стационарного случайного процесса скорость сходимости первых двух моментов оценки (1) исследована в работе [2].

Лемма 1. Для ядра $\Phi_{ab}(x)$, $a, b = \overline{1, r}$, $x \in \Pi$, заданного выражением

$$\Phi_{ab}(x) = \left[2\pi \sum_{p=0}^{N-1} h_a(p) h_b(p) \right]^{-1} \varphi_a(x) \overline{\varphi_b(x)}, \quad (4)$$

где

$$\varphi_a(x) = \sum_{p=0}^{N-1} h_a(p) e^{ipx}, \quad (5)$$

при любом $\beta > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Pi} |x|^\beta \cdot |\Phi_{ab}(x)| dx = 0, \quad (6)$$

$h_a^N(p)$, $a = \overline{1, r}$ - окна просмотра данных.

Теорема 1. Если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, $a, b = \overline{1, r}$, удовлетворяет соотношению (3), то для математического ожидания оценки $\hat{f}_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, задаваемой (1), имеет место равенство

$$\left| M \hat{f}_{ab}(\lambda) - f_{ab}(\lambda) \right| = O \left(\int_{\Pi} |x|^\alpha |\Phi_{ab}(x)| dx \right),$$

$0 \leq \alpha < 1$, где $\Phi_{ab}(x)$, $x \in \Pi$, $a, b = \overline{1, r}$, задаётся соотношением (4).

Доказательство следует из условия (3) и теоремы 1 работы [1].

Теорема 2. Если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$,

$a, b = \overline{1, r}$, ограничена на Π , семиинвариантная спектральная плотность 4-го порядка непрерывна в точке $(\lambda_1, -\lambda_1, -\lambda_2)$ и ограничена на Π^3 , окна просмотра данных $\overline{h_{a_i}^N(t)}$, $t \in R$, $a = \overline{1, r}$ ограничены единицей и имеют ограниченную вариацию, выполняется соотношение

$$\sup_N \iiint_{\Pi^3} |\Phi_{a_1 b_1 a_2 b_2}(u_1, u_2, u_3)| du_1 du_2 du_3 \leq C \quad (7)$$

где C - некоторая постоянная,

$$\Phi_{a_1 b_1 a_2 b_2}(u_1, u_2, u_3) = \left((2\pi)^3 \sum_{p=0}^{N-1} h_{a_1}^N(p) h_{b_1}^N(p) h_{a_2}^N(p) h_{b_2}^N(p) \right)^{-1} \varphi_{a_1}(u_1) \varphi_{b_1}(u_2) \varphi_{a_2}(u_2) \varphi_{b_2}(u_1 + u_2 + u_3),$$

а $\varphi_a(x)$ задаётся соотношением (5), то для ковариации оценки $\hat{f}_{ab}(\lambda)$, $a, b = \overline{1, r}$, $\lambda \in \Pi$, заданной (1), имеет место равенство:

$$\text{cov} \left\{ \hat{f}_{a_1 b_1}(\lambda_1), \hat{f}_{a_2 b_2}(\lambda_2) \right\} = o\left(\frac{1}{LN}\right),$$

$$a_i, b_i = \overline{1, r}, i = \overline{1, 2}, \lambda_1 \pm \lambda_2 \neq 0 \pmod{2\pi}, \lambda_1, \lambda_2 \in \Pi.$$

Доказательство. Ковариация оценки взаимной спектральной плотности $\hat{f}_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$ может быть представлена в виде суммы трёх слагаемых A_1 , A_2 и A_3 . Рассмотрим каждое из них.

$$\begin{aligned} |A_1| &\leq \left| \frac{(2\pi)^3}{L} C_2 \iiint_{\Pi^3} \Phi_{a_1 b_1 a_2 b_2}(y_1, y_2, y_3) P_L[(N-K)(y_1 + y_2)] \times \right. \\ &\quad \left. \times (f_{a_1 b_1 a_2 b_2}(y_1 + \lambda_1, y_2 - \lambda_1, y_3 - \lambda_2) - f_{a_1 b_1 a_2 b_2}(\lambda_1, -\lambda_1, -\lambda_2)) \right| dy_1 dy_2 dy_3 + \\ &\left| \frac{(2\pi)^3}{L} C_2 \iiint_{\Pi^3} \Phi_{a_1 b_1 a_2 b_2}(y_1, y_2, y_3) P_L \times [(N-K)(y_1 + y_2)] \times f_{a_1 b_1 a_2 b_2}(\lambda_1, -\lambda_1, -\lambda_2) \right| dy_1 dy_2 dy_3 = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

где

$$P_L[(N-K)(y_1 + y_2)] = \frac{1}{(2\pi)^2 L} \frac{\sin^2 \frac{L(N-K)(y_1 + y_2)}{2}}{\sin^2 \frac{(N-K)(y_1 + y_2)}{2}}.$$

$$\begin{aligned} I_1 &\leq 2\pi C_2 \iiint_{\Pi_1} |\Phi_{a_1 b_1 a_2 b_2}(y_1, y_2, y_3)| \times \\ &\quad \times (f_{a_1 b_1 a_2 b_2}(y_1 + \lambda_1, y_2 - \lambda_1, y_3 - \lambda_2) - f_{a_1 b_1 a_2 b_2}(\lambda_1, -\lambda_1, -\lambda_2)) | dy_1 dy_2 dy_3 + 2\pi C_2 \times \\ &\quad \times \iiint_{\Pi_2} |\Phi_{a_1 b_1 a_2 b_2}(y_1, y_2, y_3)| |f_{a_1 b_1 a_2 b_2}(y_1 + \lambda_1, y_2 - \lambda_1, y_3 - \lambda_2) - f_{a_1 b_1 a_2 b_2}(\lambda_1, -\lambda_1, -\lambda_2)| dy_1 dy_2 dy_3 = I_{11} + I_{12}. \end{aligned}$$

Учитывая непрерывность семиинвариантной спектральной плотности 4-го порядка в точке $(\lambda_1, -\lambda_1, -\lambda_2)$ и соотношение (7), можно показать, что

$$I_{11} = o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Рассмотрим I_{12} . Так как семиинвариантная спектральная плотность 4-го порядка ограничена на Π^3 и используя неравенство Гёльдера получим

$$I_{12} = O\left(\frac{1}{N\sqrt{N}}\right).$$

Рассмотрим I_2 . Так как

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \iiint_{\Pi^3} \Phi_{a_1 b_1 a_2 b_2}(y_1, y_2, y_3) P_L \times [(N-K)(y_1 + y_2)] dy_1 dy_2 dy_3 = \frac{1}{(2\pi)^2},$$

то $I_2 = O\left(\frac{1}{LN}\right)$. Откуда $A_1 = O\left(\frac{1}{LN}\right)$.

Рассмотрим A_2 .

$$|A_2| \leq \frac{(2\pi)^2}{L} C_3 \max_z |f_{a_1 b_2}(z)| \max_u |f_{b_1 a_2}(u)| \times \iint_{\Pi^2} |\Phi_{a_1 b_2}(z - \gamma, z + \gamma)| \cdot |\Phi_{b_1 a_2}(z + \gamma, z - \gamma)| \times P_L [(N-K)(z+u)] dudz.$$

Учитывая ограниченность $f_{ab}(x)$ на Π , получим

$$A_2 = O\left(\frac{1}{LN}\right).$$

Аналогично $A_3 = O\left(\frac{1}{LN}\right)$. Теорема доказана.

Для окон просмотра данных Дирихле, Фейера, Рисса, Гаусса, Хэмминга построены графики оценки взаимной спектральной плотности, заданной выражением (1). Проведен сравнительный анализ дисперсии в зависимости от окон просмотра данных. Дисперсия минимальная для оценки, построенной с использованием окна Хэмминга.

Литература

1. Труш, Н. Н. Статистические свойства оценок спектральных плотностей по пересекающимся интервалам наблюдений / Н. Н. Труш, Е. И. Мирская // Проблемы компьютерного анализа данных и моделирования : сб. науч. ст. / Белорус. гос. ун-т ; под ред. Ю. С. Харина. – Минск, 1991. – С. 180–186.
2. Труш, Н. Н. О скорости сходимости моментов оценок спектральных плотностей / Н. Н. Труш, Е. И. Мирская // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1996. – №4. – С. 54–59.

О НЕЛОКАЛЬНЫХ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Воловод Ю. А., Павлюкевич А. Н.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Целью нашей курсовой работы было сравнение и анализ различных методов решения систем нелинейных уравнений вида:

$$f(x)=0 \tag{1}$$

Объектом нашего изучения являлись:

1. Нелокальные нерегуляризованные итерационные процессы, реализующие процедуру неполного прогноза-коррекции;

2. Нелокальные нерегуляризованные итерационные процессы, реализующие процедуру полного прогноза-коррекции;

3. Нелокальные регуляризованные итерационные процессы, реализующие процедуру полного прогноза-коррекции.

Мы рассматривали «итерационный процесс» в предположении, что оператор f в интересующей нас области D удовлетворяет следующим условиям:

$$f \in C_D^{(2)}, \left\| [f'(x)]^{-1} \right\| \leq B, \left\| f''(x) \right\| \leq K, \quad \forall x \in D. \quad (2)$$

На первом шаге решалась СЛАУ для определения поправки Δx_n :

$$f'(x)\Delta x_n = -f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

На втором шаге производилось уточнение вектора x_n :

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}] \quad (4)$$

На третьем шаге производилась проверка окончания итерационного процесса: если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, то конец расчётов, иначе переходим на шаг четыре.

На четвёртом шаге осуществляем вычисление нового значения для переменной β : если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} = 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min \left(1, \frac{\|f(x_n)\| \gamma_n}{\|f(x_{n+1})\| \beta_n} \right), \quad \gamma_{n+1} = \frac{\|f(x_n)\| \gamma_n}{\|f(x_{n+1})\|}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \gamma_0 = \beta_0^2 \quad (5)$$

и переходим на шаг 1.

Предлагаемый выше метод носит название нелокального нерегуляризованного итерационного процесса, реализующего процедуру неполного прогноза-коррекции

Теорема 1 [1] Пусть оператор f удовлетворяет условиям (2), и в D существует x^* -решение системы (1) $f(x)=0$, начальное приближение x_0 и шаговая длина β_0 таковы, что выполняется условие $\varepsilon_0 = 0.5 \beta_0 K B^2 \|f(x_0)\| < 1$. Тогда итерационный процесс, описанный на шагах 1-4, со сверхлинейной скоростью сходится к x^* .

Сходимость данного метода для выбранной системы в основном зависит от следующих факторов:

1. От удачного выбора начальных приближений;
2. От выбора параметра β ;
3. От выбора точности расчётов нелинейной системы.

Другой нелокальный нерегуляризованный итерационный процесс, реализующий процедуру неполного прогноза-коррекции основан на том, что шаговая длина β_{n+1} находится по формулам:

$$\beta_{n+1} = \min \left(1, \frac{w_n}{\alpha \beta_n \|f(x_{n+1})\|} \right), \quad w_{n+1} = (1 - \beta_{n+1}) w_n + \beta_{n+1}^2 \beta_n \|f(x_{n+1})\|$$

$$w_0 = \gamma \|f(x_0)\|; \quad \alpha > 1, \quad \gamma \ll 1.$$

Сформулируем теорему для вышеописанного метода.

Теорема 2 [1] Пусть оператор f удовлетворяет условиям (2), и в D существует x^* - решение системы (1) $f(x)=0$, начальное приближение x_0 и шаговая длина β_0 таковы, что выполняются условия:

$$\text{а) } \beta_0 \frac{KB^2 \|f(x_0)\|}{2} = l_0 < 1; \text{ б) } \frac{\gamma}{\alpha \beta_0^2} < 1; \text{ в) } \varepsilon_0 = 0.5 \beta_0 KB^2 \|f(x_0)\| < 1.$$

Тогда итерационный процесс, описанный на шагах 1-4, со сверхлинейной скоростью сходится к x^* .

Третий и четвёртый из рассмотренных нами методов являются методом полного прогноза. Один из них является нерегуляризованным, а другой метод – регуляризованным. Опишем третий метод:

На первом шаге решалась СЛАУ для определения поправки Δx_n :

$$f'(x_n) \Delta x_n = -f(x_n), n = 0, 1, 2, \dots$$

На втором шаге производилась проверка окончания итерационного процесса:

если $\|f(x_n + \Delta x_n)\| < \|f(x_n)\|$, то β_n принимает значение 1, иначе определяется новая шаговая длина β_n по формулам:

$$\beta_n = \min \left(1, \frac{w(x_n, 0)}{\alpha \beta_{n-1} \|f(x_n + \Delta x_n)\|} \right), \beta_{-1} \in (10^{-4}, 1), \alpha > 1,$$

$$w_{n+1} = w(x_n, \beta_n) = (1 - \beta_n) w(x_n, 0) + \beta_n^2 \beta_{n-1} \|f(x_n + \Delta x_n)\|,$$

$$w_0 = \gamma \|f(x_0)\|, \gamma \ll 1$$

На третьем шаге производилось уточнение вектора x_n :

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n.$$

На четвёртом шаге производилась проверка окончания итерационного процесса:

если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, то конец расчётов, иначе переходим на шаг один.

Сформулируем теорему для вышеописанного метода:

Теорема 3 [1] Пусть оператор f удовлетворяет условиям (2), и в D существует x^* - решение системы (1) $f(x)=0$, начальное приближение x_0 и шаговая длина β_0 таковы, что выполняется условие $\varepsilon_0 = 0.5 \beta_0 KB^2 \|f(x_0)\| < 1$. Тогда итерационный процесс, описанный на шагах 1-4, со сверхлинейной скоростью сходится к x^* .

Четвёртый метод заключался в реализации следующих шагов:

на первом шаге решалась СЛАУ для определения поправки Δx_n :

$$\left(\delta \beta_{n-1}^2 \|f(x_n)\|^2 E + \overline{f'(x_n)} f'(x_n) \right) \Delta x_n = -\overline{f'(x_n)} f(x_n)$$

$$\beta_{-1} \in [10^{-3}, 10^{-1}], \delta \ll 1; n = 0, 1, 2, \dots$$

На втором шаге производилась проверка окончания итерационного процесса:

если $\|f(x_n + \Delta x_n)\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_n = 1$, иначе вычитываем значение переменных β_n и w_{n+1} по следующим формулам:

$$\beta_n = \min \left(1, \frac{w(x_n, 0)}{\alpha \beta_{n-1} \|f(x_n + \Delta x_n)\|} \right), \beta_{-1} \in (10^{-4}, 1), \alpha > 1,$$

Сравнение нерегуляризованных и регуляризованных методов показывает, что общее время работы регуляризованных методов меньше как минимум в два раза, чем работа нерегуляризованных методов.

Литература

1. Мадорский В.М., Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений – Брест, 2005.
2. Вержбицкий, В.М., Численные методы / В.М. Вержбицкий. – Минск: Высш. шк., 2002. – 840 с..
3. Ермаков В.В., Калиткин Н.Н. Оптимальный шаг и регуляризация в методе Ньютона // Ж. вычисл. Матем. Физ. – 1981.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ ДЛЯ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ I РОДА

В. Ю. Гондюк, В. Ф. Савчук

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, г. Брест

В действительном гильбертовом пространстве H решается уравнение 1 рода

$$Ax = y, \quad (1)$$

где A - ограниченный, положительный, самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением. Причем нуль принадлежит спектру оператора A , т.е. задача некорректна. Предполагается существование единственного решения x при точной правой части y . Для его отыскания предлагается итеративный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^2 x_n + 2\alpha y - \alpha^2 Ay, \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

Однако на практике часто правая часть y уравнения (1) бывает неизвестной, а вместо y известно приближение $y_\delta : \|y - y_\delta\| \leq \delta$, тогда метод (2) примет вид:

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta - \alpha^2 Ay_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим сходимость процессов (2) и (3) в энергетической норме

$$\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}, \text{ где } x \in H.$$

При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ .

Полагаем, что $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \quad (4)$$

Запишем первое слагаемое в виде $x - x_n = A^{-1}(E - \alpha A)^{2n} y = (E - \alpha A)^{2n} x$.

При $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$ имеем $\|E - \alpha A\| < 1$, поэтому $x - x_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Однако скорость

сходимости к нулю может быть сколь угодно малой, и для ее оценки требуется дополнительное предположение об истокорпредставимости точного решения.

Использование энергетической нормы позволяет получить априорную оценку погрешности метода (3) и априорный момент останова без требования истокорпредставимости точного решения. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора имеем

$$\|x - x_n\|_A^2 = (A(E - \alpha A)^{2n} x, (E - \alpha A)^{2n} x) = \int_0^M \lambda (1 - \alpha \lambda)^{4n} d(E_\lambda x, x), \quad M = \|A\|, \quad E_\lambda - \text{соответствующая спектральная функция.}$$

Нетрудно доказать, что при условии $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$

$$\max |\lambda(1 - \alpha\lambda)^{4n}| \leq (4n\alpha e)^{-1}.$$

Для второго слагаемого в (4) при условии $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$ доказаны неравенства:

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \left(\frac{5}{2}n\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \delta, \quad n \geq \frac{1}{2}, \quad (5)$$

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \left(\frac{35}{27}n\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \delta, \quad n \geq 1. \quad (6)$$

Поскольку

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + \left(\frac{35}{27}n\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \delta, \quad n \geq 1$$

и $\|x - x_n\|_A \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ достаточно, чтобы $\sqrt{n}\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$.

Таким образом, если в процессе (3) выбрать число итераций $n = n(\delta)$ зависящим от δ так, что $\sqrt{n}\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$, то получим регуляризованный метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3) при выполнении условия

$$0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$$

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq (4n\alpha e)^{-\frac{1}{2}} \|x\| + \left(\frac{5}{2}n\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \delta, \quad n \geq \frac{1}{2}.$$

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq (4n\alpha e)^{-\frac{1}{2}} \|x\| + \left(\frac{35}{27}n\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \delta, \quad n \geq 1 \quad (7)$$

Итак доказаны:

Теорема 1. Итерационный процесс (3) при условии $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$ сходится в энергетической норме гильбертова пространства H , если выбирать число итераций n из условия $\sqrt{n}\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$.

Теорема 2. При условии $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$ для метода (3) справедливы оценки погрешности (7) в энергетической норме гильбертова пространства H .

Оптимизируем полученную оценку (7) по n , т.е. при заданном δ найдем такое значение числа итераций n , при котором оценка погрешности становится минимальной.

Приравняв нулю производную по n от правой части неравенства (7) и проведя ряд преобразований, получим

$$n_{opt} = \left(\frac{35}{27}\right)^{-\frac{1}{2}} (2\alpha\delta)^{-1} e^{-\frac{1}{2}} \|x\|. \quad (8)$$

Подставив n_{opt} в оценку (7), получим ее оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{opt} \leq \left(\frac{35}{27}\right)^{\frac{1}{4}} (2\delta\|x\|)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}}. \quad (9)$$

Из (9) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α , но от него зависит n_{opt} . Поэтому для уменьшения n_{opt} и, значит, объема вычислительной работы, следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$ и так, чтобы n_{opt} было целым. Таким образом, доказана

Теорема 3. При условии $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$ оптимальная оценка погрешности для метода (3) имеет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{opt} \leq \left(\frac{35}{27}\right)^{\frac{1}{4}} (2\delta\|x\|)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}}$$

и получается при

$$n_{opt} = \left(\frac{35}{27}\right)^{\frac{1}{2}} (2\alpha\delta)^{-1} e^{-\frac{1}{2}} \|x\|.$$

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H . Эти условия дает

Теорема 4. Если выполнены условия:

1) $E_{\varepsilon} x_{n,\delta} = 0$, 2) $E_{\varepsilon} x = 0$, где $E_{\varepsilon} = \int_0^{\varepsilon} dE_{\lambda}$, ε - фиксированное положительное число ($0 < \varepsilon < \|A\|$), то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.

Замечание 1. Так как $x_{n,\delta} = A^{-1} [E - (E - \alpha A)^{2n}] y_{\delta}$, то для того, чтобы $x_{n,\delta}$ удовлетворяло условию $E_{\varepsilon} x_{n,\delta} = 0$, достаточно потребовать, чтобы $E_{\varepsilon} y_{\delta} = 0$. Т.о., если $E_{\varepsilon} x = 0$ и $E_{\varepsilon} y_{\delta} = 0$, то из сходимости итераций в энергетической норме следует их сходимость в обычной норме пространства H .

Замечание 2. Использование энергетической нормы позволило нам получить оценки погрешности метода и априорный момент останова n_{opt} без требования знания искомого представления точного решения, что делает метод (3) эффективным и тогда, когда нет сведений об искомообразной представимости точного решения.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКОГО ПЕРЕНОСА В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ НА ОСНОВЕ LBE-АЛГОРИТМОВ

Ивашкевич Е.В.

Белорусский государственный университет, г. Минск

В последние 5 лет наблюдается значительный рост интереса к изучению явления электрокинетического переноса вещества, энергии и электрических зарядов. Это объясняется важностью электрокинетического массо- и теплопереноса в практических областях, связанных с разработкой и производством электромеханических систем на микро- и наномасштабах, а также топливных элементов.

Целью данной работы является разработка численной модели электрокинетического переноса в неоднородных системах на основе решёточных методов.

С термодинамической точки зрения, массоперенос в жидкости под действием внешнего приложенного электрического поля описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных [1]: Навье-Стокса (гидродинамика), Пуассона (электростатика) и Нернста-Планка (конвекция и диффузия электрически нейтральных и заряженных частиц).

Теоретические основы электрокинетических явлений, заложенные в разработанную модель, имеют следующие приближения: система является изотермической, система находится в стационарном состоянии, вязкость в системе постоянна, диэлектрические константы не зависят от напряженности электрического поля, диэлектрические константы не зависят от плотности жидкости.

В основу построенной модели были положены разработанные в течение последних 10 лет альтернативные классическим конечно-разностным приближениям методы, основанные на решеточной схеме для каждого из уравнений: LPM (Lattice Poisson method) [2] для уравнения Пуассона, LCDM (Lattice Convection-Diffusion Method) [3] для стационарного уравнения Нернста-Планка и LBM (Lattice Boltzmann Method) [1] для уравнений Навье-Стокса.

Исторически первым был разработан метод решёточного уравнения Больцмана. Изначально он был получен на основе теории клеточных газовых автоматов, однако может рассматриваться как особого вида конечно-разностная схема для кинетического уравнения Больцмана [1]. Предполагается, что частицы существуют в дискретном фазовом пространстве и взаимодействуют синхронно. Это позволяет максимально эффективно адаптировать динамику их движения и взаимодействия для параллельных вычислений. Второй причиной, объясняющей постоянно возрастающую популярность данного метода моделирования, является то, что он обладает всеми преимуществами, свойственными кинетическим методам – в частности, чрезвычайно простой реализацией любых граничных условий, независимо от их геометрической или физической природы. Наконец, кинетическая природа метода решёточного уравнения Больцмана позволяет легко интегрировать его с решёточными моделями других физических и химических процессов.

Развитие метода решеточного уравнения Больцмана и тот факт, что поведение системы на макроскопическом уровне не чувствительно к тому, как система описывается на микроуровне, дало начало к разработке схожих методов решения уравнений, относящихся к тому же классу, что и уравнение Навье-Стокса – классу уравнений эллиптического типа в частных производных. К нему же относятся уравнения Нернста-Планка и уравнение Пуассона.

Решеточные уравнения, заложенные в основу методов LBM, LCDM и LPM, для решения поставленной задачи выглядят следующим образом [1, 2, 3]:

$$f_{\alpha}(\vec{r} + \vec{e}_{\alpha}, t+1) - f_{\alpha}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\tau} (f_{\alpha}(\vec{r}, t) - f_{\alpha}^{eq}(\vec{r}, t)) + \frac{\rho_e \vec{E}(\vec{e}_{\alpha} - \vec{v})}{\rho T R} f_{\alpha}^{eq}(\vec{r}, t) \quad (1)$$

$$g_{\alpha}^i(\vec{r} + \vec{e}_{\alpha}, t+1) - g_{\alpha}^i(\vec{r}, t) = \frac{1}{\tau} (g_{\alpha}^i(\vec{r}, t) - g_{\alpha}^{i,eq}(\vec{r}, t)) + \frac{Z_i F (\vec{e}_{\alpha} - \vec{v}) \cdot \nabla \Phi}{RT} g_{\alpha}^{i,eq}(\vec{r}, t) \quad (2)$$

$$h_{\alpha}(\vec{r} + \vec{e}_{\alpha}, t+1) - h_{\alpha}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\tau^g} (h_{\alpha}(\vec{r}, t) - h_{\alpha}^{eq}(\vec{r}, t)) + \left(1 + \frac{0.5}{\tau^g}\right) \delta_{i,g} w_{\alpha} h_{\alpha}^{eq}(\vec{r}, t) \quad (3)$$

f_{α} , g_{α}^i , h_{α} - одночастичные функции распределения для плотности жидкости, концентрации ионов α -ого типа и потенциала (в последнем случае физического смысла не имеет),

\vec{v} - скорость потока, ρ_e - суммарная плотность ионов, ρ - плотность жидкости, \vec{E} - напряженность электрического поля, T - температура, Φ - потенциал, e_α , τ , τ^g , $\delta_{i,g}$ - параметры модели.

Переход от непрерывного к дискретному фазовому пространству позволил заменить ресурсоемкие операции интегрирования при нахождении макроскопических характеристик алгебраическим суммированием:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= \sum_{\alpha} f_{\alpha}(\vec{r}, t); & \vec{v}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\rho(\vec{r}, t)} \sum_{\alpha} e_{\alpha} f_{\alpha}(\vec{r}, t); \\ c_i(\vec{r}, t) &= \sum_{\alpha} g_{\alpha}^i(\vec{r}, t); & \Phi(\vec{r}, t) &= \sum_{\alpha} h_{\alpha}(\vec{r}, t); \end{aligned} \quad (4)$$

c_i - концентрация i -ого типа ионов электролита.

Используя метод разложения в ряд Чепмена-Энскога [1], можно доказать, что система, описываемая уравнениями (1) - (3) на микроуровне, подчиняется макроскопическим уравнениям Навье-Стокса, Нернста-Планка и Пуассона, соответственно.

Моделируемая система представляет собой две параллельные, бесконечные по ширине пластины, с потенциалом Φ_1 и Φ_2 . Расстояние между пластинами H . Длина моделируемой системы L . Внешнее электрическое поле с напряженностью \vec{E} , вызывающее электроосмотический поток, считаем приложенным вдоль оси X . Пространство между пластинами заполнено электролитом.

В данной работе была реализована решеточная модель D2Q9. Положение решетки было выбрано таким образом, что граница раздела фаз проходит между узлами.

Проверка адекватности построенной модели проводилась путем последовательного усложнения моделируемой системы.

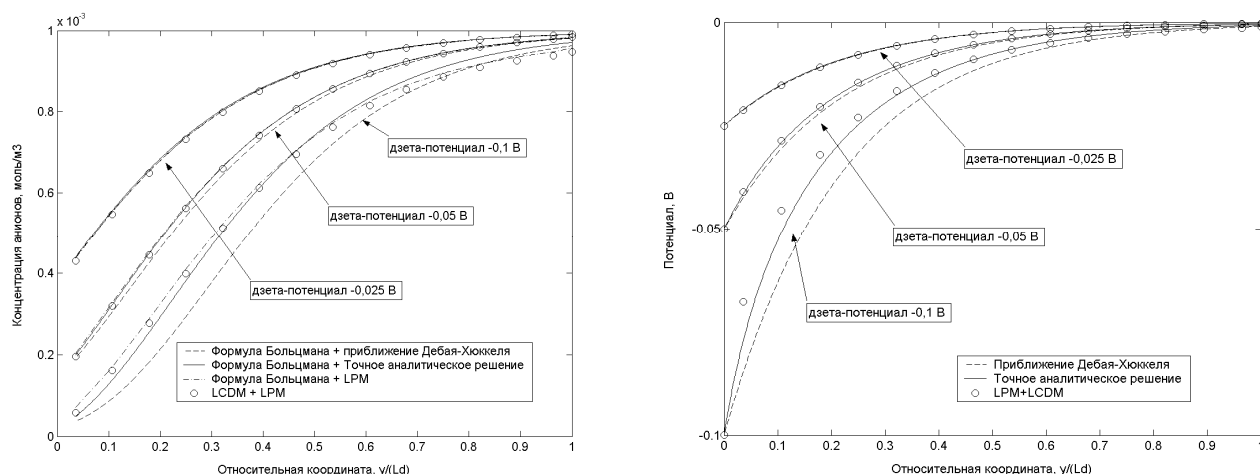


Рисунок 1. Распределение концентрации ионов и потенциала, полученные путем моделирования посредством LPM и LCDM ($\vec{E} = 0$) и с использованием распределения Больцмана для различных значений ϕ_2 . Расстояние между пластинами $H = 7.9\mu\text{м}$, $\lambda_D = 0.3\mu\text{м}$, $T = 298.15\text{K}$, равновесная концентрация ионов $n_\infty = 0.001\text{моль/л}$, потенциал верхней пластины $\phi_2 = 0$.

Как видно из полученных результатов (Рисунок 1, Рисунок 2), решеточные методы дают результаты, близкие к аналитическим решениям, полученным для простейших моделей массопереноса. Однако для сложных неоднородных систем, которые применяются на практике, решения в аналитическом виде не существует. В таких случаях моделирование с

использованием численных методов является единственным возможным способом получения характеристик системы без проведения реального эксперимента (Рисунок 3).

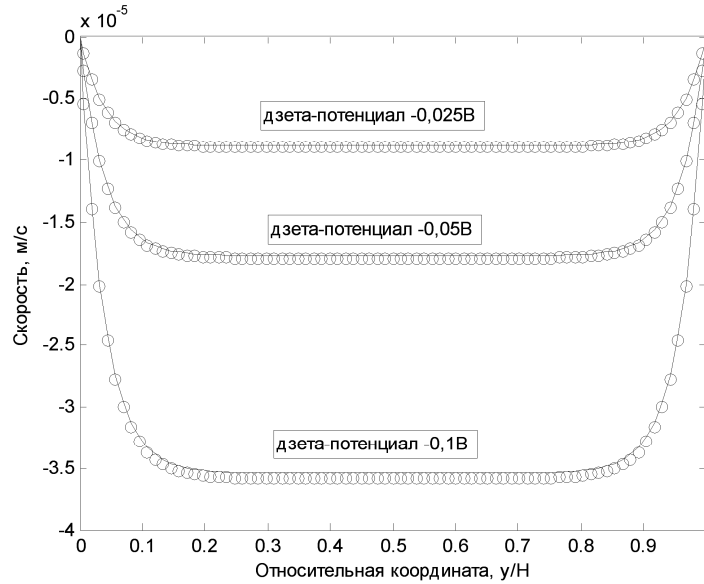


Рисунок 2. Профиль скорости при различных значениях дзета-потенциала (потенциала пластин). $H = 8\mu\text{ì}$, $\lambda_D = 0.3\mu\text{ì}$, $T = 298.15\text{K}$, $n_\infty = 0.001\text{ì} \hat{\text{e}}\ddot{\text{u}}/\text{ì}^3$.

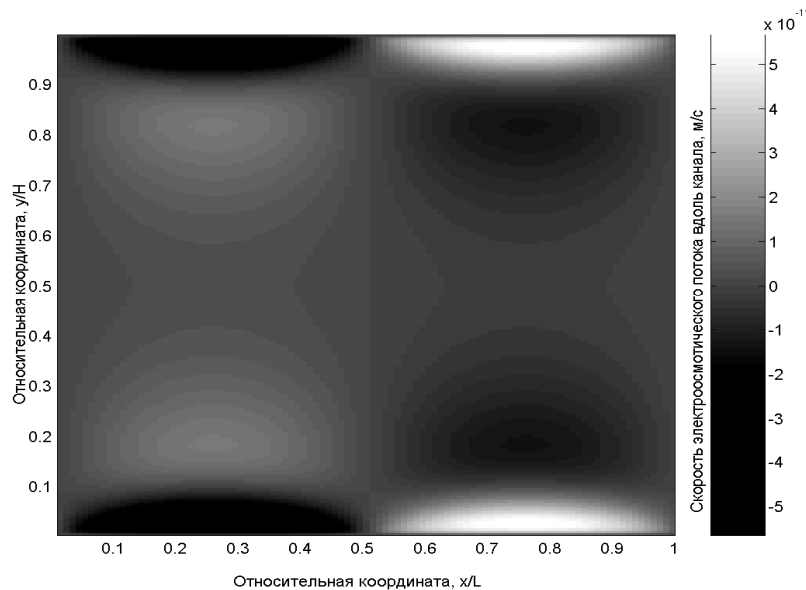


Рисунок 3. Профиль скорости электроосмотического потока в случае неравномерного распределения потенциала на пластинах $\phi_1 = \phi_2 = 5\text{ì} \hat{\text{A}}$, $x < 0.5L$ и

$\phi_1 = \phi_2 = -5\text{ì} \hat{\text{A}}$, $x > 0.5L$. $L = 20\mu\text{ì}$, $H = 20\mu\text{ì}$, $\lambda_D = 0.3\mu\text{ì}$, $T = 298.15\text{K}$, $n_\infty = 0.001\text{ì} \hat{\text{e}}\ddot{\text{u}}/\text{ì}^3$.

Литература

1. Hlushkou, D. (2004) "Numerische Simulation von Stromung und Massentransport in (elektro-) chromatographischen Systemen"; Ph.D. Thesis, Otto-von-Guericke-Universitat, Magdeburg, Germany. (<http://diglib/uni-magdeburg.de/Dissertationen/2004/dzmlhushkou.htm>)
2. Jinku Wang, M. W., Zhixin Li (2006). "Lattice Poisson-Boltzmann simulations of electroosmotic flows in microchannels." J. Colloid Interface Sci. 296: 729-736.
3. Xiaoyi He, Ning Li (2000). "Lattice Boltzmann simulation of electrochemical systems." Commun. Comput. Phys. 129: 158-166.

РЕШЕНИЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

Кожокарь Ю.В., Крощенко А.А.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Рассматривается краевая непериодическая задача Дуффинга вида:

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) + \gamma (y(x))^n = F(x), \quad \gamma \neq 0, \quad (1)$$

с краевыми условиями 1-го или 3-го рода:

$$\begin{cases} y(a) = A \\ y(b) = B \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = A \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = B \end{cases} \quad (2)$$

Задача решалась с помощью одношаговых и многошаговых методов неполного/полного прогноза при произвольных начальных приближениях.

В качестве тестового примера мы использовали задачу вида:

$$y''(x) + y'(x) + y(x) + (y(x))^3 = e^{-x} + e^{-3x}, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y(0) = 1, \quad y(2) = e^{-2} \quad (3)$$

Для аппроксимации 1-й и 2-й производных использовался метод неопределенных коэффициентов для многоточечной аппроксимации производных [1]. В качестве точек аппроксимации были выбраны корни полинома Чебышева 1-го рода $x_i, i = \overline{0, n}$. В результате из системы (4) находятся коэффициенты аппроксимации $c_i, i = \overline{0, n}$:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + \dots + c_n = 0, \\ c_0 x_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = 0, \\ \dots \\ c_0 x_0^{k-1} + c_1 x_1^{k-1} + \dots + c_n x_n^{k-1} = 0, \\ c_0 x_0^k + c_1 x_1^k + \dots + c_n x_n^k = k!, \\ c_0 x_0^{k+1} + c_1 x_1^{k+1} + \dots + c_n x_n^{k+1} = (k+1)!x_i, \\ \dots \\ c_0 x_0^n + c_1 x_1^n + \dots + c_n x_n^n = n(n-1)\dots(n-k+1)x_i^{n-k}. \end{cases} \quad (4)$$

Полученные коэффициенты используются для конструирования производных по общей формуле: $y^{(k)}(x_i) = \sum_{i=0}^n c_i y_i, k - \text{порядок производной}$

При подстановке аппроксимаций производных в общую задачу (1), получается нелинейная относительно y_i численная система вида:

$$\sum_{j=0}^n y_j (c_j^2 + \alpha c_j^1) + \beta y_i + \gamma y_i^n = F(x_i), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (5)$$

где c_j^1 и c_j^2 - это коэффициенты аппроксимации соответствующих первой и второй производных. Недостающих два условия находятся из заданных краевых условий.

Для решения нелинейной системы вида $f(y) = 0$ использовалась следующая схема [3]:

1. Решалась СЛАУ относительно Δy_l с использованием метода Гаусса с выбором главного элемента [2]:

$$\left(\alpha \beta_l^2 \|f(y_l)\|^2 E + \overline{f'(y_l)} f'(y_l) \right) \Delta y_l = -\overline{f'(y_l)} f(y_l), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}], \alpha \ll 1, \text{ где } f = (f_0, f_1, \dots, f_n), \quad y_l = (y_l^0, y_l^1, \dots, y_l^n), \quad y_l^j - l\text{-тое приближение к } j\text{-той компоненте};$$

2. Вносились поправки в вектор y_l : $y_{l+1} = y_l + \beta_l \Delta y_l$, $l = 0, 1, 2, \dots$;
3. Проверялось условие: если $\|f(y_{l+1})\| < \varepsilon$, где ε - малая величина (параметр остановки), то конец просчётов, иначе переход на шаг 4;
4. Определялась новая шаговая длина по приведенным ниже четырем формулам и осуществлялся переход на шаг 1.

Наиболее эффективными алгоритмами просчета шаговой длины оказались следующие нелокальные одношаговые/многошаговые методы полного/неполного прогноза [3]:

1. $\beta_{l+1} = \min \left(1, \frac{\gamma_l \|f(y_0)\|}{\beta_l (\|f(y_l + \Delta y_l)\|)} \right)$; $\gamma_{l+1} = \frac{\gamma_l \|f(y_{l+1})\| \|f(y_{l+1} + \Delta y_{l+1})\|}{\|f(y_l + \Delta y_l)\| \|f(y_{l+2})\|}$; $\gamma_0 = \frac{\beta_0^2 \|f(y_0 + \Delta y_0)\|}{\|f(y_1)\|}$
2. $\beta_l = \max \left(\theta, \frac{\|f(y_l)\|^2}{\|f(y_l)\|^2 + \|f(y_l + \Delta y_l)\|^2} \right)$; $\beta_{-1} \in [10^{-3}, 1]$, $\theta \in [0.01, 0.1]$
3. $\beta_{l+1} = \min \left(1, \frac{\gamma_l \|f(y_l)\|}{\beta_l (\|f(y_{l+1})\|)} \right)$; $\gamma_{l+1} = \frac{\gamma_l \|f(y_l)\|}{\|f(y_{l+1})\|}$; $\beta_0 \in [10^{-2}; 0,5]$, $\gamma_0 = \beta_0^2$
4. $\beta_{l+1} = \min \left(1, \frac{\gamma_l \|f(y_0)\|^2}{\beta_l (\|f(y_l)\|^2 + \|f(y_{l+1})\|^2)} \right)$; $\gamma_{l+1} = \frac{\gamma_l \|f(y_l)\|^2 (\|f(y_{l+1})\|^2 + \|f(y_{l+2})\|^2)}{\|f(y_{l+2})\|^2 (\|f(y_l)\|^2 + \|f(y_{l+1})\|^2)}$;
 $\gamma_0 = \frac{\beta_0^2 (\|f(y_0)\|^2 + \|f(y_1)\|^2)}{\|f(y_1)\|^2}$.

В результате применения рассмотренных выше методов для решения задачи (1)-(2), мы получаем каркас приближенного решения в виде набора значений функции в узлах – корнях полинома Чебышева.

Далее восстанавливаем в аналитическом виде приближенное решение с помощью формул:

$$y(x) \approx P_m(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^m c_k T_k \left(\frac{2x-b-a}{b-a} \right), \quad c_k = \frac{2}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{y}(x_j) T_k \left(\frac{2x_j-b-a}{b-a} \right), \quad k = \overline{0, m}, \quad m \leq n,$$

где в качестве x_j выбирались корни полинома Чебышева 1-го рода, а $\tilde{y}(x_j)$ ($j = \overline{1, n-1}$) - сеточное решение.

Численный эксперимент и его обсуждение

На основании численного эксперимента можно сделать ряд выводов.

Установлено, что непериодическая задача типа Дуффинга весьма чувствительна к начальным приближениям. Чем вероятнее, что область начальных приближений близка к области притяжения метода, тем лучше и быстрее сходится тот или иной метод. Кроме того, в связи с достаточно плотной сеткой значений x_i ($i = \overline{1, n-1}$) уже при нахождении коэффициентов аппроксимации производных наблюдается потеря точности на этапе решения СЛАУ. Соответственно, при нахождении нормы невязки, она нередко становится большой. Замечено, что многошаговые методы полного прогноза «работают» хуже одношаговых. Среди рассмотренных методов по эффективности работы можно выделить одношаговый метод Ермакова – Калиткина.

Результаты экспериментов для наиболее эффективных многошаговых/одношаговых методов полного/неполного прогноза сведены в таблицу, которая иллюстрирует наши выводы.

№ метода	Число точек аппроксимации производных	Норма до решения СЛАУ (5)	Норма после восстановления
1	30	4,93482E-11	5,88374E-6
	35	3,69375E-10	1,49623E-5
2	30	2,29476E-12	4,68967E-7
	35	8,41605E-11	1,27403E-7
3	30	4,28291E-11	1,15226E-7
	35	9,77257E-12	6,53128E-5
4	30	6,53181E-11	2,58983E-6
	35	2,96981E-11	4,493E-7

Литература

1. Березин, И.С., Жидков, Н.П. Методы вычислений [Текст]. В 2 т. Т. 1. Методы вычислений/И.С. Березин и Н.П. Жидков. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 462 с.
2. Вержбицкий, В.М. Численные методы [Текст]. В 2 т. Т. 1. Линейная алгебра и нелинейные уравнения/В.М. Вержбицкий. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2005. – 432 с.
3. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений [Текст]: монография/В.М. Мадорский. – Брест: Изд-во БрГУ, 2005. – 186 с.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТЬ В ОТКРЫТЫХ СЕТЯХ С МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ И С ОБХОДОМ УЗЛОВ ЗАЯВКАМИ

Коробейникова Е.В.

Гомельский государственный технический университет имени П.О.Сухого, г. Гомель

В сеть, состоящую из N однолинейных узлов, поступает стационарный пуассоновский поток заявок интенсивности λ . В l -м узле находится один прибор, который может работать в $\tau_l + 1$ режимах. Состояние l -го узла характеризуется парой чисел $n_l = (i_l, j_l)$, где i_l - число заявок в l -м узле, j_l - номер режима, в котором работает прибор в l -м узле ($l = \overline{1, N}$; $j_l = \overline{0, \tau_l}$).

Каждая заявка входного потока независимо от других заявок с вероятностью π_{0i} направляется в i -й узел ($i = \overline{1, N}$; $\sum_{i=1}^N \pi_{0i} = 1$)

Заявка обслуженная в l -м узле, мгновенно с вероятностью $\pi_{l,j}$ направляется в j -й узел, а с вероятностью $\pi_{l,0}$ покидает сеть ($i, j = \overline{1, N}$; $\sum_{i=1}^N \pi_{i,j} = 1$). Заявка направленная в i -й узел (извне или с другого узла), с вероятностью $f^{(i)}(n_i)$ присоединяется к очереди, а с вероятностью $1 - f^{(i)}(n_i)$ считается мгновенно обслуженной узлом ($0 \leq f^{(i)}(n_i) \leq 1$; $i = \overline{1, N}$). Длительность обслуживания прибором l -го узла, находящегося в состоянии n_l , имеет показательное распределение с параметром $\mu_l(n_l)$, зависящим от состояния (т.е. от числа заявок i_l в узле и режима его работы j_l). Для состояния n_l , время пребывания в режиме j_l имеет показательное распределение, при этом с интен-

сивностью $\psi_l(n_l)$ прибор l -го узла переходит в режим $j_l - 1$, а с интенсивностью $\nu_l(n_l)$ - в режим $j_l + 1$. Время пребывания в последнем τ_l режиме имеет показательное распределение с параметром $\psi_l(i_l, \tau_l)$, после чего прибор переходит в $\tau_l - 1$ режим. Во время переключения прибора с одного режима на другой число заявок в очереди не меняется.

Состояние сети в момент времени t будет характеризоваться вектором $n(t) = (n_1(t), \dots, n_N(t))$, где $n_l(t) = (i_l(t), j_l(t))$ - состояние l -го узла в момент времени t . В соответствии с указанным выше $i_l(t)$ - число заявок в l -м узле в момент времени t , $j_l(t)$ - номер режима работы l -го узла в момент времени t .

Предположим, что все величины $\mu_l(n_l), \nu_l(n_l), \psi_l(n_l)$ строго положительны, а уравнение трафика

$$\varepsilon_j = \pi_{0j} + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \pi_{ij} \quad (j = \overline{1, N})$$

имеет единственное решение $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$, для которого $\varepsilon_1 > 0, \dots, \varepsilon_N > 0$ (для этого достаточно, чтобы матрица $(\pi_{kl}, k, l = \overline{0, N}, \text{ где } \pi_{00} = 0)$ была неприводимой. Тогда $n(t)$ -неприводимый Марковский процесс на фазовом пространстве $X = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_N$

Если во всех узлах сети выполняется условие

$$f_i(m_i, \tau_i) \nu_i(m_{i+1}, \tau_i) \psi_i(m_i, \tau_{i+1}) \mu_i(m_{i+1}, \tau_{i+1}) = f_i(m_i, \tau_{i+1}) \nu_i(m_i, \tau_i) \psi_i(m_{i+1}, \tau_{i+1}) \mu_i(m_{i+1}, \tau_i)$$

где $i = \overline{1, N}$, то $p(m, \tau) = p_1(m_1, \tau_1) p_2(m_2, \tau_2) \dots p_N(m_N, \tau_N)$ (30), где

$$p_i(m_i, \tau_i) = (\varepsilon_i \lambda)^{m_i} \prod_{k=1}^{\tau_i} \frac{\nu_i(0, k-1)}{\psi_i(0, k)} \prod_{r=1}^{m_i} \frac{f_i(r-1, j)}{\mu_i(r, j)} p(0, 0)$$

$$p_i(0, 0) = \left(\sum_{m_i=1}^{\infty} \sum_{\tau_i=0}^{l_i} ((\varepsilon_i \lambda)^{m_i} \prod_{k=1}^{\tau_i} \frac{\nu_i(0, k-1)}{\psi_i(0, k)} \prod_{r=1}^{m_i} \frac{f_i(r-1, j)}{\mu_i(r, j)} p(0, 0)) \right)^{-1}$$

Для эргодичности достаточно, чтобы

$$\sum_{m_i=1}^{\infty} \sum_{\tau_i=0}^{l_i} (\varepsilon_i \lambda)^{m_i} \prod_{k=1}^{\tau_i} \frac{\nu_i(0, k-1)}{\psi_i(0, k)} \prod_{r=1}^{m_i} \frac{f_i(r-1, j)}{\mu_i(r, j)} < \infty; \quad i = \overline{1, N}$$

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О ЧИСТОЙ СЛУЧАЙНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕДИКТОРОВ: СЛУЧАЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Костевич А. Л., Шилкин А. В.

НИИЦ ППМИ Белорусский государственный университет, г. Минск

Рассмотрим задачу проверки гипотезы H_0 о том, что бинарная последовательность описывается моделью независимых симметричных испытаний Бернулли – гипотезу о чистой случайности. Данная задача возникает в различных областях: криптографии, имитационном моделировании и др.

Построение статистического критерия для проверки гипотезы H_0 против широкого класса альтернатив в рамках традиционных подходов к тестированию бинарных последовательностей является затруднительным. Поэтому в литературе развивается альтернативный подход к проверке гипотезы H_0 на базе различных мер сложности последовательности: последовательность считается чисто случайной, если она не может быть “сжата” с помощью выбранного алгоритма ([4]).

Известно большое число универсальных алгоритмов сжатия данных, и предпринимаются попытки их использования для проверки гипотезы о чистой случайности: например, в критериях Лемпеля-Зива и Маурера [1]. Однако сложность исследования вероятностных свойств алгоритмов сжатия приводит к использованию в таких критериях статистических оценок неизвестных параметров вероятностных характеристик.

В данной статье описана процедура проверки гипотезы о чистой случайности на базе *любого* универсального предиктора. Выбор данного подхода обусловлен тесной связью между универсальными предикторами, универсальными алгоритмами сжатия данных, классическими статистическими методами, а также теоремой А. Яо об универсальности теста предсказания следующего бита. В статье исследуется эффективность рассматриваемого подхода в случае альтернативной гипотезы, описываемой цепью Маркова.

Пусть наблюдаются бинарные случайные величины X_1, X_2, \dots , описываемые набором условных вероятностей $\{P\{X_{t+1} | X_t, \dots, X_1\}\}$ из некоторого класса M , $X_t \in A = \{0,1\}$. Пусть по первым t наблюдениям X_1, \dots, X_t требуется сделать прогноз относительно значения X_{t+1} . Если вероятностная модель последовательности известна, то оптимальный прогноз X_{t+1}^* определяется максимумом условной вероятности и достигается минимальная вероятность ошибочного прогноза π_t^* :

$$X_{t+1}^* = \operatorname{argmax}_{a \in A} P\{a | X_t, \dots, X_1\} \quad (1)$$

$$\pi_t^*(X_t, \dots, X_1) = P\{X_{t+1}^* \neq X_{t+1} | X_t, \dots, X_1\} \leq 0.5$$

Если модель последовательности неизвестна, то должен быть построен предиктор $\{\widehat{P}\{X_{t+1} | X_t, \dots, X_1\}\}$, и прогноз строится аналогично (1) с большей вероятностью ошибки прогноза $\widehat{\pi}_t$:

$$\widehat{X}_{t+1} = \operatorname{argmax}_{a \in A} \widehat{P}\{a | X_t, \dots, X_1\} \quad (2)$$

$$\widehat{\pi}_t(X_t, \dots, X_1) = P\{\widehat{X}_{t+1} \neq X_{t+1} | X_t, \dots, X_1\} \geq \pi_t^*(X_t, \dots, X_1)$$

Определение ([5]). *Предиктор (2) называется универсальным для класса M , если $\widehat{\pi}_t(X_t, \dots, X_1) - \pi_t^*(X_t, \dots, X_1)$ сходится по вероятности к 0 при $t \rightarrow \infty$ для любого набора условных вероятностей из класса M .*

Отметим, что если для двух предикторов для всех X_t, \dots, X_1 верно:

$$\operatorname{argmax}_{a \in A} \widehat{P}_{(1)}\{a | X_t, \dots, X_1\} = \operatorname{argmax}_{a \in A} \widehat{P}_{(2)}\{a | X_t, \dots, X_1\},$$

то они делают одинаковые прогнозы и в этом смысле являются эквивалентными. Это ослабляет требования по асимптотической несмещенности оценок условных вероятностей.

В [3] предложена следующая схема построения критерия для проверки гипотезы о чистой случайности на базе произвольного предиктора.

Пусть дана выборка $X = \{x_t\}_{t=1}^n$ объема n . Для каждого $t = \overline{1, n-1}$ по первым t наблюдениям строится прогноз для x_{t+1} с использованием предиктора (2) и вычисляется индикатор успеха прогноза: $Y_t = I\{\widehat{X}_t = x_t\}$. Если для X верна гипотеза о чистой случайности H_0 , то последовательность индикаторов $\{Y_t\}$ также будет описываться H_0 . Если же для X верна гипотеза H_1 и $E\{\pi_t^*\} < 0.5$, то в случае использования универсального для H_1 предиктора, последовательность $\{Y_t\}$ будет иметь некоторое (за-

висящее от H_1 и предиктора) совместное распределение, но со следующими маргинальными вероятностями:

$$H_1^{(Y)} : P\{Y_t = 1\} = \frac{1}{2} + \varepsilon_t, \text{ причем } \varepsilon_t > 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

В качестве статистического критерия для проверки H_0 против уже альтернативы $H_1^{(Y)}$ (и H_1 соответственно) в [3] предложен следующий статистический критерий:

$$\text{принять } \begin{cases} H_0, & \text{если } 2\sqrt{n} (S - \frac{1}{2}) < \Phi^{-1}(1 - \alpha), \\ H_1, & \text{иначе} \end{cases} \quad S = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_t, \quad (3)$$

где $\Phi()$ – функция распределения стандартного нормального распределения, α – уровень значимости.

В [3] показано, что при определенных условиях, в частности при выполнении для последовательности индикаторов успехов прогнозов ЦПТ, предложенный критерий будет обладать заданным уровнем значимости и являться состоятельным. Проверка необходимых условий, в общем случае, является затруднительной. Поэтому в данной статье исследуется эффективность описанного подхода в случае альтернативы H_1 , описываемой моделью стационарной цепи Маркова:

$$H_1 : P\{X_1 = j\} = \pi_j, \quad P\{X_{t+1} = j | X_t = i\} = p_{ij} \neq 0.5, \quad i, j \in A, \quad (4)$$

а в предикторе (2) используется некоторая оценка матрицы вероятностей одношаговых переходов $\hat{P} = (\hat{p}_{ij})$, т.е.

$$\hat{X}_{t+1} = f(X_t) = \operatorname{argmax}_{a \in A} \hat{p}_{X_t j} \quad (5)$$

Определение универсальности для данного предиктора будет выполняться, если для всех $i \in A$: $\operatorname{argmax}_{j \in A} \hat{p}_{ij} = \operatorname{argmax}_{j \in A} \hat{p}_{ij}$.

Для модели (4), (5) индикаторы $\{Y_t\}$ являются значениями функционала от состояний цепи Маркова и обладают следующими характеристиками:

$$E\{Y_t\} = \sum_{k,i=0}^1 k \pi_i p_{i,k \oplus f(i)}, \quad E\{Y_t^2\} = \sum_{k,i=0}^1 k^2 \pi_i p_{i,k \oplus f(i)},$$

$$\operatorname{cov}\{Y_1, Y_t\} = \sum_{u,v,i,j}^1 uv \pi_i p_{i,u \oplus f(i)} [p_{u \oplus f(i),j}^{t-1} - \pi_j] p_{j,v \oplus f(j)}$$

Теорема. В асимптотике $t \rightarrow \infty$ при верной гипотезе H_1 и использовании универсального для H_1 предиктора (5) статистика S имеет предельное нормальное распределение с параметрами $\mu_1 = \sum_{k,i=0}^1 k \pi_i p_{i,k \oplus f(i)}$, $\sigma_1^2 = (1/n)(D\{Y_1\} + 2 \sum_{t=2}^{\infty} \operatorname{cov}\{Y_1, Y_t\}) < \infty$, а критерий (3) является состоятельным, мощность критерия имеет вид:

$$1 - \Phi\left(\Delta \frac{\sigma_0}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1} (\mu_0 - \mu_1)\right), \quad \mu_0 = \frac{1}{2}, \quad \sigma_0^2 = \frac{1}{4n}.$$

Были проведены численные эксперименты по оценке вероятности ошибки первого рода и мощности критерия (3) в случае H_1 : $p_{01} = p_{10} = 0.6$ по выборкам различного объема. На рис.1 приведены оценки вероятности ошибки I рода (\bullet) и мощности (\circ) с 95% доверительным интервалом (пунктир) предложенного критерия, а также теоретическое

значение мощности марковского предиктора (сплошная линия). Предиктор (5) строился по дополнительным выборкам. Из рис.1 можно видеть, что экспериментальные результаты согласуются с утверждением теоремы. На рис.2 для той же модели дополнительно приведены оценки мощности критериев, построенных на базе универсальных предиктора Лемпеля-Зива (\circ) и Sampled Pattern Matching (SPM) предиктора (\bullet) [2], а также теоретическое значение мощности марковского предиктора (сплошная линия). Можно заметить, что универсальные предикторы Лемпеля-Зива и SPM даже без априорной информации о виде альтернативы выявляют отклонение от H_0 , хотя и с меньшей мощностью, чем марковский предиктор, являющийся оптимальным (при наличии априорной информации о виде H_1).

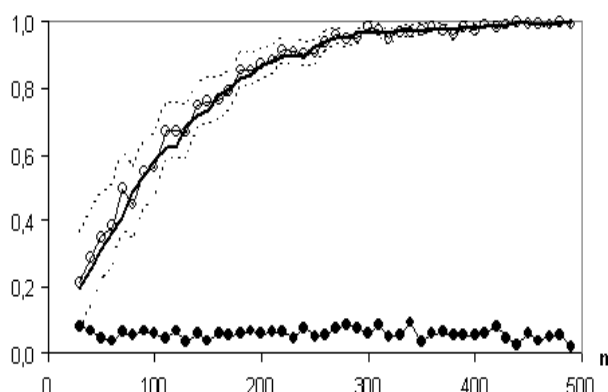


Рис.1: Оценки вероятности ошибки I рода и мощности критерия (3)

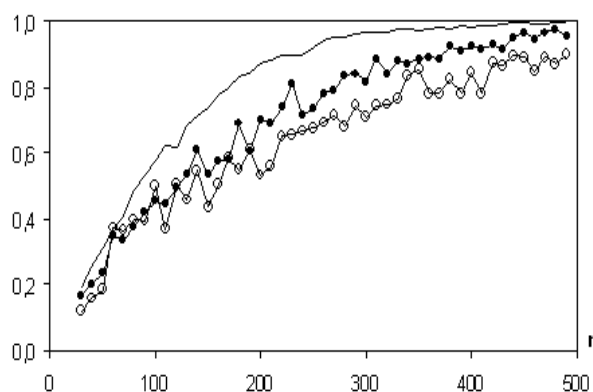


Рис.2: Оценки мощности при использовании универсальных предикторов

Литература

1. NIST Special Publication 800-22. A statistical test suite for random and pseudorandom number generators for cryptographic applications. 2001.
2. Katsaros D., Manolopoulos Ya. Suffix Tree Based Prediction Scheme for Pervasive Computing Environments // Lecture Notes on Computer Science. 2005. Vol. 3746. – P. 267-277.
3. Kostevich A.L., Shilkin A.V. Approach to Randomness Testing on the base of the Universal Predictors // Proc. of the 8 Int. Conf “Computer Data Analysis and Modeling” – Minsk 2007. – Vol. 1. – P. 256-259.
4. Ryabko B.Ya., Monarev V.A. Using information theory approach to randomness testing // Journal of Statistical Planning and Inference. – 2005. – Vol. 133 (1). – P. 95-110.
5. Suzuki J. Universal prediction and universal coding. Systems and Computers. – 2003. – Vol. 34 (6). – P. 1-11.

ЕЩЁ ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА

Кузин В. В., Веремчук А. П.

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, г. Брест

Среди методов решения задачи Дурффинга в настоящее время наиболее эффективными являются разностные методы, основным недостатком которых является необходимость восстановления полученного сеточного решения. Процедура восстановления позволяет получить приближенное решение в аналитическом виде с точностью порядка $1e-13$ – $1e-14$ для периодической задачи и с точностью $1e-8$ – $1e-9$ для непериодической задачи. Предлагаемый нами метод решения задачи Дурффинга позволяет достичь точности по невязке $1e-14$ – $1e-15$ как в периодическом, так и в непериодическом случае, что позволяет говорить об общности подхода к решению задачи Дурффинга.

Рассматривается решение краевой задачи Дуффинга:

$$\ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) + \beta x(t) + \gamma(x(t))^n = F(t), \quad x \in [a, b]$$

$$\begin{cases} x(a) = A \\ x(b) = B \end{cases} \quad (1)$$

Были рассмотрены частные случаи задачи (1) с известными точными решениями:

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) + 2,4(x(t))^3 = f(t), \quad (2)$$

1) $x(t) = t^2 + 4 \sin t + e$, $2 \leq t \leq 10$ - точное решение

$$\begin{cases} x(2) = 4 + 4 \sin 2 + e, \\ x(10) = 100 + 4 \sin 10 + e \end{cases} \quad (3)$$

2) $x(t) = \sin^2 t + 1$, $\pi \leq t \leq 3\pi$ - точное решение

$$\begin{cases} x(\pi) = 1, \\ x(3\pi) = 1 \end{cases} \quad (4)$$

3) $x(t) = e^t \sin t$, $7 \leq t \leq 9$ - точное решение

$$\begin{cases} x(7) = e^7 \sin 7, \\ x(9) = e^9 \sin 9 \end{cases} \quad (5)$$

$f(t)$ - функция, получающаяся в результате подстановки в (2) точного решения.

Общий алгоритм: Полагая, что задача (1) на рассматриваемом отрезке имеет решение, мы разбиваем отрезок на N частей, и уже рассматриваем задачу не на всём отрезке, а в каждой конкретной точке разбиения, взяв некоторую функцию $\varphi(t_i, z)$, которая в точке t_i удовлетворяет рассматриваемой задаче. Подставляем эту функцию в (1), мы получим одномерное нелинейное уравнение относительно переменной z , решая его, находим z , подставляем в $\varphi(t_i, z)$, тем самым находим решение нашей задачи в точке x_i . Этот процесс повторяется для всех t_i . Таким образом, мы находим сеточное решение. В этом заключается метод решения.

В качестве функции $\varphi(t_i, z)$ мы взяли $\varphi(t_i, z) = (t_i^z - t_i z)M$, $M = const$, данная функция удобна в том плане, что если взять достаточно большой набор z , функция $\varphi(t_i, z)$ полностью заполняет первую четверть, как это показано на рис.1. Рассматриваемую функцию дифференцируем в аналитическом виде и подставляем в (1). Тем самым мы получим неоднородное одномерное численное уравнение. Решаем его квазиньютоновскими методами, для чего находим $\varphi'_k(t_i, z)$. В качестве начального приближения можно брать z , найденное на предыдущем i -ом уровне. Решая уравнение, находим решение исходной задачи в соответствующей точке, и так, пробегая по всем t_i , находим соответствующие x_i .

Преимущества метода: 1. Не требуется аппроксимировать производные; 2. Решаются одномерные уравнения, за счет чего можно добиться высокой точности при нахождении z , что в свою очередь повлияет на точность решения задачи (1); 3. Метод легко программируем; 4. Сеточное решение получается достаточно быстро.

Недостатки метода: 1. Проблема в выборе функции $\varphi(t_i, z)$; 2. При рассмотрении функции $\varphi(t_i, z) = (t_i^z - t_i z)M$, $M = const$, решение задачи Дуффинга должно находиться в первой четверти.

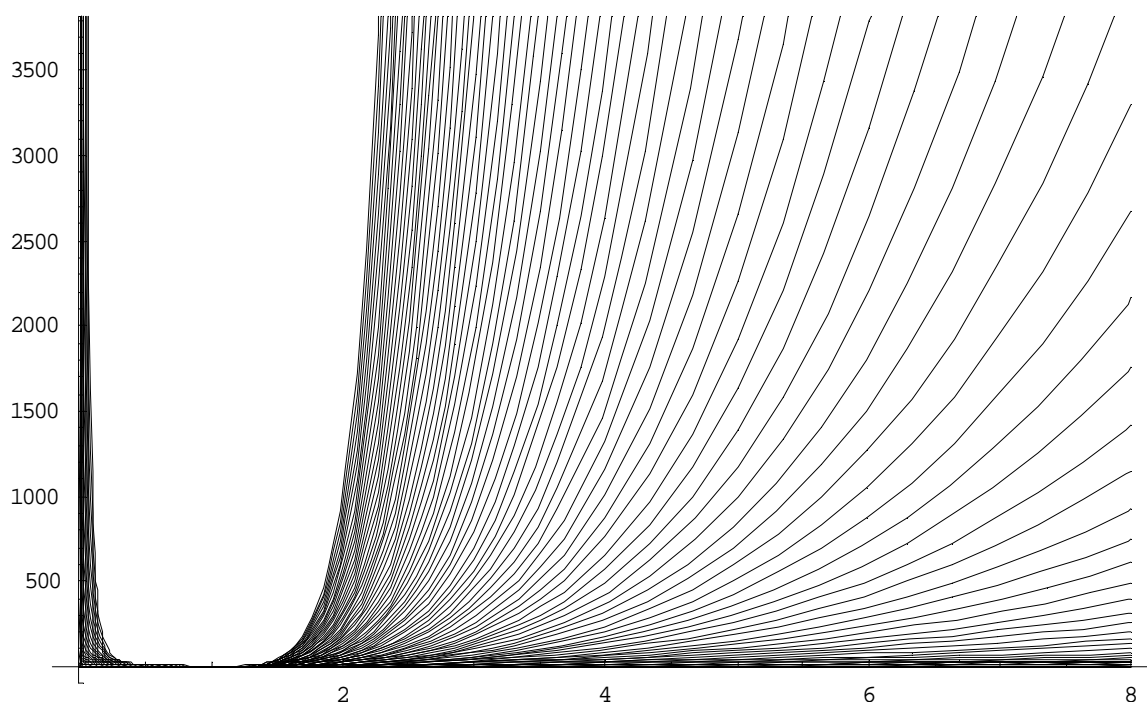


рис.1

Вычислительный эксперимент. Были исследованы тестовые точные решения задачи Дуффинга вида (2)-(3), (2)-(4), (2)-(5). Эксперимент показал, что при использовании функции $\varphi(t_i, z)$ решение исходной задачи должно находиться в первой четверти. Так, данная функция имеет два решения, подстановкой в (2) выясняем, какое из них является решением дифференциальной задачи. При решении нелинейного уравнения были использованы все процессы: нерегуляризованный, частично, просто и полностью регуляризованный; различными методами: одношаговыми и многошаговыми. Практика показала, что если взять N достаточно большим на рассматриваемом отрезке, тем самым мы уплотняем и точки z , для каждого t_i , можно использовать просто метод Ньютона, который за небольшое количество итераций сходится с заданной точностью к точному решению. Для всех тестовых функций использовалась точность, при решении нелинейных уравнений $1e-16$, которая достигалась за 5-11 итераций. После получения сеточного решения, находилась норма разности между точным и приближенным решением в соответствующих точках. Эта норма оказалась порядка $1e-14 - 1e-16$.

Вывод. Данный подход оказался достаточно неплохим для получения сеточного решения задачи Дуффинга.

Дальнейшие перспективы метода. Т.к. для рассматриваемой функции, решение исходной задачи должно полностью находиться в первой четверти, то было выдвинута идея, перевести задачу Дуффинга в полярную систему координат, и там в качестве функции $\varphi(t_i, z)$ рассматривать спираль Архимеда, т.к. она проходит по всем четвертям и тем самым отпадает проблема первой четверти решения исходной задачи. А также применить данный метод для решения других дифференциальных задач.

Литература

1. Березин, И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. М.:Наука, 1966.-Т.1.-632 с.
2. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские методы решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. Брест. 2005. – 180 с.

МЕТОД ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Матысик О.В., Козак И.П.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

1. Постановка задачи. В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение:

$$Ax = y \quad (1)$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A , для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения задачи предлагается неявный метод итерации

$$x_{n+1} = x_n + \alpha A^2(y - Ax_{n+1}), \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y , ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. В этом случае метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A^2(y_\delta - Ax_{n+1,\delta}), \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ .

2. Сходимость метода при точной правой части уравнения.

Теорема 1. Итерационный метод (2) при условии $\alpha > 0$ сходится в исходной норме гильбертова пространства.

Доказательство. По индукции нетрудно показать справедливость равенства: $x_n = A^{-1} \left[E - (E + \alpha A^3)^{-n} \right] y$. Используя интегральное представление самосопря-

женного оператора $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$ ($M = \|A\|$, E_λ – спектральная функция), имеем

$$\begin{aligned} x - x_n &= A^{-1}y - A^{-1} \left[E - (E + \alpha A^3)^{-n} \right] y = \\ &= \int_0^M \lambda^{-1} (1 + \alpha \lambda^3)^{-n} dE_\lambda y = \int_0^\varepsilon \lambda^{-1} (1 + \alpha \lambda^3)^{-n} dE_\lambda y + \int_\varepsilon^M \lambda^{-1} (1 + \alpha \lambda^3)^{-n} dE_\lambda y. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0, M]$ выполнялось неравенство: $\alpha > 0$. Тогда $(1 + \alpha\lambda^3)^{-1} \leq q < 1$ и, следовательно, выполняется:

$$\left\| \int_{\varepsilon}^M \lambda^{-1} (1 + \alpha\lambda^3)^{-n} dE_{\lambda} y \right\| \leq q^n \left\| \int_{\varepsilon}^M \lambda^{-1} dE_{\lambda} y \right\| = q^n \left\| \int_{\varepsilon}^M dE_{\lambda} x \right\| \leq q^n \|x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Кроме этого $\left\| \int_0^{\varepsilon} \lambda^{-1} (1 + \alpha\lambda^3)^{-n} dE_{\lambda} y \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon} dE_{\lambda} x \right\| = \|E_{\varepsilon} x\| \rightarrow 0$, так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ E_{ε} сильно

стремится к нулю в силу свойств спектральной функции. Таким образом, доказано, что метод (2) при $\alpha > 0$ сходится.

3. Оценка скорости сходимости. Скорость убывания к нулю $\|x - x_n\|$ неизвестна и может быть сколь угодно малой. Для её оценки предположим, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо, т. е. $x = A^s z$, $s > 0$. Тогда

$x - x_n = \int_0^M \lambda^s (1 + \alpha\lambda^3)^{-n} dE_{\lambda} z$. Найдём максимум подинтегральной функции

$f(\lambda) = \lambda^s (1 + \alpha\lambda^3)^{-n}$. Приравняв нулю производную от $f(\lambda)$, получим уравнение для нахождения стационарных точек функции $f(\lambda)$:

$\lambda^{s-1} (1 + \alpha\lambda^3)^{-n-1} [s(1 + \alpha\lambda^3) - 3n\alpha\lambda^3] = 0$. Здесь $\lambda \neq 0$, так как в противном случае

$f(\lambda) = 0$. Поэтому $s(1 + \alpha\lambda^3) - 3n\alpha\lambda^3 = 0$. Отсюда $\lambda_* = \left(\frac{s}{(3n-s)\alpha} \right)^{1/3}$ – стационар-

ная точка функции $f(\lambda)$ при $3n > s$. Поскольку $f''(\lambda_*) < 0$, то λ_* – точка максимума для $f(\lambda)$. Найдём его:

$$f(\lambda_*) = \left(\frac{s}{3n\alpha} \right)^{s/3} \left(1 + \frac{s}{3n-s} \right)^{\frac{-(3n-s)}{3}} < \left(\frac{s}{3n\alpha} \right)^{s/3} 2^{-s/3} = \left(\frac{s}{6n\alpha} \right)^{s/3}.$$

Нетрудно проверить, что найденный для функции $f(\lambda)$ максимум является глобальным на отрезке $[0, M]$. Таким образом, $\|x - x_n\| \leq s^{s/3} (6n\alpha)^{-s/3} \|z\|$.

4. Сходимость метода при приближённой правой части уравнения. Покажем, что при $\alpha > 0$ метод (3) можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ приближенной правой части операторного уравнения (1). Рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. По доказанному в разделе 2 $x - x_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Убедимся, что $x_n - x_{n,\delta}$ можно сделать сходящимся к нулю. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, имеем

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E + \alpha A^3)^{-n} \right] (y - y_{\delta}) = \int_0^M \lambda^{-1} \left[1 - (1 + \alpha\lambda^3)^{-n} \right] dE_{\lambda} (y - y_{\delta}).$$

Оценим сверху подынтегральную функцию $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - (1 + \alpha \lambda^3)^{-n} \right]$. Нетрудно показать, что $g_n(\lambda) = |g_n(\lambda)| \leq 3n^{1/3} \alpha^{1/3}$ при условии $\alpha > 0$. Отсюда $\|x_n - x_{n,\delta}\| \leq 3n^{1/3} \alpha^{1/3} \delta$.

Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + 3n^{1/3} \alpha^{1/3} \delta$ и $\|x - x_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то для сходимости метода (3) достаточно выбрать $n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/3} \delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. Итак, доказана

Теорема 2. При условии $\alpha > 0$ итерационный метод (3) сходится, если число итераций n выбирать из условия $n^{1/3} \delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.

5. Оценка погрешности метода и ее оптимизация. Запишем теперь общую оценку погрешности метода (3)

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq s^{s/3} (6n\alpha)^{-s/3} \|z\| + 3(n\alpha)^{1/3} \delta. \quad (4)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 3. Если решение x уравнения (1) истокообразно представимо, то при условии $\alpha > 0$ для метода (3) справедлива оценка погрешности (4).

Для минимизации полученной оценки погрешности вычислим правую часть оценки (4) в точке, в которой производная от неё равна нулю; в результате получим априорный момент останова

$$n_{\text{опт}} = 2^{-s/(s+1)} \left(\frac{s}{3} \right)^{(s+3)/(s+1)} \alpha^{-1} \|z\|^{3/(s+1)} \delta^{-3/(s+1)}. \text{ Подставив } n_{\text{опт}} \text{ в оценку (4), имеем}$$

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1+s) \cdot 2^{-s/(3(s+1))} \left(\frac{s}{3} \right)^{-2s/(3(s+1))} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}.$$

Замечание 1. Оптимальная оценка погрешности метода (3) имеет порядок $O(\delta^{s/(s+1)})$, и как следует из [1], он является оптимальным в классе задач с истокопредставимыми решениями $x = A^s z$, $s > 0$.

Замечание 2. Оптимальная оценка не зависит от α , но от параметра α зависит $n_{\text{опт}}$, поэтому для уменьшения объёма вычислительной работы следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию $\alpha > 0$ и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in \mathbb{Z}$.

Литература

1. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Матысик О.В., Матусевич А.А.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Для решения операторного уравнения 1-ого рода

$$Ax = y \quad (1)$$

в гильбертовом пространстве H с положительным самосопряженным ограниченным оператором A предлагается неявный итеративный метод

$$(E + \alpha^2 A^2)x_{n+1} = (E - \alpha A)^2 x_n + 2\alpha y, \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

Здесь $0 \in SpA$, но не является его собственным значением. Поэтому задача отыскания решения уравнения является некорректной. Предполагается существование единственного решения x при точной правой части уравнения (1).

В случае приближённой правой части (1) y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ итерационный метод (2) примет вид

$$(E + \alpha^2 A^2)x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

Имеют место

Теорема 1. Процесс (2) при условии $\alpha > 0$ сходится.

Теорема 2. Процесс (3) сходится при условии $\alpha > 0$, если число итераций n выбирать в зависимости от δ так, чтобы $n\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.

Теорема 3. Если решение x уравнения (1) истокорпредставимо, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$, то при условии $\alpha > 0$ для метода (3) справедлива оценка $\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^s (2n\alpha e)^{-s} \|z\| + 2n\alpha\delta$.

Теорема 4. Оптимальная оценка погрешности для метода (3) имеет вид $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1+s)e^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}$ и получается при $n_{\text{опт}} = s(2\alpha)^{-1} e^{-s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \delta^{-1/(s+1)}$.

Замечание. Неявные методы обладают следующим важным достоинством. В явных методах на параметр α накладывается ограничение сверху, что может привести к необходимости большого числа итераций. В неявных методах никаких ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет брать его произвольно большим (независимо от $\|A\|$). В связи с чем оптимальную оценку погрешности для метода (3) можно получить уже на первых шагах итераций.

НЕЯВНАЯ ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Матысик О.В., Наумовец С.Н.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест

Пусть в гильбертовом пространстве H требуется решить уравнение

$$Ax = y, \quad (1)$$

где A – ограниченный, самосопряженный, положительный оператор $A : H \rightarrow H$, для которого нуль не является собственным значением. Причем $0 \in Sp A$, т.е. задача некорректна. Предполагается существование единственного решения x при точной правой части y . Для его отыскания предлагается итерационный метод

$$(E + \alpha A^2)x_{n+1} = x_n + \alpha Ay, \quad x_0 = 0, \quad (2)$$

который в случае приближенной правой части уравнения (1) $y_\delta: \|y - y_\delta\| \leq \delta$ примет вид:

$$(E + \alpha A^2)x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha Ay_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ .

Иными словами, метод (3) является сходящимся, если $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n (\|x - x_{n,\delta}\|) \right) = 0$.

Теорема 1. Итерационный метод (2) сходится в исходной норме гильбертова пространства при условии

$$\alpha > 0. \quad (4)$$

Доказательство

По индукции нетрудно показать, что $x_n = A^{-1} \left[E - (E + \alpha A^2)^{-n} \right] y$. Ввиду положительности самосопряженного оператора A его интегральное представление имеет вид

$$A = \int_0^M \lambda dE_\lambda, \quad \text{где } M = \|A\|, \quad E_\lambda - \text{соответствующая спектральная функция.}$$

Так как по предположению уравнение (1) имеет единственное точное решение, то $x = A^{-1}y$, поэтому $x - x_n = A^{-1}(E + \alpha A^2)^{-n}y$.

Очевидно, что для сходимости метода было бы достаточно потребовать, чтобы $\left\| (E + \alpha A^2)^{-1} \right\| < 1$, где $\left\| (E + \alpha A^2)^{-1} \right\| = \sup_{\lambda \in SpA} \frac{1}{1 + \alpha \lambda^2}$. Для доказательства сходимости воспользуемся интегральным представлением самосопряженного оператора

$$x - x_n = A^{-1}(E + \alpha A^2)^{-n}y = \int_0^M \lambda^{-1} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda y$$

$$\text{и разобьем полученный интеграл на два: } x - x_n = \int_0^\varepsilon \lambda^{-1} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda y + \int_\varepsilon^M \lambda^{-1} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda y.$$

Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0, M]$ выполнялось неравенство (4). Тогда

$$\frac{1}{1 + \alpha \lambda^2} \leq q < 1 \quad \text{и, следовательно,} \quad \left\| \int_\varepsilon^M \lambda^{-1} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda y \right\| \leq q^n \left\| \int_\varepsilon^M \lambda^{-1} dE_\lambda y \right\| =$$

$$= q^n \left\| \int_\varepsilon^M dE_\lambda x \right\| \leq q^n \|x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$\left\| \int_0^\varepsilon \lambda^{-1} \frac{1}{(1 + \alpha\lambda^2)^n} dE_\lambda y \right\| \leq \left\| \int_0^\varepsilon dE_\lambda x \right\| = \|E_\varepsilon x\| \rightarrow 0, \text{ так как при } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ } E_\varepsilon \text{ сильно}$$

стремится к нулю в силу свойств спектральной функции. Таким образом, доказано, что $\|x - x_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, т.е. что метод (2) при условии (4) сходится. Теорема 1 доказана.

Покажем, что при тех же условиях итерационный процесс (3), можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций n , в зависимости от уровня погрешности δ . Имеет место

Теорема 2. При условии (4) итерационный процесс (3) сходится, если выбрать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $\sqrt{n\delta} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$.

Доказательство

Будем считать, что $x_{0,\delta} = 0$ и, воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора A , получим:

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E + \alpha A^2)^{-n} \right] (y - y_\delta) = \int_0^M \lambda^{-1} \left[1 - \frac{1}{(1 + \alpha\lambda^2)^n} \right] dE_\lambda (y - y_\delta).$$

По индукции нетрудно показать, что $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{1}{(1 + \alpha\lambda^2)^n} \right] \leq 2\sqrt{n\alpha}$. Поэтому,

$$\|x_n - x_{n,\delta}\| \leq 2\sqrt{n\alpha} \left\| \int_0^M dE_\lambda (y - y_\delta) \right\| = 2\sqrt{n\alpha} \|y - y_\delta\| \leq 2\sqrt{n\alpha} \delta.$$

Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + 2\sqrt{n\alpha} \delta$, и, как показано ранее, $\|x - x_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, то для сходимости метода (3) достаточно, чтобы $\sqrt{n\delta} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$. Теорема 2 доказана.

Оценить скорость сходимости приближений (3) без дополнительных предположений невозможно, так как неизвестна и может быть сколь угодно малой скорость убывания к нулю $\|x - x_n\|$. Поэтому для оценки скорости сходимости предположим, что точное решение x уравнения (1) истокпредставимо, т.е. $x = A^s z, s > 0$, где s – степень истокпредставимости, z – истокпредставляющий элемент.

Тогда $y = A^{s+1} z$ и, следовательно $x - x_n = \int_0^M \lambda^s \frac{1}{(1 + \alpha\lambda^2)^n} dE_\lambda z$. Для функции

$f(\lambda) = \lambda^s (1 + \alpha\lambda^2)^{-n}$ нетрудно показать, что $\lambda_* = \sqrt{\frac{s}{(2n-s)\alpha}}$ – её точка глобального

максимума при $2n > s$, и что $f(\lambda_*) < \left(\frac{s}{4n\alpha}\right)^{s/2}$. Таким образом, при α , удовлетворяющим условию (4), для любых $n \geq 1$ справедливо $\max_{\lambda \in [0, M]} |f(\lambda)| \leq s^{s/2} (4n\alpha)^{-s/2}$, и, значит,

$\|x - x_n\| \leq s^{s/2} (4n\alpha)^{-s/2} \|z\|$.

Итак, доказана

Теорема 3. Если точное решение x уравнения (1) истокорпредставимо, то при условии (4) для метода (3) справедлива оценка погрешности $\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^{s/2} (4n\alpha)^{-s/2} \|z\| + 2\sqrt{n\alpha} \delta$.

Оптимизировав по n полученную оценку погрешности, найдем значение $n_{\text{опт}} = 2^{-s/(s+1)} \left(\frac{s}{2}\right)^{(s+2)/(s+1)} \alpha^{-1} \|z\|^{2/(s+1)} \delta^{-2/(s+1)}$, подставив которое в исходную оценку, получим её оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1+s) \cdot 2^{-s/(2(s+1))} \left(\frac{s}{2}\right)^{-s/(2(s+1))} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}.$$

Оптимальная оценка погрешности метода (3) не зависит от α , но от α зависит $n_{\text{опт}}$ и, значит, объём вычислительной работы. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию (4), и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in \mathbb{Z}$.

СХОДИМОСТЬ НЕЯВНОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ В СЛУЧАЕ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Наумовец С.Н., Матысик О.В.

Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина, г.Брест

1. Введение

В последние десятилетия математическая наука обогатилась важным разделом – теорией некорректно поставленных задач и методов их приближенного решения.

Развитие этого раздела математики вызвано многочисленными приложениями в технике, физике, экономике и других естественных науках, поскольку, прежде всего, в приложениях возникают и имеют большое значение подобные некорректные задачи. Потребности практики приводят к необходимости решения некорректно поставленных задач, которые во многих случаях описываются операторными уравнениями первого рода.

Для их решения широко используются итерационные схемы. Поэтому большое значение имеют разработка и изучение итерационных методов, получение условий их сходимости, нахождение оценок погрешности. Важность изучения таких методов решения операторных уравнений объясняется также и тем, что эти методы легко реализуются на ПЭВМ.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать в гильбертовом пространстве H операторное уравнение

$$Ax = y \quad (1)$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A , для которого нуль является собственным значением, т.е. задача (1) имеет неединственное решение. Предположим, что $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнения решение (неединственное) задачи (1) существует. Для его отыскания используем неявную итерационную процедуру

$$(E + \alpha A^2)x_{n+1} = x_n + \alpha Ay, \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

Докажем сходимость итерационной процедуры (2) к решению операторного уравнения (1) в случае неединственного решения. Более того, покажем, что в этом случае итерационный процесс (2) сходится к решению с минимальной нормой.

3. Сходимость метода в случае неединственного решения

Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, а через $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H . Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема. Пусть $A \geq 0$, $y \in H$, $\alpha > 0$. Тогда для итерационного процесса (2) верны следующие утверждения:

а) $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \rightarrow I(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) итерационный метод (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. В последнем случае $x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$, где x^* – минимальное решение уравнения.

Доказательство

Применив оператор A к (2), получим $A(E + \alpha A^2)x_n = Ax_{n-1} + \alpha A^2 y$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как в нашем случае $AP(A)y = 0$, то получим $(E + \alpha A^2)(Ax_n - \Pi(A)y) = Ax_{n-1} - \Pi(A)y$.

Обозначим $Ax_n - \Pi(A)y = v_n$, $v_n \in M(A)$, тогда $(E + \alpha A^2)v_n = v_{n-1}$. Отсюда $v_n = (E + \alpha A^2)^{-1} v_{n-1}$, следовательно, $v_n = (E + \alpha A^2)^{-n} v_0$. Имеем $A \geq 0$ и A – положительно определён в $M(A)$, т.е. $(Ax, x) > 0 \quad \forall x \in M(A)$. Так как $\alpha > 0$, то

$\|(E + \alpha A^2)^{-1}\| \leq 1$, и поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|v_n\| &= \|(E + \alpha A^2)^{-n} v_0\| = \left\| \int_0^{\|A\|} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda v_0 \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda v_0 \right\| + \\ &+ \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda v_0 \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda v_0 \right\| + q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} dE_\lambda v_0 \right\| \leq \\ &\leq \|E_{\varepsilon_0} v_0\| + q^n(\varepsilon_0) \|v_0\| < \varepsilon \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, $\varepsilon_0 \rightarrow 0$. Здесь $\frac{1}{1 + \alpha \lambda^2} \leq q(\varepsilon_0) < 1$ при $\lambda \in [\varepsilon_0, \|A\|]$. Следовательно, $v_n \rightarrow 0$, откуда получим $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Отсюда $\|Ax_n - y\| \rightarrow \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y)$ (см. [1]). Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть итерационный процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \rightarrow Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда итерационная процедура (2) примет следующий вид

$$\begin{aligned} (E + \alpha A^2)x_n &= x_{n-1} + \alpha A \Pi(A)y = x_{n-1} + \alpha A^2 x^* = \\ &= (E + \alpha A^2)x_{n-1} - \alpha A^2 x_{n-1} + \alpha A^2 x^* = (E + \alpha A^2)x_{n-1} + \alpha A^2(x^* - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Отсюда запишем $x_n = x_{n-1} + \alpha A^2 (E + \alpha A^2)^{-1} (x^* - x_{n-1})$.

Последнее равенство разобьём на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \alpha (E + \alpha A^2)^{-1} A^2 P(A) (x^* - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0;$$

$$\begin{aligned} \Pi(A)x_n &= \Pi(A)x_{n-1} + \alpha A^2 (E + \alpha A^2)^{-1} \Pi(A) (x^* - x_{n-1}) = \\ &= \Pi(A)x_{n-1} + \alpha A^2 (E + \alpha A^2)^{-1} (\Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1}) = \\ &= \Pi(A)x_{n-1} + \alpha A^2 (E + \alpha A^2)^{-1} (x^* - \Pi(A)x_{n-1}), \end{aligned}$$

так как $x^* \in M(A)$.

Обозначим через $w_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда из равенства

$$\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* + \alpha A^2 (E + \alpha A^2)^{-1} (x^* - \Pi(A)x_{n-1})$$

получим $w_n = w_{n-1} - \alpha A^2 (E + \alpha A^2)^{-1} w_{n-1}$.

Следовательно, $w_n = (E + \alpha A^2)^{-1} w_{n-1} = (E + \alpha A^2)^{-n} w_0$. А так как $\alpha > 0$, то справедливо:

$$\begin{aligned} \|w_n\| &= \left\| (E + \alpha A^2)^{-n} w_0 \right\| = \left\| \int_0^{\|A\|} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda w_0 \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda w_0 \right\| + \\ &+ \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda w_0 \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda w_0 \right\| + q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} dE_\lambda w_0 \right\| \leq \\ &\leq \|E_{\varepsilon_0} w_0\| + q^n(\varepsilon_0) \|w_0\| < \varepsilon \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ и, следовательно, $w_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \rightarrow x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$. Теорема доказана.

Замечание. Так как у нас $x_0 = 0$, то $x_n \rightarrow x^*$, т.е. итерационный процесс (2) сходится к решению с минимальной нормой.

Литература

1. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, N 2. – P. 166-176.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Панасик Д.А., Рыбачук Г.Г.

Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина, Брест

Необходимость решения систем линейных и нелинейных уравнений на ЭВМ существует давно. Среди задач вычислительной математики, требующих решения СЛАУ, различают собственно задачи на решение СЛАУ, а также практически все нелинейные задачи, решаемые итерационными методами, которые сводятся к последовательному решению СЛАУ на каждом шаге вычислительного процесса. Поэтому математики всегда

стремились к наиболее эффективному решению одного из основных модулей вычислительной математики – решению СЛАУ (минимизировать количество затраченного времени на решение системы, обрабатывать матрицы наибольшей размерности, достигая наилучшей численной устойчивости матриц, получать решение с наиболее высокой точностью).

Среди методов решения СЛАУ различают прямые и итерационные. Вначале рассмотрим прямые методы, которые позволяют получить решение с некоторой точностью за определенное количество итераций.

В зависимости от вида СЛАУ (хорошо обусловленные системы, слабо заполненные матрицы) для их решения можно применять различные методы (метод Гаусса, метод оптимального исключения, метод окаймления, метод отражений, метод вращений, метод ортогонализации, метод Жордано, метод прогонки, метод квадратного корня).

В качестве исследуемых методов были выбраны стандартный метод решения систем линейных уравнений — метод Гаусса и его различные модификации: с выбором главного элемента по столбцу и по всей матрице, и пробный метод, в качестве экспериментального, который назовем “клеточным методом”.

Идея “клеточного метода” состоит в том, чтобы исходную матрицу представить в виде матрицы матриц, с целью уменьшения размерности исходной матрицы для решения на ЭВМ. Основной подход – выяснить, в чем отличия метода Гаусса и “клеточного метода”, выяснить плюсы и минусы соответствующих методов.

Исходная квадратная матрица делится на клетки. (Деление на клетки возможно делать различными способами, но для удобства реализации нами клетки выбраны все одинаковой размерности). В результате такого деления мы получим матрицу, в роли элементов которой выступают матрицы. Для дальнейшего решения мы представляем эту матрицу в качестве произведения треугольных матриц (нижней и верхней), используя формулы LU-разложения. С помощью полученных треугольных матриц мы находим вектор-решение данной системы линейных уравнений.

Как экспериментальный вариант, был реализован метод, применяющий разбиение исходной матрицы на матрицы размерности 5×5 (возможен вариант, в конкретном случае применить разбиение на 5, 10 и т.д.). Для решения данной СЛАУ применялся метод LU-разложения (видоизмененный его вариант, где в качестве клеток выступают матрицы), как более эффективный метод для приведения исходной матрицы к двум трехдиагональным матрицам. В результате нахождения таких матриц L и U, необходимо было находить обратную матрицу (использовался метод Гаусса), что, возможно, внесло погрешность в полученный результат.

В результате проведенной работы получены следующие результаты.

Рассматривались матрицы размерности 1000×1000 , элементы которых вносились случайным образом. Эксперимент проводился на ЭВМ со следующими характеристиками: тактовая частота 1700 МГц, ОП 256 Мб.

При решении методом Гаусса на решение СЛАУ такой размерности было затрачено около 18 сек; модификацией с выбором главного элемента по столбцу - 20 сек и по всей матрице 38 сек соответственно, что заметно меньше, чем при использовании «клеточного метода» (55 сек). Подобный эффект будет лишь усилен при рассмотрении матриц большей размерности. На данный момент при достаточно быстром развитии ЭВМ и большой размерности оперативной памяти нам легче и быстрее оперировать методом Гаусса при решении СЛАУ. Хотя долгое время считалось, что разбиение матрицы на клетки позволяет увеличить размерность решаемых СЛАУ и уменьшить время решения. Наш результат не совсем согласуется с общепринятым мнением. Возможно это связано с большим числом процедур и обращений к матрице в «клеточном методе», возможно, что некоторые процедуры не идеальны.

Перейдем к рассмотрению итерационных методов решения СЛАУ. Рассматривается система линейных алгебраических уравнений:

$$Ax = b, \quad (1)$$

где $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ - $n \times n$ - матрица, а $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ - n -мерные векторы-столбцы. Система может быть преобразована к виду:

$$x = Bx + c, \quad (2)$$

где x тот же вектор неизвестных, а B и c – некоторые новые матрица и вектор соответственно.

Далее, если определить итерационный процесс следующим образом:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

начинающийся с некоторого вектора $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$, то этот процесс называют методом простой итерации.

Под методом Зейделя понимают такое видоизменение метода простых итераций (3) решения СЛАУ, приведённых к виду (2), при котором для подсчёта i -й компоненты $(k+1)$ -го приближения к искомому вектору x^* используются уже найденные на этом, т.е. $(k+1)$ -м шаге, новые значения первых $i-1$ компонент. Метод Зейделя определяет процесс вида:

$$x^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Dx^{(k+1)} + Rx^{(k)} + c, \quad (4)$$

где $B = L + D + R$, а D – диагональная, L и R – соответственно левая и правая треугольные матрицы.

Также рассматривают одно обобщение метода Зейделя, где вместо процесса (4) принимают процесс следующего вида (метод релаксации):

$$x^{(k+1)} = (1 - \omega)x^{(k)} + \omega B_1 x^{(k+1)} + \omega B_2 x^{(k)} + \omega c, \quad (5)$$

где $B = B_1 + B_2$, а B_1 - строго нижняя треугольная (с нулевой диагональю), B_2 - верхняя треугольная матрицы, ω - параметр релаксации.

Для сравнительной характеристики рассматривался ещё один метод для решения СЛАУ, который будем называть модификацией α -метода. В соответствии с этим имеем следующий процесс:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \beta_k \frac{A^T (Ax^{(k)} - b) \|Ax^{(k)} - b\|^2}{\left(A^T (Ax^{(k)} - b), A^T (Ax^{(k)} - b) \right)}, \quad (6)$$

$$\text{где } \beta_{k+1} = \min \left(1, \frac{\beta_k \|Ax^{(k)} - b\|^2}{\|Ax^{(k+1)} - b\|^2} \right), \quad (7)$$

A^T - транспонированная матрица относительно матрицы A .

Вычислительный эксперимент и его обсуждение

Нами были рассмотрены системы двух видов: произвольная матрица и матрица с диагональным преобладанием (т.е. матрица, для которой выполняется следующее условие: $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, i = \overline{1, n}$).

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, i = \overline{1, n}$$

Размерность этих систем была $n=10, 20, 40$. В качестве исходного вектора брался случайный вектор, и на этом векторе тестировались различные методы. Останов производился по соседним приближениям, то есть $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$.

В соответствии с вычислительным экспериментом может быть сделан следующий вывод: для матрицы с диагональным преобладанием более эффективными оказались метод Зейделя и метод релаксации. Метод релаксации заметно более быстрый по сравнению с методом Зейделя на модели, где матрица имеет симметрический вид. Однако недостаток метода релаксации состоит в том, что выбор параметра релаксации является довольно трудной задачей, которая решается экспериментальным путём.

Для матрицы произвольного вида единственным эффективным методом оказался α -метод, который сходится, но не самым быстрым образом. Возможно, это связано с выбором шаговой длины по формуле (7).

Для системы уравнений размерности $n=10$, при $\varepsilon=10^{-5}$, $\beta=10^{-2}$, $\omega=1.2$, начальном приближении из отрезка $[-10, 10]$, приведем полученный результат, где число в таблице – количество итераций.

Метод \ Матрица	Симметричная	Несимметричная с диагональным преобладания	Произвольная
Зейделя	13	9	Расходится
Релаксации	12	21	Расходится
Простой итерации	22	13	Расходится
α -метод	1569	1641	6000

Литература

1. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов/В.М. Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2005. – с.52-132
2. Бахвалов, Н.С. Численные методы./Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков – М.: Наука, 1987. – 630с.
3. Богачев, К.Ю. Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений./К.Ю. Богачев – М.: Изд-во МГУ им. Ломоносова, 1998. – 79с.

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРАВИЛА ОСТАНОВА ПО СОСЕДНИМ ПРИБЛИЖЕНИЯМ ДЛЯ ЯВНОГО МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пантелеева Е.В, Савчук В.Ф.

Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина, г. Брест

В действительном гильбертовом пространстве H решается уравнение 1 рода

$$Ax = y_\delta, \quad (1)$$

где $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ и A - ограниченный, положительный, несамосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением. Считается, тем не менее, что нуль принадлежит спектру оператора A , и, следовательно, задача некорректна. Предположим, что при точной правой части y существует единственное решение x уравнения (1). Для его отыскания используем явную схему метода итераций

$$z_{n+1} = (E - \alpha A^* A)^3 z_n + A^{-1} \left[E - (E - \alpha A^* A)^3 \right] y_\delta + (E - \alpha A^* A)^3 u_n, \quad z_0 \in H. \quad (2)$$

Здесь u_n - ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \leq \beta$. Обозначим

$$C = (E - \alpha A^* A)^3, \quad B = A^{-1} \left[E - (E - \alpha A^* A)^3 \right].$$

Тогда метод (2) запишется в виде $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$. В дальнейшем будем использовать равенство $A^* Ax = A^* y$. Определим момент m останова итерационного процесса условием

$$\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, \quad (n < m), \quad \|z_m - z_{m+1}\| \leq \varepsilon, \quad (3)$$

где ε - заданное до начала вычислений положительное число (уровень останова). Покажем, что метод (2) с правилом останова (3) сходится. Получим оценку для момента останова.

Справедливы леммы.

Лемма 1. Пусть приближение w_n определяется равенством

$$w_0 = z_0, \quad w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n, \quad n \geq 0, \quad (4)$$

тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^n \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2. \quad (5)$$

Доказательство

Из (4) имеем $Cu_k = w_{k+1} - Cw_k - By$. Отсюда, используя $A^* Ax = A^* y$,

получим $u_k = C^{-1} w_{k+1} - w_k - C^{-1} By =$

$$= C^{-1} w_{k+1} - w_k - (E - \alpha A^* A)^{-3} (A^* A)^{-1} \left[E - (E - \alpha A^* A)^3 \right] A^* Ax = C^{-1} w_{k+1} - w_k - C^{-1} (E - C)x =$$

$$= C^{-1} w_{k+1} - w_k - C^{-1} x + x = C^{-1} (w_{k+1} - x) - (w_k - x).$$

Обозначим $\Delta_k = w_k - x$, тогда $u_k = C^{-1} \Delta_{k+1} - \Delta_k$, откуда $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_{k+1} - C\Delta_k, \Delta_{k+1} - C\Delta_k) = \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - 2 \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_{k+1}, C\Delta_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(C^{\frac{1}{2}} \Delta_{k+1}, C^{\frac{1}{2}} \Delta_k \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Оценивая абсолютную величину последнего слагаемого правой части (6) по неравенству Коши-Буняковского, приходим к неравенству

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Нетрудно показать, что

$$(E - C)\Delta_k = w_k - w_{k+1} + Cu_k, \quad k \geq 0. \quad (8)$$

Используя неравенство (8), запишем неравенство (7) в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq \sum_{k=0}^n ((E - C)\Delta_k, (E - C)\Delta_k) - (\Delta_0, \Delta_0) + \gamma_n, \text{ где}$$

$$\gamma_n = 2 \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, \Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Нетрудно показать, что $\gamma_n \geq 0$ при любых $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. Отсюда

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^n ((E - C)\Delta_k, (E - C)\Delta_k). \text{ Применив равенство (8), получим:}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^n \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2,$$

$$\text{откуда } \sum_{k=0}^n \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2, \text{ ч.т.д.}$$

Лемма 2. При $\forall w_0 \in H$ и произвольной последовательности ошибок $\{u_n\}$, удовлетворяющих условию $\|u_n\| \leq \beta$, выполнено неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta. \quad (9)$$

Лемма 2 доказывается аналогично подобной в [1].

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть уровень останова $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ выбирается как

функция от уровней δ и β норм погрешностей $y - y_\delta$ и u_n . Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, то момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ и u_n , удовлетворяющих условиям $\|y_\delta - y\| \leq \delta$, $\|u_n\| \leq \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, то справедлива оценка

$$m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta, \beta) \rightarrow 0$, $\delta, \beta \rightarrow 0$ и $\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$, где $d > 1$, $p \in (0, 1)$, то $\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = 0$.

Доказательство

а) По индукции нетрудно показать, что

$$z_n = C^n z_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{n-k-1}), \quad (10)$$

$$\text{отсюда } w_n = C^n w_0 + A^{-1}(E - C^n)y + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.$$

Учитывая, что $z_0 = w_0$, получим

$$\|z_n - z_{n+1}\| \leq \|w_n - w_{n+1}\| + \|BC^n(y - y_\delta)\|. \quad (11)$$

Используя интегральное представление оператора, показывается, что

$$\|BC^n(y - y_\delta)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \text{ Поэтому (см. лемму 2)}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z_{n+1}\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta$. Следовательно, условием $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ , $\|y_\delta - y\| \leq \delta$, и u_n , $\|u_n\| \leq \beta$.

б) Рассмотрим последовательность (4) и определим момент останова m' условием $\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta, (n < m'), \|w_{m'} - w_{m'+1}\| \leq \varepsilon - \|B\|\delta. \quad (12)$

Из (12) следует, что $m \leq m'$. Из леммы 1 при $n = m'$ получим

$$\sum_{k=0}^{m'} \|w_k - w_{k+1} + C u_k\|^2 \leq \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|C u_k\|^2. \text{ Отсюда } \sum_{k=0}^{m'} (\|w_k - w_{k+1}\| - \|C\|\beta)^2 \leq \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|C u_k\|^2.$$

Так как при $n < m'$ имеем $\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta$,

то $m'(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta)^2 \leq \|w_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2\beta^2$. Учитывая, что $w_0 = z_0$ и $m \leq m'$, получим

$$m' \leq m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}.$$

в) Из (10) вычтем $x = C^n x + C \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y$, получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k [C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}]. \quad (13)$$

Отсюда

$$\|\Delta_n\| \leq \|C^n \Delta_0\| + (\|B\|\delta + \|C\|\beta)n, \quad (14)$$

где $\Delta_n = z_n - x$, $\Delta_0 = z_0 - x$. В частности, (14) справедливо и при $n = m$.

Так как спектр оператора $C = (E - \alpha A^* A)^3$ принадлежит $[0, 1]$, то $\|C^n(E - C)\| \leq \frac{1}{n+1}$. Поэтому из (13) при $n = m - 1$

$$\|z_{m-1} - z_m\| \leq \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta.$$

Поскольку по условию теоремы $\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$, $d > 1$, $p \in (0, 1)$, то при всех достаточно малых δ, β выполняется неравенство

$$\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta, \text{ поэтому из б) получим}$$

$$m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}. \text{ Так как } \|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon, \text{ то}$$

$$\varepsilon \leq \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta. \text{ Отсюда}$$

$$m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \leq \frac{2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\| (\|B\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta \left[2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)} \right]}. \quad \text{Следовательно,}$$

$m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty, \delta, \beta \rightarrow 0$. Так как при $m \rightarrow \infty$ $\|C^m \Delta_0\| \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}} \| \Delta_m \| \leq \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}} \| z_m - x \| \leq \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}} (\| C^m \Delta_0 \| + m(\| B \| \delta + \| C \| \beta)) = 0.$$

Если номера останова m , зависящие от $\varepsilon, y - y_\delta, \{u_n\}$, не стремятся к ∞ при $\varepsilon, \delta, \beta \rightarrow 0$, а окажутся ограниченными, то и в этом случае $z_m \rightarrow x, \beta \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$, ч.т.д.

Литература

- Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач/И.В. Емелин, М.А. Красносельский//Автоматика и телемеханика.-1978.-№12.-С.59-63.

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕКОТОРЫХ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИХ ПРОЦЕССОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рыбачук Г.Г.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест.

Задача отыскания решения системы нелинейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где вектор-неизвестных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ - нелинейная вектор-функция. На практике она встречается значительно чаще, чем уравнение с одним неизвестным, так как в реальных исследованиях интерес представляет, как правило, определение не одного, а нескольких параметров (нередко их число доходит до сотен и тысяч).

Найти точное решение системы, то есть вектор $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, удовлетворяющий уравнениям (1), практически невозможно. Единственно реальный путь решения системы (1)

состоит в использовании итерационных методов для получения приближённого решения $\tilde{x} = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$, удовлетворяющего при заданном $0 < \varepsilon \ll 1$ неравенству $\|x^* - \tilde{x}\| < \varepsilon$ или $\|f(\tilde{x})\| < \varepsilon$.

Прежде, чем перейти к изучению методов решения системы (1), подчеркнём важность понимания того факта, что эта задача может вообще не иметь решения, а в случае, когда решения существуют, их число может быть произвольным. В общем случае весьма сложно выяснить, имеет ли система решения и сколько их.

Будем считать функцию $f \in C_D^{(2)}$, где D - некоторая окрестности решения x^* , $f'(x)$ - матрица Якоби системы (1).

Наиболее распространённый итерационный метод для решения уравнения (1) - метод Ньютона, который в свою очередь используется как основа для построения квазиньютоновских процессов.

Итерационная формула метода Ньютона имеет вид:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - (f'(x^{(n)}))^{-1} f(x^{(n)}). \quad (2)$$

Замечание 1. Формула (2) предполагает применение трудоёмкой операции обращения матриц, поэтому непосредственное её использование для вычисления $x^{(n+1)}$ в большинстве случаев нецелесообразно. Обычно вместо этого решают эквивалентную систему линейных алгебраических уравнений:

$$f'(x^{(n)}) \Delta x^{(n)} = -f(x^{(n)}). \quad (3)$$

Затем полагают:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \Delta x^{(n)}. \quad (4)$$

Замечание 2. Метод Ньютона обладает рядом недостатков, один из которых – локальная сходимость, то есть метод сходится лишь, вообще говоря, при «хорошем» начальном приближении. Для расширения области сходимости вводится некоторый параметр β_n , который, при определённых условиях, способен увеличить область сходимости метода.

Исходя из вышесказанного, заменим формулу (3) формулой с параметром β_n , определяя итерационный процесс следующим образом:

Шаг 1. Решается линейное уравнение относительно $\Delta x^{(n)}$:

$$f'(x^{(n)}) \Delta x^{(n)} = -\beta_n f(x^{(n)}), \quad n = 1, 2, \dots, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}] \quad (5)$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n :

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \Delta x^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}] \quad (6)$$

Шаг 3. Если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, где ε - малая величина (параметр останова), то конец подсчёта, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} = 1$, иначе β_{n+1} задаётся формулами, которые мы определим в дальнейшем, и осуществляется переход на шаг 1.

Теорема [1]: Пусть оператор f удовлетворяет следующим условиям

$$f \in C_D^2, \left\| [f'(x)]^{-1} \right\| \leq B, \|f''(x)\| \leq K, \forall x \in D, \quad (7)$$

Размерность этой системы была $n=10,20,40$. В качестве исходного вектора брался случайный вектор и на этом векторе тестировались различные варианты введения шаговой длины. Для системы $n=10$ и начального вектора $x_0 = (7,02;9,96;10,07;10,42;7,38;12,16;8,05;9,97;8,29;6,17)$. Результаты расчётов сведены в таблицу:

Таблица

№, формулы	Кол-во итераций	$\ f(x_{n+1})\ $, норма прил. решения
8	42	3,28E-11
9	37	2,5E-11
10	27	7,6E-11
11	28	7,6E-11
12	метод расходится	

Проведённый вычислительный эксперимент позволяет утверждать, что при большой размерности системы $n \geq 10$, с одним и тем же начальным приближением, наиболее эффективными оказались одношаговый метод неполного прогноза (10) и одношаговый метод полного прогноза (11).

Сравнение осуществлялось в рамках регуляризованного процесса, то есть вместо линейного уравнения (5) решается линейное уравнение:

$$(\alpha\beta_n \|f(x_n)\|^2 E + \overline{f'(x_n)} f'(x_n)) \Delta x_n = -\overline{f'(x_n)} f(x_n), \alpha \in [10^{-6}, 10^{-3}], \beta_0 \in [10^{-4}, 10^{-1}] \quad (13)$$

На данной нелинейной задаче можно утверждать, что среди методов регуляризованные, где первый шаг задаётся формулой (13), и их аналоги являются более эффективными, чем нерегуляризованные, где первый шаг задаётся формулой (5).

Литература

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. — Брест: Изд-во БрГУ, 2005. — 184 с.
2. Вержбицкий, В.М. Численные методы / В.М. Вержбицкий. — 2-е изд., перераб. — М.: Высшая школа, 2005. — 840 с.: ил.
3. Амосов, А.А. Вычислительные методы для инженеров / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копчёнова. — Учеб. пособ. — М.: Высшая школа, 1994. — 544 с.: ил.
4. Березин, И.С. Методы вычислений. Т. 1 / И.С. Березин, Н.П. Жидков. — М.: Наука, 1966. — 630 с.
5. Ермаков, В.В. Оптимальный шаг и регуляризация в методе Ньютона / В.В. Ермаков, Н.Н. Калиткин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1992. — Т.32, №1. — С. 3—12.
6. Мадорский, В.М. Локализация решений нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. // Изв. АН БССР. - Сер. физ.-мат. наук. — 1987. №2. - С. 113—115.
7. Бахвалов, Н.С. Численные методы. / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков — М.: Наука, 1987. — 630 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ В СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ

Савчук М. А.

Белорусский государственный технологический университет, г. Минск

Проведение различного рода испытаний и экспериментов является неперенным условием развития науки и прогресса прикладных областей деятельности. При этом часто встречаются задачи, в которых представляет интерес вероятность числа наступления некоторого события A в многократно повторяющихся при данном комплексе условий испытаниях. Например, мобильный оператор A обслуживает 10000 абонентов, каждый из которых в наиболее напряженные часы разговаривают в среднем 2 минуты. Какова вероятность того, что в некоторый момент времени услугами оператора A пользуется не менее 300 абонентов.

Если вероятность наступления события A в каждом испытании не меняется в зависимости от исходов других, то такие испытания называются независимыми относительно события A . Если независимые повторные испытания проводятся при одном и том же комплексе условий, то вероятность наступления события A в каждом испытании одна и та же. Такая последовательность независимых испытаний называется схемой Бернулли.

Пусть μ – число наступлений события A в n испытаниях, тогда вероятность $P_n(\mu = m)$ вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(\mu = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p, \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (1)$$

$$P_n(\mu \geq k) = \sum_{m \geq k} C_n^m p^m q^{n-m} \quad (2)$$

В нашем примере, несколько упрощая реальную ситуацию, можно считать, что в данный момент времени звонки различных абонентов независимы, и каждый абонент использует услуги связи с вероятностью $1/30$. Однако вычисления по формуле (2) затруднительны из-за большого значения n .

На практике при больших n используют асимптотические формулы Пуассона и Муавра-Лапласа. Как правило, в учебниках даются рекомендации о том, когда допустимо применение этих формул. Так, в [1] условиями использования формулы Пуассона являются: n велико и $np \leq 10$, а условиями использования формулы Муавра-Лапласа: n велико, p мало и $npq \geq 20$; В.П. Чистяков [3] предлагает для формулы Пуассона $n > 100$, $np < 30$, а для формулы Муавра-Лапласа $n > 100$, $npq > 20$. Есть и ряд других рекомендаций, например, для формулы Пуассона $n \geq 50$, $np \leq 10$ или $np \approx npq$. Таким образом, эти рекомендации носят приблизительный характер.

Для исследования точности приближения по формуле Пуассона, сравним значения вероятности $P_n(\mu = m)$, рассчитанные по формулам Бернулли и Пуассона для различных значений n и p , таких что $np = a$. На рис.1 показана зависимость $P_n(\mu = m)$ от m , $0 \leq m \leq 10$. Вероятности $P_n(\mu = m)$ рассчитаны по формуле Пуассона с параметром $a = 3$ и формуле Бернулли $n = 10, p = 0.3; n = 30, p = 0.1; n = 60, p = 0.05; n = 100, p = 0.02; n = 150, p = 0.02$ (во всех случаях $np = 3$). Абсолютная погрешность

$\Delta = |P_n(\mu = m) - \Pi(m)|$ (где $\Pi(m) \approx \frac{a^m e^{-a}}{m!}$) принимает максимальное значение, когда $m = 3$ и,

как показывают расчеты, становится меньше 0.01 при $n > 35$; $\Delta < 0.001$ при $n > 340$. Таким образом, при всех случаях $np = 3$, которые удовлетворяет рекомендациям всех авторов, формула Пуассона дает достаточно хорошее приближение уже при $n > 35$. Если рассмотреть граничный случай $np = 10$ (см. рис.2), то ошибка Δ становится меньше 0.01 только при $n > 65$; $\Delta < 0.001$ при $n > 635$. При этом также ошибка максимальна для $m \approx np$.

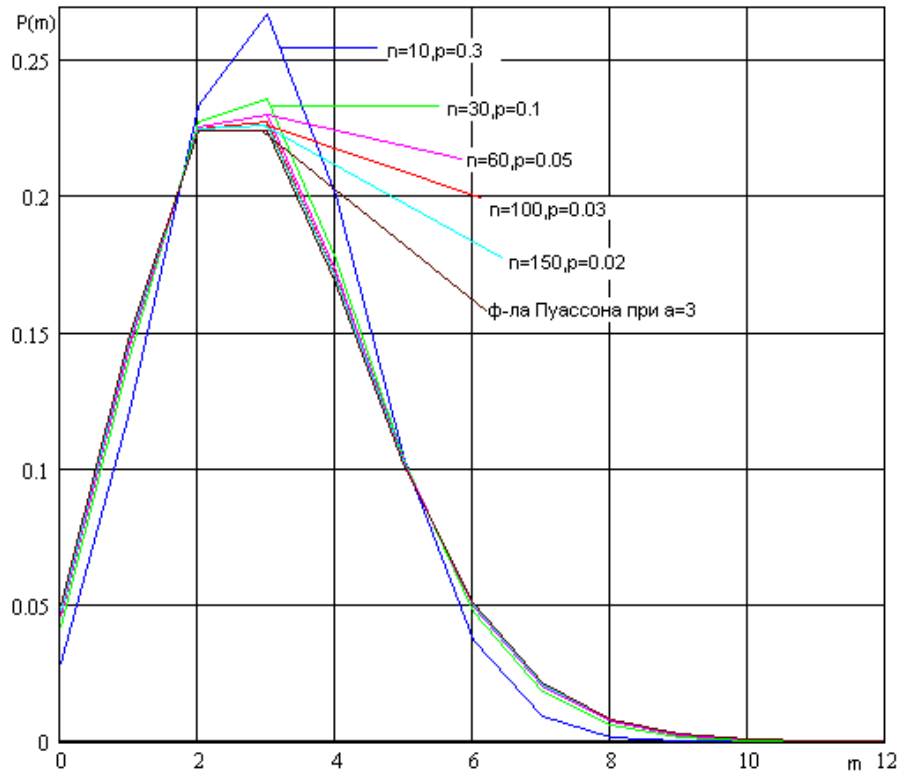


Рис.1. Сравнение вычислений по формулам Бернулли и Пуассона при $a = np = 3$

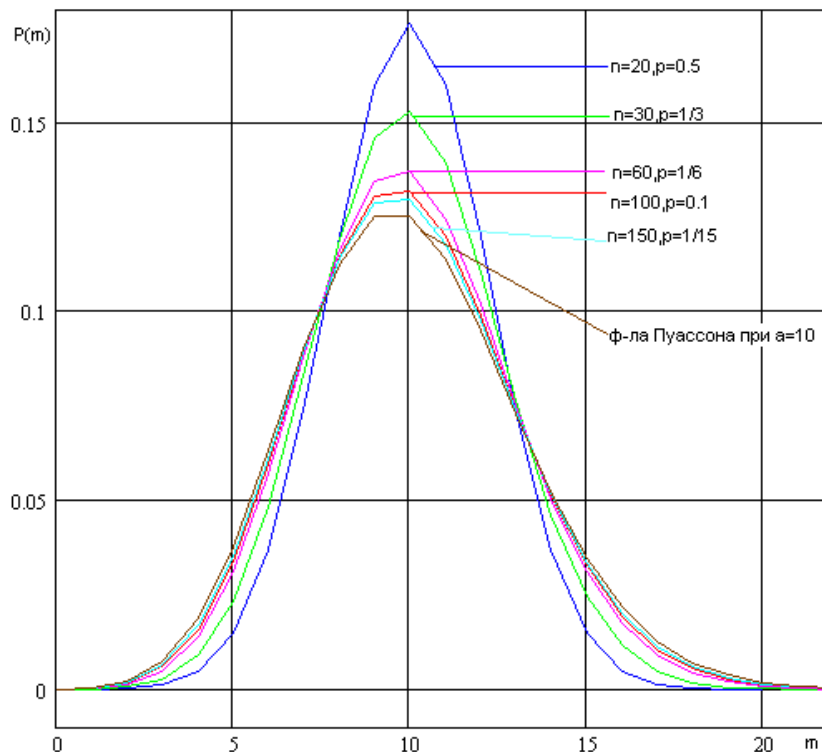


Рис.2. Сравнение вычислений по формулам Бернулли и Пуассона при $a = np = 10$

Аналогичные вычисления для $P_n(\mu \geq k)$ при $a = 3$ показывают, что ошибка Δ принимает максимальное значение тоже при $k \approx np$, но $\Delta < 0.01$ при $n > 45$, а $\Delta < 0.001$ при $n > 450$, т.е. хорошее приближение достигается при больших значениях n , чем в случае расчета вероятностей $P_n(\mu = m)$.

Теперь проведем сравнение вычисления вероятностей $P_n(\mu = m)$ для $m \in (np - \sqrt{npq}; np + \sqrt{npq})$ по формуле Бернулли и Муавра-Лапласа.

$n = 30$		$n = 60$		$n = 100$		$n = 150$	
m	Δ	m	Δ	m	Δ	m	Δ
$p = 0.1$							
2	0.026	4	0.015	7	0.008	11	0.005
3	0.007	6	-0.002	10	-0.001	15	0.0006
4	0.025	8	-0.012	13	-0.006	19	$-7.4 \cdot 10^{-5}$
$p = 0.3$							
7	0.006	15	0.003	26	$-7.9 \cdot 10^{-7}$	40	$-1.8 \cdot 10^{-13}$
9	-0.0016	18	$-2.9 \cdot 10^{-7}$	30	$-2.6 \cdot 10^{-5}$	45	$-2.6 \cdot 10^{-11}$
11	-0.005	21	$-1.4 \cdot 10^{-5}$	34	$4.3 \cdot 10^{-11}$	50	$6.2 \cdot 10^{-9}$
$p = 0.5$							
12	0.0006	26	$2.3 \cdot 10^{-9}$	45	$3.8 \cdot 10^{-17}$	69	$1.8 \cdot 10^{-23}$
$n = 30$		$n = 60$		$n = 100$		$n = 150$	
m	Δ	m	Δ	m	Δ	m	Δ
$p = 0.5$							
15	-0.001	30	$2.1 \cdot 10^{-6}$	50	$1 \cdot 10^{-13}$	75	$-9 \cdot 10^{-33}$
18	$4.5 \cdot 10^{-8}$	34	$9.6 \cdot 10^{-15}$	55	$1.5 \cdot 10^{-23}$	81	$-1.1 \cdot 10^{-28}$

Как видно из таблицы, абсолютная погрешность Δ уменьшается с ростом n и p . Расчеты показывают, что абсолютная погрешность уменьшается с ростом n и становится меньше 0.001 при $n \geq 800$, если $p = 0.1$ ($npq = 72$); при $n \geq 180$, если $p = 0.3$ ($npq = 72.8$); при $n \geq 36$, если $p = 0.5$ ($npq = 9$); и меньше 0.01 при $n \geq 90$, если $p = 0.1$ ($npq = 8.1$); при $n \geq 20$, если $p = 0.3$ ($npq = 4.2$); при $n \geq 13$, если $p = 0.5$ ($npq = 3.25$). Таким образом, точность 0.01 достигается даже при достаточно малых значениях npq . Аналогично вычислениям для $P_n(\mu \geq k)$ показывают что точность приближения достигает значения меньше 0.01 по сравнению со случаем $P_n(\mu = m)$ при больших значениях npq : при $n \geq 110$, если $p = 0.1$ ($npq = 9.9$); при $n \geq 32$, если $p = 0.3$ ($npq = 6.72$); при $n \geq 17$, если $p = 0.5$ ($npq = 4.25$).

Вернемся к примеру. Число испытаний $n = 10000$ велико, и вероятность успеха в каждом испытании (вероятность того, что абонент использует связь в данный момент) $p = 1/30$ очень мала. Это хорошие условия для использования формулы Пуассона, но $np = 1000/3000$ велико, следовательно, рекомендуется использование формулы Муавра-Лапласа. Выполнив расчеты на компьютере с помощью формул Бернулли, Пуассона и Муавра-Лапласа, получим для вероятности $P_{10000}(\mu \geq 300)$ значения соответствен-

но 0.9718, 0.9697, 0.9721. Таким образом, обе формулы дают хорошее приближение.

Рассмотрим теперь задачу, представляющую практический интерес. Какое количество линий N необходимо оператору А, чтобы при нормальных условиях эксплуатации вероятность перегрузки сети была меньше 0.01, т.е. $P = P_{10000}(\mu \geq N) < 0.01$. Используя формулы Бернулли, получим при $N = 377$ $P = 0.0089$, по формуле Муавра-Лапласа при $N = 377$ $P = 0.0087$; и по формуле Пуассона при $N = 378$ $P = 0.0087$, т.е. достаточно 378 линий. Итак, в этой задаче обе асимптотические формулы дают хорошее приближение.

Литература

- [1] Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 543с.
 [2] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2-х тт. Т.1. – М.: Мир, 1967. – 498с.
 [3] Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Высшая школа, 1975. – 272с.

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА И ЕГО УТОЧНЕНИИ

Старовойтов Р.С., Харько Ю.Г., Тимофеев А.Э.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест

При всех достоинствах метод Галёркина обладает тем существенным на современном этапе формализации прикладных исследований недостатком, что в “чистом” виде он малопригоден для автоматизированных компьютерных вычислений. Однако при подходящем выборе базисных функций φ_i в представлении приближённого решения $u_n(x)$, связанных с определённой на отрезке $[a, b]$ системой точек (сеткой), метод Галёркина трансформируется в сугубо численный процесс получения каркаса приближённого решения на заданной сетке, причём технология построения этого каркаса в конечном итоге оказывается близкой к той, которая присуща методу конечных разностей. Отсюда название такого численного процесса, как проекционно-разностный или проекционно-сеточный метод. Другое его, более раннее и более употребительное, название - метод конечных элементов. (МКЭ или FEM от англ. Finite element method).

Рассмотрим задачу Дуффинга:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x + \gamma x^n &= f(t) \\ x &= x(t) \quad t \in [a, b] \\ x(a) &= A \quad x(b) = B \end{aligned} \quad (1)$$

Введём равномерную сетку на отрезке $[a, b]$ с шагом $h = \frac{b-a}{n+1}$, состоящую из n внутренних точек $x_i = a + ih$ ($i=1, 2, \dots, n$) и двух крайних точек $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$.

Будем искать приближённое решение $u_n(x)$ данной краевой задачи в виде линейной комбинации простых однотипных функций $\varphi_i(x)$, на роль которых возьмем так называемые **финитные функции**, определяемые равенством:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

Считая переменную x , принадлежащей отрезку $[a, b]$ и полагая $t = \frac{x - x_i}{h}$, видим, что при $|t| < h$ имеем, что $x_i - h < x < x_i + h$.

$\varphi(x)$ отлична от нуля лишь на интервале (x_{i-1}, x_{i+1}) с центром в точке x_i .

Таким образом, разные узлы x_i рассматриваемой сетки определяют разные функции $\varphi_i(x)$, которые можно задать неравенствами

$$\varphi_i = \begin{cases} 1 + \frac{x - x_i}{h} = \frac{x - x_{i-1}}{h}, & \text{если } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 1 - \frac{x - x_i}{h} = -\frac{x - x_{i+1}}{h}, & \text{если } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{если } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

Итак, пусть ищется приближенное решение наиболее простой краевой задачи для дифференциального уравнения, а именно - с однородными краевыми условиями первого рода

$$y(a)=0, y(b)=0.$$

Приближенное решения ищем в виде:

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$$

С кусочно-линейными базисными функциями $\varphi_i = \varphi_i(x)$ для подсчета коэффициентов c_i , согласно методу Галёркина, нужно составить линейную алгебраическую систему

$\sum_{j=1}^n c_j a_{ij}(x) = d_i \quad i = \overline{1, n}$. Её правая часть имеет вид:

$$\begin{aligned} d_i &= \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \varphi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \frac{x - x_{i-1}}{h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \left(-\frac{x - x_{i+1}}{h} \right) dx = \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x - x_{i-1}) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)(x - x_{i+1}) dx \right] \end{aligned}$$

Так как при краевых условиях используются n базисных функций с φ_1 по φ_n , и все они в точках a и b равны нулю, то формула для вычисления элементов a_{ij} матрицы галёркинской СЛАУ здесь имеет вид

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= -\int_a^b \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx + \int_a^b p(x) \varphi_j'(x) \varphi_i(x) dx + \int_a^b q(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx = \\ &= \sum_{k=0}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[-\varphi_j'(x) \varphi_i'(x) + p(x) \varphi_j'(x) \varphi_i(x) + q(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x) \right] dx \end{aligned}$$

Конкретизируем формулы для вычисления ненулевых элементов матрицы A . Полагая в $j = i$, получаем формулу для вычисления диагональных элементов:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= -\frac{2}{h} + \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)(x - x_{i-1}) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x - x_{i-1})^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)(x - x_{i+1}) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x - x_{i+1})^2 dx \right] \end{aligned}$$

При $j=i+1$ находим выражения элементов правой побочной диагонали матрицы A

$$a_{i,i+1} = \frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)(x - x_{i+1}) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x - x_i)(x - x_{i+1}) dx \right],$$

а при $j=i-1$ - левой

$$a_{i,i-1} = \frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)(x-x_{i-1})dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x-x_{i-1})(x-x_i)dx \right],$$

Сделаем лишь несколько замечаний.

Во-первых, находимая описанным способом функция $y_n(x)$ представляет собой *кусочно-линейную аппроксимацию* точного решения $y(x)$ краевой задачи, а совокупность значений коэффициентов c_1, \dots, c_n играет роль *каркаса* приближенного решения $y_n(x)$ на сетке x_1, \dots, x_n , что хорошо видно в результате подстановки $x = x_j$ в приближённое решение :

$$y_n(x_j) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x_j) = c_j, \text{ в силу } \varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j=i \\ 0, & \text{если } j \neq i \end{cases}$$

Во-вторых, при вычислении ненулевых элементов матрицы $A = (a_{ij})$ линейной системы следует учитывать, что в формулах имеются одинаковые интегралы, что хотя бы незначительно сокращает затраты при численном интегрировании.

В-третьих, в данном случае галёркинскую систему алгебраических уравнений удобно представить как краевую задачу для трехточечного разностного уравнения второго порядка, т.е. в виде:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = d_1, \\ a_{i,i-1}c_{i-1} + a_{ii}c_i + a_{i,i+1}c_{i+1} = d_i \quad (i = 2, \dots, n-1), \\ a_{n,n-1}c_{n-1} + a_{nn}c_n = d_n \end{cases}$$

свидетельствующем о готовности системы к применению метода прогонки.

В четвертых, при неоднородных краевых условиях первого рода $y(a) = A, \quad y(b) = B$

можно воспользоваться приемом сведения к задаче:

$$L[u] = F(x), \text{ где } F(x) = f(x) - p(x)v'(x) - q(x)v(x), \quad v(x) = A + \frac{B-A}{b-a}(x-a),$$

с однородными условиями $u(a) = 0, \quad u(b) = 0$.

Найдя МКЭ ее приближенное решение

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x), \text{ получаем}$$

$$y(x) \approx y_n(x) := u_n(x) + v(x)$$

При численном решении задачи Дюффинга методом конечных элементов, нами было получено приближенное решение, норма невязки на котором составляет $1e-3$.

Данный результат удалось незначительно улучшить с помощью кусочно-полиномиальной аппроксимацией функции $y=f(x)$, в предположении, что аппроксимирующая функция $w(x)$ составляется из отдельных многочленов невысокой степени, определенных каждый на своей части отрезка $[a;b]$. Этот процесс позволяет легко находить коэффициенты из интерполяционных условий. Так, если заданы значения $y_i = f(x_i)$, на системе узлов x_i ,

$$a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq b,$$

и требуется аппроксимировать функции $f(x)$, кусочно-полиномиальной функцией второго порядка $W(x)$ вида

$$W(x) = \begin{cases} a_1 x^2 + b_1 x + c_1 & \text{при } x \in [x_0, x_2] \\ a_2 x^2 + b_2 x + c_2 & \text{при } x \in [x_2, x_4] \\ \dots \\ a_m x^2 + b_m x + c_m & \text{при } x \in [x_{2m-2}, x_{2m}] \end{cases},$$

то каждое звено кусочно-квадратической функции $W(x)$, при $n=2m$ на заданной системе узлов, определяет тройку коэффициентов ak, bk, ck ($k=1, 2, \dots, m$), которые могут быть найдены последовательным решением трехчленных систем:

$$\begin{cases} a_k x_{2k-2}^2 + b_k x_{2k-2} + c_k = y_{2k-2} \\ a_k x_{2k-1}^2 + b_k x_{2k-1} + c_k = y_{2k-1} \\ a_k x_{2k}^2 + b_k x_{2k} + c_k = y_{2k} \end{cases},$$

полученных при использовании интерполяционных условий, где x_i и y_i заведомо известны из приближения в МКЭ.

В результате подстановки $w(x)$ в исходную задачу получаем норму невязки на приближенном решении в соответствующих узлах. Как показывает практика, такая процедура позволяет говорить об улучшении точности решения приблизительно на порядок при хорошем вбрасывании точек. Таким образом, нами рассматривается способ приближения таблично заданных функций с помощью функций, заданных аналитично на большом числе отрезков разбиения промежутка $[a; b]$, звеньями которых служат многочлены невысоких степеней.

Остаётся открытым вопрос о количествах уточнений. Для решаемой задачи уже после второго уточнения приходилось иметь дело с некорректными результатами, а именно - потеря определяющих узлов функции $y=f(x)$, что говорит о риске потерять важную информацию для таблично заданной функции.

Литература

1. Вержбицкий, В.М. Численные методы [Текст]. В 2 т. Т. 2. Линейная алгебра и нелинейные уравнения/В.М. Вержбицкий. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2005. – 432 с.: ил. – 5000 экз. – ISBN 5-329-01110-8.

ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В R^n НЕЛОКАЛЬНЫХ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Стрилец Н.Н.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест

В работе [1] для решения уравнения

$$f(x) = 0, \quad f : D \subset X \rightarrow X, \quad X - B\text{-пространство} \quad (1)$$

рассматривается так называемый регуляризованный нелокальный квазиньютоновский итерационный метод, алгоритм реализации которого описывается индуктивным путем.

На нулевой итерации задан начальный набор параметров (x_0, β_0, γ_0) , где $\beta_0 \in [10^{-6}, 1]$, $\gamma_0 = \beta_0^2$.

На n -ой итерации ($n = 0, 1, 2, \dots$) уже имеется набор параметров (x_n, β_n, γ_n) , а очередной набор $(x_{n+1}, \beta_{n+1}, \gamma_{n+1})$ вычисляется в результате выполнения следующей последовательности шагов.

Шаг 1. Находится поправка из линейного уравнения

$$(\alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + \overline{f'(x_n)} f'(x_n)) \Delta x_n = -\overline{f'(x_n)} f(x_n), \quad \alpha \in [10^{-6}, 10^{-3}], \quad (2)$$

где E – единичный оператор, а $\overline{f'(x)}$ – оператор, сопряженный производной Фреше $f'(x_n)$ оператора f .

Шаг 2. Следующее приближение вычисляется по формуле:

$$x_{n+1} := x_n + \beta_n \Delta x_n. \quad (3)$$

Шаг 3. Если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, где ε – точность, то выход из итерационного процесса, иначе переход к следующему шагу.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\beta_n = 1$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе

$$\beta_{n+1} := \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|}\right), \quad \gamma_{n+1} := \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|} \quad (4)$$

и осуществляется переход к следующей итерации.

Описанный процесс обозначим (2)–(4). Напомним, что он отличается от нерегуляризованного варианта из [2] только видом линейного уравнения, решаемого на первом шаге.

Всюду далее будем полагать $X = R^n$. Пусть также $F(x_n) = \overline{f'(x_n)} f'(x_n)$.

Суть регуляризации (2) заключается в том, что возмущение матрицы $F(x_n)$ вдали от корня сравнительно велико, а вблизи корня оно становится достаточно небольшим. Однако вычислительная практика показывает, что возмущение матрицы в (2) не всегда дает требуемый эффект в силу того, что величина $\|f(x_n)\|^2$, входящая в возмущение, часто имеет порядок меньший по сравнению с диагональными элементами матрицы $F(x_n)$. Поэтому для эффективного вычисления поправки Δx_n в таких случаях более разумным будет возмущать каждый диагональный элемент матрицы $F(x_n)$ величиной одного порядка с ним. В связи с этим в данной работе предлагается регуляризации вида

$$(R(x_n) + F(x_n)) \Delta x_n = -\overline{f'(x_n)} f(x_n), \quad (5)$$

где $R(x_n) = \alpha\beta_n^4 \min(1, \|f(x_n)\|^2) \cdot \text{diag}(F(x_n))$ ($\text{diag}(M)$ – диагональная матрица, составленная из элементов главной диагонали матрицы M).

Процесс, полученный из процесса (2)–(4) заменой уравнения (2) на уравнение (5), обозначим (5),(3),(4).

Относительно операторов $f \in C_D^2$, $f'(x)$, $f''(x)$, $R(x_n)$ сделаем следующие предположения:

$$\|f'(x)\| \leq A, \quad \|[f'(x)]^{-1}\| \leq B, \quad \|f''(x)\| \leq K, \quad \forall x \in D. \quad (6)$$

$$\|[R(x_n) + F(x_n)]^{-1}\| \leq C, \quad \forall x \in D, \quad \forall \alpha \in [10^{-6}, 10^{-3}], \quad \forall \beta \in [10^{-6}, 1]. \quad (7)$$

Теорема. Пусть оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям (6),(7), в шаре $D = S(x_0, r)$ существует x^* – решение уравнения (1), начальное приближение x_0 и параметры α, β_0 таковы, что выполняется условие $\xi_0 < 1$. Тогда процесс (5),(3),(4)

сходится к x^* . Здесь $r = \frac{2\beta_0 AC \|f(x_0)\|}{(1 - q_0)}$, $\xi_0 = \beta_0 A^2 C (\alpha\beta_0^3 AB + 0.5CK \|f(x_0)\|)$,

$$q_0 = (1 - \beta_0(1 - \xi_0)).$$

Доказательство. Так как $f \in C_D^2$, то из теоремы о среднем [3], с учетом (3) и (6), вытекает оценка:

$$\|f(x_{n+1}) - f(x_n) - \beta_n f'(x_n) \Delta x_n\| \leq 0.5 \beta_n^2 K \|\Delta x_n\|^2. \quad (8)$$

Из (5) и (6) следует соотношение

$$f'(x_n) \Delta x_n = -f(x_n) - [\overline{f'(x_n)}]^{-1} R(x_n) \Delta x_n. \quad (9)$$

Для Δx_n из (5)–(7) имеем оценку

$$\|\Delta x_n\| \leq AC \|f(x_n)\|. \quad (10)$$

Тогда, с учетом (6), (8)–(10), получим оценку для $\|f(x_{n+1})\|$:

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1})\| &\leq (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n \left\| [\overline{f'(x_n)}]^{-1} \right\| \|R(x_n)\| \|\Delta x_n\| + 0.5 \beta_n^2 K \|\Delta x_n\|^2 \leq \\ &\leq (1 - \beta_n (1 - \xi_n)) \|f(x_n)\| = q_n \|f(x_n)\|. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\xi_n = \beta_n A^2 C (\alpha \beta_n^3 AB + 0.5 CK \|f(x_n)\|)$, $q_n = (1 - \beta_n (1 - \xi_n))$.

Пусть $\beta_m \neq 1$. Тогда $\forall k, k = \overline{2, m}$ из (4) нетрудно получить соотношение:

$$\beta_k \|f(x_k)\| = \beta_{k-2} \|f(x_{k-1})\|, \quad k = \overline{2, m}. \quad (12)$$

Пусть начальное приближение x_0 и параметры α, β_0 таковы, что $\xi_0 < 1$. Тогда, с учетом (11) и (12), индуктивным путем получим:

$$\beta_n > \beta_{n-2}, \quad \xi_n < \xi_{n-2}, \quad q_n < q_{n-2} < 1, \quad n = \overline{2, m}. \quad (13)$$

Тогда из (4), (11) и (13) следует существование $m \in N$ такого, что $\beta_m \neq 1, \beta_{m+1} = 1$. Тогда, согласно построению алгоритма, $\forall k \geq m+1, \beta_k = 1$.

При $n = m$ из (4) нетрудно получить соотношение:

$$\|f(x_{m+1})\| \leq \beta_{m-1} \|f(x_m)\|. \quad (14)$$

Далее с учетом (11), (13) и (14) индуктивным путем получим:

$$\beta_{n+1} = \beta_n = 1 > \beta_{m-1}, \quad \xi_{n+1} < \xi_n < \xi_{m-1}, \quad q_{n+1} < q_n < q_{m-1} < 1, \quad n = m+1, m+2, \dots \quad (15)$$

Из (11), (13) и (15) следует оценка:

$$\|f(x_{n+1})\| \leq \prod_{i=0}^n q_i \cdot \|f(x_0)\| < q_0^{n+1} \|f(x_0)\|. \quad (16)$$

Тогда из (10)–(15) получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \|x_{k+1} - x_k\| = \sum_{k=n}^{n+p-1} \beta_k \|\Delta x_k\| \leq AC \sum_{k=n}^{n+p-1} \beta_k \|f(x_k)\| < \\ &< 2\beta_0 AC \|f(x_0)\| q_0^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\infty} q_0^k < 2\beta_0 AC \|f(x_0)\| \frac{q_0^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{1 - q_0}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17) следует фундаментальность последовательности $\{x_n\}$. В силу полноты пространства X последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу $x^* \in X$. Тогда, с учетом (16), в силу непрерывности оператора f и единственности предела, получим, что x^* – корень уравнения (1). Таким образом, доказана сильная сходимость приближений $\{x_n\}$ к x^* . Отметим, что из (11) следует сверхлинейная скорость сходимости процесса (5),(3),(4), как только β_n достигнет 1. Из (17) при $n=0$, $p \in N$ также следует, что все $x_p \in D$. Оценка погрешности n -го приближения получается при переходе к пределу в (17) при $p \rightarrow \infty$. **Теорема доказана.**

В качестве тестовых систем для численных экспериментов были взяты тригонометрическая система из [4]

$$n - \sum_{j=1}^n (\cos x_j + i(1 - \cos x_j) - \sin x_j) = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

и комбинированная система из [1]

$$\begin{cases} x_i + \sum_{j=1}^n x_j = n + 1, \quad i = \overline{1, n-3}, \\ x_1 x_2 \dots x_{n-3} x_{n-2} x_{n-1} x_n = 1, \\ \sin^2 x_1 + \cos^3 x_n = \sin^2 1 + \cos^3 1, \\ \operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_n = 2 \operatorname{arctg} 1. \end{cases}$$

Результаты численных экспериментов говорят о том, что использование регуляризации (5) вместо (2) в ряде случаев может существенно повысить процент сходимости итерационного метода. В этом смысле оба варианта регуляризации можно трактовать как дополняющие друг друга.

Литература

1. Мадорский В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений. - Брест, 2005.
2. Мадорский В.М., Стрилец Н.Н. Об эффективных методах получения приближенных решений нелинейных дифференциальных задач. Труды Института математики. 2004, Т. 12, №2. С. 130–132.
3. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. - М.: Мир, 1975.
4. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. - М.: Мир, 1988.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНЫХ РЕШЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ДЕЛЬТОВИДНОЙ ЗАДАЧИ ПЯТИ ТЕЛ

Фетисова С.А., Гребенников Е.А.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест

Ньютонова ограниченная задача многих тел - одна из самых известных моделей классической механики, математики и астрономии. Дифференциальные уравнения этой задачи неинтегрируемы, что приводит к необходимости использования компьютерных технологий для нахождения точных частных решений (см. [1]). Важное место среди них занимает ССВ *Mathematica* [2], с помощью которой выполнялись все расчеты.

Пусть четыре массивных тела P_0, P_1, P_2, P_3 равномерно вращаются вокруг оси Oz инерциальной барицентрической системы координат с постоянной угловой скоростью ω , образуя в любой момент времени дельтоид, плоскость которого совпадает с плоскостью Oxy . Существование соответствующих точных решений задачи четырех тел доказано в работе [3]. Пусть пятое тело P_4 , масса которого пренебрежимо мала, движется в гравитационном поле, генерируемом телами P_0, P_1, P_2, P_3 . Отметим, что дифференциальные уравнения движения этого тела существенно нелинейны, и найти их общее решение не представляется возможным. Поэтому задача состоит в том, чтобы найти равновесные решения и исследовать их устойчивость. Начало таким исследованиям было положено в предыдущей работе [4], где были найдены равновесные положения тела P_4 и исследована их устойчивость при некоторых значениях параметров модели. Целью данной работы является исследование устойчивости равновесных решений при таких значениях параметров, при которых устойчива сама конфигурация в форме дельтоида.

Используя относительные координаты и переходя во вращающуюся вокруг оси Oz систему координат, в которой тело P_0 покоится в начале координат, запишем дифференциальные уравнения движения системы n тел в виде [2,3]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_j}{dt^2} - 2 \frac{dy_j}{dt} + \frac{G(m_0 + m_j)}{\omega^2} \frac{x_j}{r_i^3} = x_j - \frac{G}{\omega^2} \sum_{k=1(k \neq j)}^n m_k \left(\frac{x_j - x_k}{r_{jk}^3} + \frac{x_k}{r_k^3} \right), \\ \frac{d^2 y_j}{dt^2} + 2 \frac{dx_j}{dt} + \frac{G(m_0 + m_j)}{\omega^2} \frac{y_j}{r_i^3} = y_j - \frac{G}{\omega^2} \sum_{k=1(k \neq j)}^n m_k \left(\frac{y_j - y_k}{r_{jk}^3} + \frac{y_k}{r_k^3} \right), \end{cases} \quad (1)$$

$$r_j^2 = x_j^2 + y_j^2, \quad r_{jk}^2 = (x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2,$$

где G - гравитационная постоянная, m_0, m_j ($j = 1, 2, \dots, n$) – массы тел.

При $n=4$ и $m_4=0$ система (1) распадается на две независимые подсистемы, первая из которых содержит шесть уравнений и описывает движение тел P_1, P_2, P_3 в плоскости Oxy , а вторая определяет движение пятого тела P_4 в гравитационном поле остальных четырех тел. При $m_1 = m_2$ первая подсистема имеет решение вида:

$$x_1 = -x_2 = X, \quad x_3 = 0, \quad y_1 = y_2 = aX, \quad y_3 = bX, \quad (2)$$

где X - масштабный множитель, а безразмерные параметры a, b определяют форму конфигурации. При $b > a$ решение (2) соответствует дельтоидной конфигурации тел P_0, P_1, P_2, P_3 . Вводя безразмерные параметры $\mu_1 = m_1 / m_0 = m_2 / m_0$, $\mu_2 = m_3 / m_0$ и подставляя решение (2) в первую подсистему системы (1), получаем только три независимых уравнения, которые и определяют параметры a, b, ω при заданных значениях μ_1, μ_2 (см. [3, 4]).

В работе [5] был проведен анализ устойчивости дельтоидной конфигурации в плоской ньютоновой задаче четырех тел P_0, P_1, P_2, P_3 в линейном приближении. Показано, что на плоскости параметров $0\mu_1\mu_2$ существует лишь небольшая область, для значений параметров μ_1, μ_2 , из которой дельтоидная конфигурация является устойчивой в линейном приближении.

Уравнения, определяющие движение тела P_4 в плоскости Ox_4y_4 , получаются из (1) при $j=4$ и $m_4=0$. Равновесным положениям тела P_4 соответствуют постоянные значения координат x_4 и y_4 , которые могут быть найдены как решения следующей системы двух уравнений:

$$\begin{cases} x_4 = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{x_4}{(x_4^2 + y_4^2)^{3/2}} + \mu_1 \left(\frac{x_4 - 1}{((x_4 - 1)^2 + (y_4 - a)^2)^{3/2}} + \frac{x_4 + 1}{((x_4 + 1)^2 + (y_4 - a)^2)^{3/2}} \right) + \frac{\mu_2 x_4}{(x_4^2 + (y_4 - b)^2)^{3/2}} \right), \\ y_4 = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{y_4}{(x_4^2 + y_4^2)^{3/2}} + 2\mu_1 \left(\frac{2(y_4 - a)}{((x_4 - 1)^2 + (y_4 - a)^2)^{3/2}} + \frac{a}{(1 + a^2)^{3/2}} \right) + \mu_2 \left(\frac{y_4 - b}{(x_4^2 + (y_4 - b)^2)^{3/2}} + \frac{1}{b^2} \right) \right). \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) существенно нелинейна, и может быть проанализирована только численно. Соответствующий анализ при различных значениях параметров μ_1, μ_2 из области устойчивости дельтоидной конфигурации с применением системы *Mathematica* [2] показал, что в плоскости Ox_4y_4 существует четыре пары симметричных относительно оси Oy_4 равновесных положений тела P_4 , и три равновесных положения на оси Ox_4 . Таким образом, всего имеется 11 равновесных решений системы (3).

Уравнения возмущенного движения тела P_4 в окрестности каждого из равновесных решений в линейном приближении могут быть представлены в виде:

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x, \quad (4)$$

где вектор x имеет компоненты $x = \left(x_4, y_4, \frac{dx_4}{dt}, \frac{dy_4}{dt} \right)$, A - квадратная матрица четвертого порядка. Численный анализ системы (4) с применением системы *Mathematica* [2] показал, что устойчивыми в линейном приближении являются только два из одиннадцати равновесных решений системы (3). При этом устойчивость наблюдается лишь при значениях параметров μ_1, μ_2 из небольшой области на плоскости $O\mu_1\mu_2$, которая является подобластью области линейной устойчивости самой дельтоидной конфигурации четырех тел P_0, P_1, P_2, P_3 . Остальные девять равновесных решений неустойчивы при любых значениях параметров μ_1, μ_2 .

Литература

1. Гребеников, Е.А. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел / Е.А. Гребеников, Д. Козак-Сковородкина, М. Якубяк. - М.: Изд-во РУДН, 2002. - 209 с.

2. Wolfram, S. The Mathematica book / S. Wolfram. - Wolfram Media/Cambridge Univ. Press, 1999. - 1470 p.
3. Прокопеня, А.Н. О симметричных гомографических решениях ньютоновой задачи четырех тел / А.Н. Прокопеня // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры: материалы междунар. конф. DE&CAS'2005, Брест, 5-8 окт. 2005г.: в 2 ч. / БГПУ; редкол.: И.В. Гайшун [и др.]. - Минск, 2005. - Ч. 1. - С. 321-327.
4. Fetisova, S. On the Newtonian deltoid problem/ S. Fetisova, E.A. Grebenikov// Computer Algebra Systems in Teaching and Research: proc. of the 4th International Workshop CASTR'2007, Siedlce, Poland, Jan. 31 - Feb. 3, 2007/ University of Podlasie; Eds.: L. Gadomski [and others].- Siedlce, 2007.- P.112-116.
5. Фетисова, С.А. Об устойчивости дельтоидной конфигурации четырех тел / С.А. Фетисова // Инновационные технологии управления в экономике'2007: материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 24-25 апр. 2007 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина; под общ. ред. канд. физ.-мат. наук С.А. Тузика; редкол.: В.Я. Асанович [и др.]. – Брест, 2007. – С.152.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ СЕТОЧНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

А.П. Худяков, В.М. Мадорский

Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина, г. Брест

При решении краевых задач разностными методами получается достаточно точный каркас решения, так как мы можем использовать большое число точек аппроксимации производных по методу МНК. Второй важной проблемой на пути решения задачи является процедура восстановления сеточного решения. Хорошо известным методом восстановления периодического решения является аппроксимация отрезком ряда Фурье. Рассмотрим еще один алгоритм восстановления сеточного решения. Назовем его методом наименьших квадратов на базе периодических функций. В качестве тестовой рассмотрим одну из основных задач теории нелинейных колебаний – задачу Дурффинга.

$$y''(x) + 0.2y'(x) + y(x) + y^3(x) = 50\cos(x).$$

Пусть искомую $(b-a)$ -периодическую функцию $y(x)$ требуется аппроксимировать на отрезке $[a;b]$ по системе точек $\{x_i, f(x_i)\}$, $i = \overline{0, n}$. Приближенную функцию будем искать в следующем виде:

$$P_m(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^m \left(A_k \cos\left(2\pi k \frac{x-a}{b-a}\right) + B_k \sin\left(2\pi k \frac{x-a}{b-a}\right) \right), \quad x \in [a, b]. \quad (1)$$

Потребуем, чтобы функция (1) максимально близко в некоторой норме функционального пространства проходила через заданную систему точек, то-есть потребуем выполнения следующего условия:

$$I = I(A_0, A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m) = \sum_{i=0}^n (P_m(x_i) - y(x_i))^2 \rightarrow \min. \quad (2)$$

Найдя частные производные $\frac{\partial I}{\partial A_0}, \frac{\partial I}{\partial A_1}, \dots, \frac{\partial I}{\partial A_m}, \frac{\partial I}{\partial B_1}, \dots, \frac{\partial I}{\partial B_m}$ и приравняв их к нулю, стандартным образом из системы (3) находим нужные коэффициенты.

$$\frac{\partial I}{\partial A_l} = 2 \sum_{j=0}^n \left[\left(A_0 + \sum_{i=1}^m \left[A_i \cos \left(2\pi k \frac{x_j - a}{b - a} \right) + B_i \sin \left(2\pi k \frac{x_j - a}{b - a} \right) \right] - y_j \right) \cos \left(2\pi l \frac{x_j - a}{b - a} \right) \right] = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial B_l} = 2 \sum_{j=0}^n \left[\left(A_0 + \sum_{i=1}^m \left[A_i \cos \left(2\pi k \frac{x_j - a}{b - a} \right) + B_i \sin \left(2\pi k \frac{x_j - a}{b - a} \right) \right] - y_j \right) \sin \left(2\pi l \frac{x_j - a}{b - a} \right) \right] = 0, \quad l = \overline{0, m}.$$
(3)

Результаты численного эксперимента сведены в таблицу 1.

Таблица 1 (Точность при восстановлении периодической задачи Дуффинга)

Вид Аппр-ии	Число точек разбиения отрезка				
	256	300	384	456	512
Отрезок тригонометрического ряда Фурье					
	3.5138E-11	2.0712E-12	8.7048E-13	2.2824E-12	2.2187E-12
Метод наименьших квадратов					
	3.5145E-11	2.0023E-12	2.0246E-14	3.5711E-15	3.1374E-15

Анализ таблицы 1 позволяет утверждать, что в случае аппроксимации приближенного решения периодической задачи Дуффинга отрезком тригонометрического ряда Фурье точность приближения с увеличением числа точек разбиения практически не возрастает, оставаясь на уровне $1e-12 - 2e-12$.

В случае метода наименьших квадратов с ростом числа точек разбиения точность по норме невязки растет и доходит до $3.57e-15$ при 456 точках разбиения. Дальнейшее увеличение числа точек разбиения практически не улучшает точность в связи с накоплением погрешностей округления. Из таблицы 1 видно, что использование метода наименьших квадратов является более приемлемым.

За рамками данной статьи остается вопрос о порядке тригонометрического полинома и полинома, построенного по методу наименьших квадратов.

Обычно порядок тригонометрического полинома берется вдвое низшим, чем число точек аппроксимации. В случае метода наименьших квадратов, эта зависимость не такая простая.

Вычислительная практика показывает, что порядок аппроксимационного полинома в случае метода наименьших квадратов примерно втрое меньше числа точек аппроксимации и наилучший порядок обычно находят опытным путем.

В рассматриваемом случае для периодической задачи Дуффинга при применении метода наименьших квадратов получено, что наилучшая степень приближающего полинома равна 125.

Далее сеточным методом решалась неперіодическая задача Дуффинга для получения каркаса приближенного решения. Получающаяся при этом система нелинейных численных уравнений решалась одним из нелокальных квазиньютоновских методов [3].

Результат восстановления сеточного решения неперіодической задачи описывается таблицей 2.

Таблица 2 (Точность при восстановлении неперіодической задачи)

Вид Аппр-ии	Число точек разбиения отрезка				
	256	300	384	456	512
Отрезок ряда Фурье по полиномам Чебышёва I рода					
	1.28285E-7	1.82592E-8	1.15643E-7	1.46563E-7	1.08978E-7
Сплайн 3-ей степени					
	1.3251518	1.2245737	1.0828981	0.9939964	0.9382021
Неперіодический сплайн 5-й степени					
	0.0001570	8.22059E-5	3.02152E-5	1.51024E-5	9.47321E-6

В случае непериодической задачи наилучшим алгоритмом аппроксимации является отрезок ряда Фурье по полиномам Чебышева I рода, однако в этом случае сетка должна состоять из корней полинома Чебышева, что не всегда удобно. К тому же итерационные процессы на неравномерной сетке работают хуже и достигают точности на 2-3 порядка ниже, чем при решении задачи на равномерной сетке.

Данная ситуация натолкнула на мысль построения периодического продолжения каркаса решения на расширенном отрезке, например, $[a;b+l]$. Сделать это можно следующим способом.

На начальном этапе решаем непериодическую задачу на равномерной сетке. Затем требуем, чтобы решение $y(x)$ было периодическим на отрезке $[a;b+l]$. Используя точки каркаса решения, близкие к концам отрезка $[a;b]$, с помощью метода неопределенных коэффициентов можно численно найти приближенные значения производных любого порядка в точках $x=a$ и $x=b$. Продолжение решения на отрезке $[b;b+l]$ ищем в виде полинома

$P_m(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$. Неизвестные коэффициенты a_i находятся из условий:

$$\begin{aligned} P_m(b) &= \tilde{y}(b), \quad P_m(b+l) = \tilde{y}(a), \\ P_m^{(k)}(b) &= \tilde{y}^{(k)}(b), \quad P_m^{(k)}(b+l) = \tilde{y}^{(k)}(a), \quad k = 1, \frac{m-1}{2}, \quad m \in 2N, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\tilde{y}^{(k)}(x)$ - производные, вычисленные по МНК.

Соотношение (4) представляет собой линейную систему размерности $m+1$, которую можно решить, например, методом Гаусса.

Далее расширяем равномерную сетку на отрезок $[a;b+l]$ и находим значения функции в новых узлах, используя полином $P_m(x)$.

В результате этих действий получим новый каркас решения, заданный на равномерной сетке на отрезке $[a;b+l]$, удовлетворяющий условию периодичности на данном отрезке. Данное решение можно восстановить тригонометрическим рядом Фурье или методом наименьших квадратов.

В таблице 3 приведён результат реализации данного подхода, где в ячейках таблицы указана точность восстановления.

Наилучшие результаты получились при следующих параметрах:

- степень полинома $M = 16$,

- расширенный отрезок $\left[0; 2\pi \left(1 + \frac{150}{N}\right)\right]$,

где N – количество точек разбиения отрезка $[0, 2\pi]$.

Таблица 3 (Точность при построении периодического продолжения)

Число точек разбиения отрезка				
256	300	384	456	512
9.1508676E-8	1.7728201E-8	4.1369668E-9	1.1210818E-9	1.4308642E-8

Преимущество предложенного подхода очевидно: во-первых, степень приближающего полинома достаточно низкая, во-вторых, из таблицы видно, что восстановленное решение, построенное изложенным выше способом, точнее, чем при использовании полиномов Чебышева без периодического продолжения.

Подводя итоги вышесказанному, можно сделать вывод о том, что при решении задачи Дуффинга, как одной из важных задач теории нелинейных колебаний, если речь идет о периодическом случае, целесообразнее в качестве аппроксимации полученного при-

ближенного решения разностным методом, использовать метод наименьших квадратов. В случае непериодической задачи Дуффинга при решении ее разностным методом, разумнее наряду с аппроксимацией полиномами Чебышева I рода использовать периодическое продолжение с дальнейшим восстановлением сеточного решения рядами Фурье.

При решении задачи Дуффинга одним из проекционных методов приближенное решение получается в аналитическом виде, что позволяет избежать процедуры аппроксимации, на этапе которой теряется 3 – 4 порядка точности по норме невязки. Дальнейшие наши исследования будут проходить в этой области. Наибольшие трудности, как нам представляется, ожидают нас при определении системы базисных функций, и процедуры уточнения полученных последовательностей приближенных решений.

Литература

1. Березин, И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. М.:Наука, 1966.-Т.1.-632 с.
2. Натансон, И.П. Конструктивная теория функций / И.П. Натансон. М.: 1949.-688 с.
3. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские методы решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. - Брест. 2005. – 180 с.

О НОРМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, РЕШЕНИЯ КОТОРЫХ ОБЛАДАЮТ БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Шеычкина Е. Н.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{dz} = \frac{\sum_{\tau_2, \tau_3=0}^{\tau_2+\tau_3=p^{(1)}-p_{11}} P_{\tau_2, \tau_3}^{(1)} x_1^{p_{11}} x_2^{\tau_2} x_3^{\tau_3}}{\sum_{\tau_2, \tau_3=0}^{\tau_2+\tau_3=q^{(1)}-q_{11}} Q_{\tau_2, \tau_3}^{(1)} x_1^{q_{11}} x_2^{\tau_2} x_3^{\tau_3}}, \quad \frac{dx_j}{dz} = \frac{\sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3=0}^{p_{j1}, p_{j2}, p_{j3}} P_{\tau_1, \tau_2, \tau_3}^{(j)} x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} x_3^{\tau_3}}{\sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3=0}^{q_{j1}, q_{j2}, q_{j3}} Q_{\tau_1, \tau_2, \tau_3}^{(j)} x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} x_3^{\tau_3}} \quad (1)$$

($j=2,3$), $x_1(z)$, $x_2(z)$, $x_3(z)$ – искомые функции, z – независимая комплекснозначная переменная; p_{ik}, q_{ik} ($i, k=1,2,3$) – целые неотрицательные числа, причем $p_{i1}+p_{i2}+p_{i3} \equiv p^{(i)}$, $q_{i1}+q_{i2}+q_{i3} \equiv q^{(i)}$.

Для системы (1) ищутся решения $x_i=x_i(z)$ ($i=1,2,3$), обладающие бесконечными предельными свойствами

$$x_i \rightarrow \infty \quad (i=1,2,3) \quad \text{при} \quad z \rightarrow z_0 \quad (2)$$

с помощью метода, основанного на использовании теоремы Коши и замены

$$x_1 = \frac{1}{u^\alpha}, \quad x_2 = \frac{V_2}{u^{\mu_2}}, \quad x_3 = \frac{V_3}{u^{\mu_3}}, \quad (3)$$

где α, μ_2, μ_3 натуральные числа, которые получаются как решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sum_{k=2}^n \mu_k (p_{k1} - q_{k1}) + \alpha(p_{11} - q_{11} - 1) = 1, \\ \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^n \mu_k (p_{kj} - q_{kj}) + \mu_j (p_{jj} - q_{jj} - 1) + \alpha(p_{j1} - q_{j1}) = 1 \quad j = (2, \dots, n). \end{cases} \quad (4)$$

Замечание 1. В случае, если появляются рациональные решения системы (4), необходимо взять ближайшее натуральное число, удовлетворяющее системе неравенств (4) вида « \leq ».

Замена (3) сведет систему (1) к системе вида

$$\frac{dz}{du} = -\frac{Q_{q^{(i)}}^{(1)}(1, \bar{\beta})}{P_{p^{(i)}}^{(1)}(1, \bar{\beta})} \cdot u^{w_1 - \gamma_1 - \alpha - 1} \cdot \{1 + \Phi(u, \bar{\varphi})\}, \quad (5)$$

$$u \frac{d\varphi_j}{du} = a_{j2}\varphi_2 + a_{j3}\varphi_3 + F_j(u, \bar{\varphi}) \quad (j = 2, 3), \quad (6)$$

где F_j – голоморфные функции от u , $\bar{\varphi}$ ($\bar{\varphi} = (\varphi_2, \varphi_3)$) в окрестности точки $(0, 0, 0)$; $\Phi(u, \bar{\varphi})$ – трехкратный степенной ряд, сходящийся в окрестности точки $(0, 0, 0)$. Система (6) является системой Брио и Буке с искомыми функциями $\varphi_j = \varphi_j(u)$ ($j=2, 3$). Используя результаты интегрирования систем Брио и Буке [3], а также теорему о неявной функции, получим условия гарантирующие существование решений системы (1), которые обладают предельными свойствами (2).

Замечание 2. Если μ_j четное число, то следует рассмотреть максимальную степень соответствующего уравнения $x_j = x_j(z)$, т. е. числа $p^{(i)}$, $q^{(i)}$. В случае если наибольшее из

чисел $p^{(i)}$, $q^{(i)}$ нечетное, то необходимо вводить соответствующую замену $x_j = \frac{\varepsilon V_j}{u^{\mu_j}}$, где $|\varepsilon| = 1$ и рассматривать две системы вида (6). В противном случае, если $p^{(i)}$ или $q^{(i)}$ четное – берется замена (3).

Замечание 3. Если μ_j четное число, то при нахождении функции $u = u(z)$ необходимо выяснить характер ее стремления к нулю. Например, если z стремится к нулю слева, и $u(z) < 0$, то это следует учитывать при переходе к исходным функциям $x_i = x_i(z)$ ($i=1, 2, 3$).

Пример.

Рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dz} = \frac{x_1^2}{x_2^2}, \quad \frac{dx_2}{dz} = x_2^2 - x_2, \quad \frac{dx_3}{dz} = \frac{x_2^3}{x_2 x_1}. \quad (7)$$

Ее решениями, удовлетворяющими условиям (2), являются следующие функции

$$x_1(z) = -\frac{1}{-4e^z + e^{2z} + 2z + 3}, \quad x_2(z) = \frac{1}{1 - e^z}, \quad x_3(z) = \pm \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-30e^z + 15e^{2z} - 2e^{3z} + 18z - 12e^z z + 6z^2 + 17}}.$$

Графики функций $x_1(z)$ и $x_2(z)$ приведены ниже (рис. 1, 2)

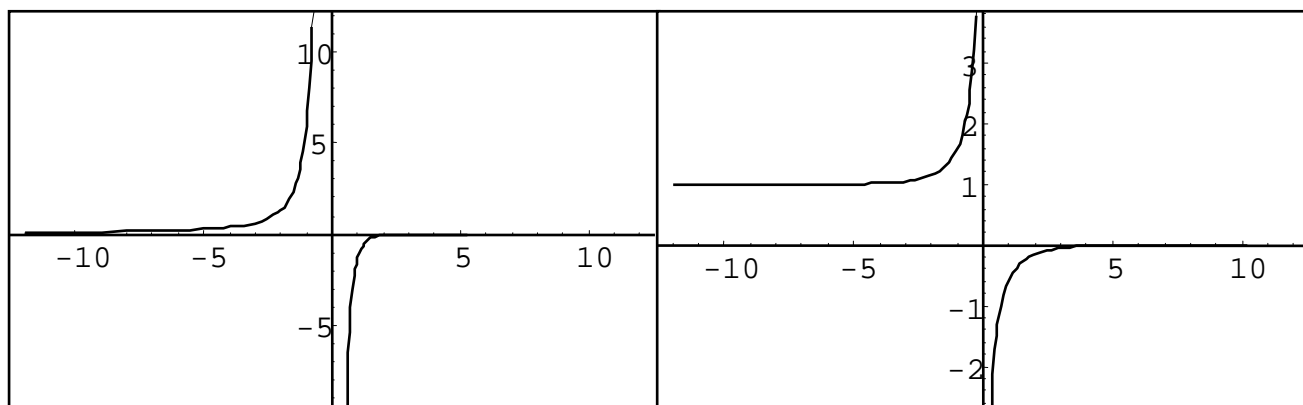


Рис. 1

Рис. 2

Рассмотрим функцию $x_3(z)$ со знаком «+». График $Re[x_3(z)]$ приведен на рис. 3, а график $Im[x_3(z)]$ на рис. 4. При этом имеет место условие $\lim_{z \rightarrow 0} x_3(z) = -i\infty$.

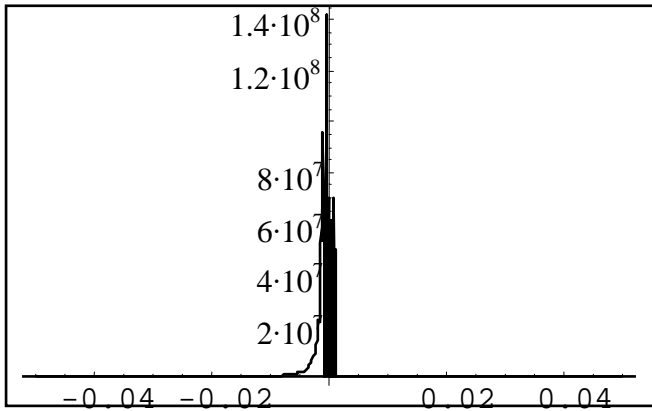


Рис. 3

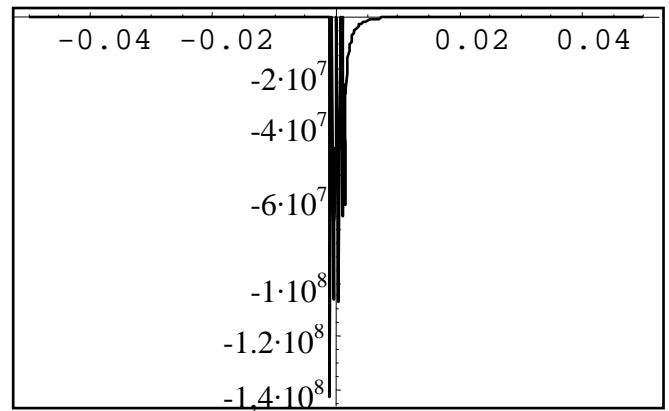


Рис. 4

Применим рассматриваемый метод к решению системы (7). Введем следующую замену $x_1 = \frac{1}{u^3}$, $x_2 = \frac{V_2}{u}$, $x_3 = \frac{V_3}{u^2}$, которая сведет эту систему к виду

$$\frac{dt}{du} = -3V_2^2, \quad u \frac{dV_2}{du} = V_2 - 3V_2^2(V_2^2 - V_2 u), \quad u \frac{dV_3}{du} = 2V_3 - 3V_2 \cdot V_3^3.$$

В третьем уравнении системы (7) $\rho^{(3)}=3$ и $\mu_3=2$. Следовательно необходимо рассмотреть замену $x_3 = \frac{\varepsilon \cdot V_3}{u^2}$, в которой характеристические корни имеют вид

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -4. \\ -1, & \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 8. \end{cases}$$

1. $\varepsilon = 1$, тогда система имеет решения, которые можно определить в системе компьютерной алгебры *Mathematica* как Root-объект [4]. Графики функций $x_1(z)$ и $x_2(z)$, являющиеся решениями системы (7) полностью совпадают с приведенными выше, а графики функции $x_3(z)$ имеют вид: на рис. 5 – график $Re[x_3(z)]$, а на рис. 6 – $Im[x_3(z)]$.

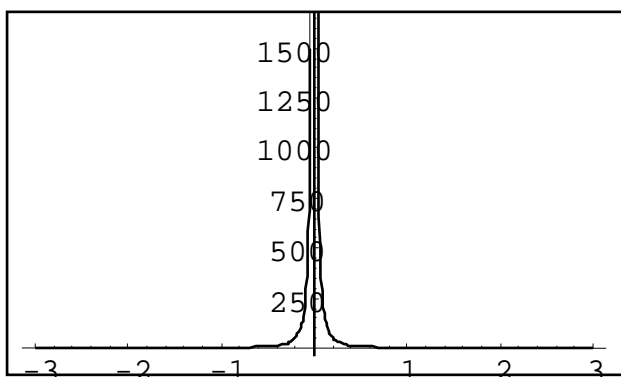


Рис. 5

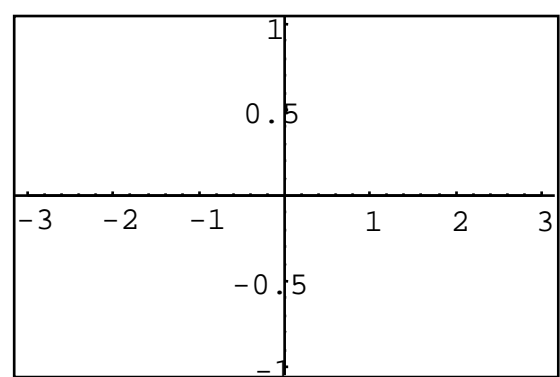


Рис. 6

2. $\varepsilon = -1$, тогда решения $x_1(z)$ и $x_2(z)$ системы (7) будут совпадать с решениями, найденными для $\varepsilon = 1$. График функции $x_3(z)$ имеет следующий вид: рис. 7 функция $Re[x_3(z)]$, рис. 8 – $Im[x_3(z)]$.

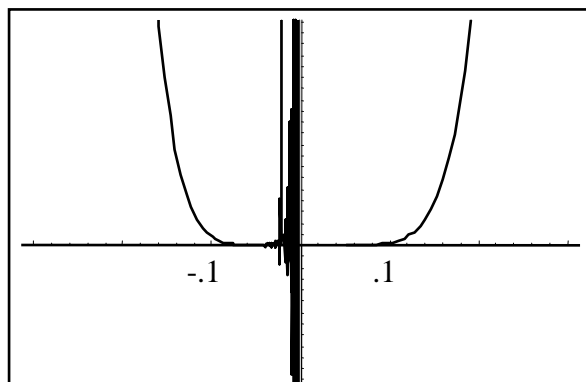


Рис. 7

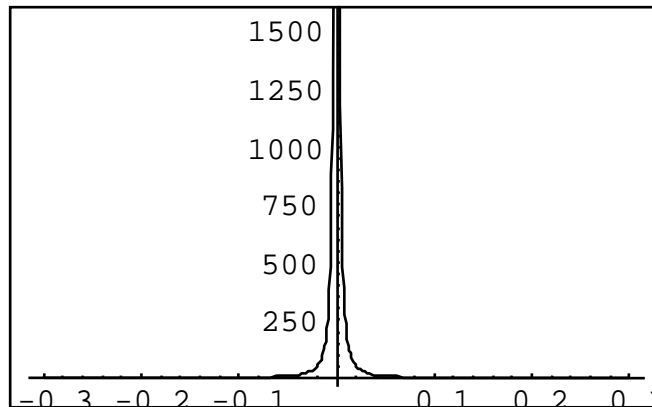


Рис. 8

Литература

1. Чичурин А. В. О решениях систем с заданными предельными свойствами у частных классов нормальных дифференциальных систем с рациональными правыми частями // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. – 1992. – №2 – С. 62-66.
2. Horn J. Über die Reienentwicklung der Integrale lines Systems von Differentiagleichungen in der Umgeburg gewisser singularer stellen//J.fur M., 1896, 116, p. 265 – 306, 1897, 117, p. 104 – 128.
3. Прокопеня А.Н., Чичурин А.В. Применение системы *Mathematica* к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. - Мн., БГУ, 1999. С 265.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В БЕСКОНЕЧНО СВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Юхимук М.М.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

В данной работе рассматривается некоторый класс мероморфных функций с особым расположением полюсов третьего порядка. Доказывается ограниченность этих функций вне некоторых окрестностей своих полюсов.

Теорема: Пусть $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ – монотонно неубывающая по модулю последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих условию $\inf_{\substack{k, j \in \mathbb{N} \\ k \neq j}} \{|\alpha_j - \alpha_k|\} > 0$. Тогда $\forall \delta > 0$ функция

$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(z - \alpha_j)^3}$ ограничена вне δ -окрестностей точек α_j ($j \in \mathbb{N}$).

Доказательство

Будем называть последовательность комплексных чисел $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$

d -последовательностью, если она удовлетворяет условиям:

$$1) |\beta_2 - \beta_1| \leq |\beta_3 - \beta_1| \leq \dots \leq |\beta_j - \beta_1| \leq \dots; \quad 2) \inf_{\substack{k, j \in \mathbb{N} \\ k \neq j}} \{|\beta_j - \beta_k|\} = d > 0.$$

При этом условимся говорить, что d -последовательность $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ мажорирует d -последовательность $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$, если $|\alpha_2 - \alpha_1| \geq |\beta_2 - \beta_1|, |\alpha_3 - \alpha_1| \geq |\beta_3 - \beta_1|, \dots, |\alpha_j - \alpha_1| \geq |\beta_j - \beta_1|, \dots$

Построим d -последовательность $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$, заведомо мажорируемую произвольной d -последовательностью $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$. Для этого, очевидно, нужно максимально “плотно” заполнить

комплексную плоскость окружностями радиуса $\frac{d}{2}$, касающимися внешним образом (и тогда в качестве β_j возьмём центры этих окружностей). Все возможные разбиения плоскости одинаковыми правильными многоугольниками исчерпываются тремя случаями – разбиением правильными треугольниками, квадратами и правильными шестиугольниками. Если вписать в каждый из этих многоугольников окружность, то окажется, что отношение площади круга к площади описанного около него многоугольника будет наибольшим именно для шестиугольника. Поэтому внутри окружности достаточно большого радиуса наибольшее число окружностей радиуса $\frac{d}{2}$ будет как раз при “шестиугольном” размещении. Строим

элементы последовательности $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\beta_1 = 0; \quad \beta_2 = d; \quad \beta_3 = \frac{d}{2} + \frac{d\sqrt{3}}{2}i; \quad \beta_4 = -\frac{d}{2} + \frac{d\sqrt{3}}{2}i; \quad \beta_5 = -d; \quad \beta_6 = -\frac{d}{2} - \frac{d\sqrt{3}}{2}i;$$

$$\beta_7 = \frac{d}{2} - \frac{d\sqrt{3}}{2}i; \quad \beta_8 = \frac{3d}{2} - \frac{d\sqrt{3}}{2}i; \quad \beta_9 = 2d; \quad \text{и т. д.}$$

Выберем произвольную точку $z_0 \in \square$, удовлетворяющую условию

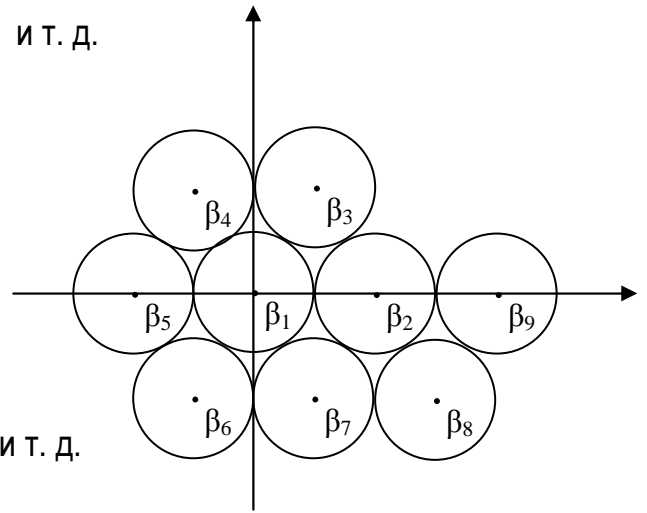
$$\min_{j \in \square} \{ |z_0 - \alpha_j| \} \geq \delta, \text{ и обозначим через } \alpha_1^*$$

ближайший к z_0 член

последовательности $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$. Через α_2^*

обозначим ближайший к z_0 член

последовательности $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$, отличный от α_1^* , и т. д.



Пусть N – наименьший из номеров членов

построенной последовательности $(\alpha_j^*)_{j=1}^{\infty}$, при котором $|\alpha_j^* - z_0| \geq d$ (из геометрических

соображений следует, что $1 \leq N \leq 6$). Тогда последовательность $z_0, \alpha_N^*, \alpha_{N+1}^*, \dots, \alpha_{N+j}^*, \dots$

является d -последовательностью и, следовательно, мажорирует последовательность

$$(\beta_j)_{j=1}^{\infty}, \quad \text{т. е.} \quad |\alpha_N^* - z_0| \geq |\beta_2 - \beta_1| = |\beta_2|, \quad |\alpha_{N+1}^* - z_0| \geq |\beta_3 - \beta_1| = |\beta_3|, \quad \dots,$$

$$|\alpha_{N+j}^* - z_0| \geq |\beta_{j+2} - \beta_1| = |\beta_{j+2}|, \quad \dots$$

Учитывая, что $\inf_{\substack{k, j \in \square \\ k \neq j}} \{ |\alpha_j^* - \alpha_k^*| \} = d > 0$ и полагая $0 < \delta \leq \frac{d}{2}$, при $N > 1$ получим:

$$|\alpha_1^* - z_0| \geq \delta, \quad |\alpha_2^* - z_0| \geq \frac{d}{2}, \quad \dots, \quad |\alpha_{N-1}^* - z_0| \geq \frac{d}{2}. \text{ Тогда:}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|z_0 - \alpha_j^*|^3} &= \frac{1}{|z_0 - \alpha_1^*|^3} + \frac{1}{|z_0 - \alpha_2^*|^3} + \dots + \frac{1}{|z_0 - \alpha_{N-1}^*|^3} + \frac{1}{|z_0 - \alpha_N^*|^3} + \frac{1}{|z_0 - \alpha_{N+1}^*|^3} + \\ &+ \dots + \frac{1}{|z_0 - \alpha_j^*|^3} + \dots \leq \frac{1}{\delta^3} + \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^3} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^3} + \frac{1}{|\beta_2|^3} + \frac{1}{|\beta_3|^3} + \dots + \frac{1}{|\beta_{j+2}|^3} + \dots = \frac{1}{\delta^3} + \frac{8(N-2)}{d^3} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{|\beta_j|^3} \end{aligned}$$

При $N = 1$, т.е. когда числа $z_0, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_j^*, \dots$

уже образуют d -последовательность, в последнем выражении будут отсутствовать слагаемые перед рядом.

Числа β_j ($j \in \square$), очевидно, образуют двояко-периодическую структуру в комплексной плоскости. Перенумеруем члены последовательности $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$, используя двойную индексацию:

$$\beta_{m,n}^* = \beta_2 m + \beta_3 n = dm + \left(\frac{d}{2} + \frac{d\sqrt{3}}{2} i \right) n = d \left(m + e^{\frac{\pi i}{3}} n \right) \quad (m, n \in \square).$$

Числа $\Omega_{m,n} = m + e^{\frac{\pi i}{3}} n$ ($m, n \in \square$) являются полюсами эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{m,n \in \square \\ (m,n) \neq (0,0)}} \left[\frac{1}{(z - \Omega_{m,n})^2} - \frac{1}{\Omega_{m,n}^2} \right]$, и поэтому (см. [1], [2]) ряд

$$\sum_{\substack{m,n \in \square \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{|\Omega_{m,n}|^3} \text{ сходитс}.$$

Учитывая, что $1 \leq N \leq 6$, запишем оценку, общую для всех точек $z \in \square$, удовлетворяющих условию $\min_{j \in \square} \{ |z - \alpha_j| \} \geq \delta$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|z - \alpha_j^*|^3} < \frac{1}{\delta^3} + \frac{32}{d^3} + \frac{1}{d^3} \sum_{\substack{m,n \in \square \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{|\Omega_{m,n}|^3} = \frac{1}{\delta^3} + \frac{C}{d^3}, \text{ где } C = 32 + \sum_{\substack{m,n \in \square \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{|\Omega_{m,n}|^3}.$$

Так как $\{\alpha_j\}_{j \in \square} = \{\alpha_j^*\}_{j \in \square}$, то последняя оценка означает, что при $\min_{j \in \square} \{ |z - \alpha_j| \} \geq \delta$ ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(z - \alpha_j)^3}$ является абсолютно сходящимся, а определяемая этим рядом функ-

ция $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(z - \alpha_j)^3}$ является ограниченной вне δ -окрестностей своих полюсов.

Теорема доказана.

Полученный результат позволяет (см. [3]) строить примеры краевых задач с ограниченными в некоторых бесконечно связных областях решениями.

Литература

1. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций, т. 2. – М.: Наука, 1967.
2. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970.
3. Юхимук М.М. Задача о скачке для многосвязных и бесконечно связных областей // Веснік Брэсцкага універсітэта. 25, №1, 2006. С. 17–24.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ НАХОЖДЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ В АНАЛИТИЧЕСКОМ ВИДЕ ЖЕСТКИХ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Якубук Р. М.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Традиционно процесс численного интегрирования задачи Коши

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(a) = A, \quad x \in [a, b] \quad (1)$$

заключается в дискретизации отрезка $[a, b]$: $a < x_1 < \dots < x_N < b$ и получении набора приближений $\{y_i\}_{i=1}^N$ точного решения $y(x)$ в узлах сетки. Но на практике часто оказывается недостаточно одного такого сеточного решения, особенно, когда требуется визуализация или изучение свойств решения задачи. В этих случаях требуется вычислить и выдать решение в дополнительных точках, которые к тому же могут быть расположены достаточно плотно (плотная выдача). Одна из возможностей состоит во включении этих точек в сетку узлов интегрирования. Однако такой подход может нарушить эффективность управления длиной шага и привести к существенному росту вычислительных затрат. Кроме того, местоположение дополнительных точек может быть неизвестно априори.

Поэтому представляет интерес вывод так называемых непрерывных численных методов («numerical continuous methods») [1], которые были бы способны выдавать значения решения во всех промежуточных точках отрезка $[x_{i-1}, x_i]$: $x = x_{i-1} + th$, $0 < t \leq 1$. Для отдельных классов численных методов (методы Адамса, ФДН-методы, методы Энрайта и др.), основанных на обратной интерполяции, вывод таких формул осуществляется тривиальным образом (введением параметра). Для методов Рунге-Кутты (как явных, так и неявных) процедура существенно усложняется. Здесь непрерывное расширение используемого численного метода строится на всем отрезке $[a, b]$ в виде набора многочленов $\tilde{y}(x)$ на каждом из частичных отрезков, на которые делится отрезок $[a, b]$ данным набором точек. Далее производится интерполирование по узлам, находящимся на каждом из частичных отрезков полиномом невысокой степени.

Для построения такого многочлена используются либо условия порядка, либо классическая теория интерполяции (полином Эрмита), либо комбинация этих приемов. При этом контроль величины погрешности осуществляется по малости невязки $\delta(x) = \tilde{y}'(x) - f(x, \tilde{y}(x))$.

Особенностью перечисленных способов построения формул, осуществляющих плотную выдачу, является их зависимость от метода получения сеточного решения задачи (1).

Опишем метод построения приближенных решений жестких задач Коши для ОДУ в аналитическом виде, не зависящий от численного метода интегрирования задачи (1) и выполняемый в один этап.

Для решения жесткой начальной дифференциальной задачи на отрезке $[a, b]$, $a < b$ зададим максимальный и минимальный шаг, h_{\max} и h_{\min} , «множитель безопасности» $\gamma \in]0, 1[$, абсолютную и относительную погрешности решения, $Atol$ и $Rtol$ (порядка 10^{-10}).

Начальная величина шага задается как $h_0 = \sqrt{h_{\min} h_{\max}}$, либо как $h_0 = C h_{\min}$, $C \gg 1$.

Зададим $x_0 = a$.

Шаг 1. Зададим на отрезке $[x_i, x_i + h_i]$ некоторую сетку (например, Чебышевскую). Численно проинтегрируем задачу разностным методом на этом отрезке.

Шаг 2. Найдем аналитический вид приближенного решения, восстановленного по узлам сетки.

Шаг 3. Найдем оценки погрешностей компонент приближенного решения $\delta y = y_i + \int_{x_i}^{x_i+h_i} f(x, \tilde{y}(x))dx - y_{i+1}$, где $\tilde{y}(x)$ — аналитический вид приближенного решения на отрезке $[x_i, x_i + h_i]$.

Шаг 4. Вычислим оценку $err = \max_j \frac{|\delta y_j|}{(|y_j| + |\Delta y_j|)Rtol + Atol}$.

Шаг 5. Если $err < 1$, то принимаем приближенное решение на отрезке $[x_i, x_i + h_i]$, задаем новое значение $x_i: x_{i+1} = x_i + h_i$.

Шаг 6. Задаем новую величину шага: $\min(h_{\max}, \max(h_{\min}, \mathcal{H}_i D(err)))$, где $D(err)$ — убывающая на каждом из отрезков непрерывности положительно определенная функция одной переменной, для которой $err < 1 \Rightarrow D(err) > 1$ и $err > 1 \Rightarrow D(err) < 1$. Например, $D(err) = \exp(-\ln(err)/(1 + \lfloor \ln(err) \rfloor))$, $D(err) > e^{-1}$, $D(err) \leq e$. Можно построить функцию $D(err)$, удовлетворяющую условиям $D(err) > m, D(err) \leq M, m < 1, M > 1$: $D(err) = m + (M - m) \left(\frac{1 - m}{M - m} \right)^{err}$.

Такой способ позволяет эффективно управлять величиной шага.

Шаг 7. Если достигнут конец промежутка интегрирования, то - выход, иначе переход на шаг 1.

Этот метод позволяет контролировать величину как абсолютной, так и относительной погрешности решения. Если на всём отрезке $err < 1$, то на отрезках плавного изменения решения абсолютная ошибка решения не превосходит $K_1 Atol$, а на отрезках быстрого изменения решения относительная погрешность решения не превосходит $K_2 Rtol$, где K_1 и K_2 - некоторые ограниченные величины.

Рассмотрим один из новых способов конструирования неявных методов Рунге – Кутты. Как известно, конструирование неявных методов Рунге-Кутты существенно опирается на упрощающие предположения [1]

$$B(p): \sum_{i=1}^s b_i c_i^{s-1} = \frac{1}{q}, \quad q = 1, \dots, p; \quad (2)$$

$$C(\eta): \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j^{q-1} = \frac{c_i^q}{q}, \quad i = 1, \dots, s, \quad q = 1, \dots, \eta; \quad (3)$$

$$D(\zeta): \sum_{i=1}^s b_i c_j^{q-1} a_{ij} = \frac{b_j}{q} (1 - c_j^q), \quad j = 1, \dots, s, \quad q = 1, \dots, \zeta. \quad (4)$$

Условие $B(p)$ просто означает, что квадратурная формула (b_i, c_i) имеет порядок p . Важность двух других условий видна из следующей фундаментальной теоремы.

Теорема [1]. Если коэффициенты b_i, c_i, a_{ij} метода Рунге-Кутты удовлетворяют условиям $B(p), C(\eta), D(\zeta)$ и при этом $p \leq \eta + \zeta + 1$ и $p \leq 2\eta + 2$, то метод имеет порядок p .

Для реализации наших идей рассмотрим Гауссовы методы. Эти процессы представляют собой коллокационные методы, основанные на квадратурных формулах Гаусса, то-есть c_1, \dots, c_s являются нулями смещённого полинома Лежандра степени s

$$\frac{d^s}{dx^s} (x^s (1 - x)^s). \quad (5)$$

Поскольку s -стадийный гауссов метод имеет порядок $2s$ и является A -устойчивым, то, исходя из этого, s -стадийный метод Гаусса можно определить, пользуясь условиями $B(2s)$ и $C(s)$. Условие $B(2s)$ задаёт нелинейную систему из $2s$ уравнений с $2s$ неизвестными, решение которой единственно с точностью до порядка следования коэффициентов b_i и c_i соответственно. Итерационными методами [2] можно получить решение этой системы. При просчетах с вещественными числами в формате повышенной точности (20 цифр) возможно получение решения системы только небольших порядков ($s \leq 7$). Это можно объяснить возрастанием степени обусловленности матрицы Якоби системы. При этом коэффициенты c_1, \dots, c_s различны. Условие $C(s)$ можно записать в форме матричного уравнения $AC = B$, где A — матрица коэффициентов a_{ij} , C — матрица типа Вандермонда, определяемая коэффициентами c_1, \dots, c_s . Так как коэффициенты c_1, \dots, c_s различны, то A определяется однозначно.

Ранее гауссовы методы выше восьмого порядка мало использовались из-за трудностей, связанных с нахождением параметров методов, что приводит к решению нелинейных систем, либо к нахождению корней смещенного полинома Лежандра выше четвертой степени.

В качестве численного примера была рассмотрена задача Ван-дер-Поля:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ \tilde{f}(y_1, y_2) \end{pmatrix}, \text{ где } \tilde{f}(y_1, y_2) = ((1 - y_1^2)y_2 - y_1)/\varepsilon, \varepsilon > 0. \quad (6)$$

Начальные условия задачи:

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0' \end{pmatrix}, \text{ где } \begin{cases} z_0 = 2, \\ z_0' = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Она была исследована на отрезке $x \in [0; 2]$. Задача интегрировалась методами Гаусса от 4-го до 14-го порядка. Величина минимального шага равна 10^{-19} , максимального — $0,001$, $Atol = Rtol = 10^{-10}$. Системы нелинейных уравнений решались с точностью 10^{-14} .

Ниже приведены вычислительные затраты, требуемые для приближенного решения задачи указанными выше методами в зависимости от порядка метода.

Порядок метода Гаусса	Суммарное количество итераций при решении нелинейных систем
6	335139
8	283646
10	241356
12	214454
14	201526

Размерность системы линейно зависит от порядка метода, так что увеличение порядка точности метода в результате достигается за счет незначительного увеличения количества вычислений.

Таким образом, за счет использования указанных выше подходов можно находить приближенное решение жесткой задачи с разумной точностью и разумными вычислительными затратами.

Литература

1. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. - М.: Мир, 1999. — 685 с.
2. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские методы решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. - Брест, 2005. — 180 с.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И НЕЙРОННЫЕ СЕТИ	3
Безобразов С. В. Методы искусственных иммунных систем для защиты информации: классификация компьютерных вирусов	3
Безобразова С. В. Повышение точности обнаружения аномалий в сигналах электроэнцефалограмм	6
Войцехович Л. Ю. Подход к обеспечению безопасности компьютерных сетей с применением элементов искусственного интеллекта	9
Горошко В. В. Нейросетевая аппроксимации при моделировании и анализе результатов флуоресцентных экспериментов	12
Давыденко А. А. Моделирование системы поддержки принятия решений для биологической очистки стоков в аэротенках на основе многослойных нейронных сетей	15
Davydenko A. Simulation of the decision-making system for biological refinement of sewage in aerotanks by means of multilayer neural networks	17
Kaliukhovich D. Robot's motion control algorithms on a task of line-following	19
Скулович О. З. Проблемы использования нейросетевых моделей для анализа социальных и экологических явлений	22
Теленкевич Р. С. Методы распознавания изоморфизма неориентированных графов	24
Трофимук В. А., Цветков А. А. Нейронные сети: модификация алгоритма сжатия изображений	27
РАЗДЕЛ II. РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ И АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ	29
Воронов А. А. Методы покрытия прямоугольниками объектов топологии микросхем типа шина	29
Kaliukhovich D., Golovko V., Paczynski A. Some approaches to line detection on a task of line-following	36
Курочка К. С. Организация распределённой обработки графической информации средствами пакета R	38
Новиков В. А., Харитонов Д. С. Раскрашивание черно-белого изображения средствами C#	41
Самко А. Р. Распознавание объектов с помощью иерархического классифицирующего дерева решающих правил	43
Якуцевич А. Сравнение двух методов неинвазивного ВСI	45
РАЗДЕЛ III. АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ	48
Баранов В. В. Сравнение аналитического и имитационного моделирования процессов безызлучательного переноса и миграции энергии в молекулярных системах	48
Волков Е. Г. Моделирование фрактальных кластеров с изменением коэффициента длины пробега	51
Дежурко А. М., Верхотуров А. Е. Моделирование работы параллельных алгоритмов для кластерных структур	53
Докукова Н. А., Мартыненко М. Д., Кафтайкина Е. Н. Нелинейные колебания гидроупругих амортизаторов	56
Коротков А. В. Влияние параметров армирования на собственные частоты колебаний многослойных труб из армированных пластиков	59
Курлович А. А., Кожух И. Г. Нелинейные динамические процессы, описываемые уравнением Навье-Стокса	61
Чухутин О. В. Имитационное моделирование биохимических реакций	63
РАЗДЕЛ IV. СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУЧНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ	67
Антонова Ю. Л. Возможности метода нечеткой логики для оценки состояния окружающей среды	67
Анфилец С. В., Свирский В. М. Моделирование регулируемого светофором перекрёстка	68
Анфилец С. В., Шуть М. В. Адаптивное управление автотранспортом на регулируемом перекрёстке	71
Базарэўскі В. Э., Сцепанчук Н. У. Выкарыстанне канечных аўтаматаў пры распрацоўцы праграмных сродкаў	74

Бракович А. И. Обоснование метода определения степени виновности источников загрязнения атмосферы	75
Бранцевич П. Ю., Борисюк В. Ю., Шакер Ш. А. Организация вибрационного контрольно-диагностического комплекса	77
Ванюков С. В., Теут А. А. О новом варианте системы тестирования — что и как	79
Гончарова С. А. Применение системы поддержки принятия решений на основе прецедентов в системах диагностики технического состояния механизмов с вращательным движением	82
Жиляк Н. А. Разработка пакета прикладных программ синтеза систем реального времени на базе UML	85
Иванюк Д. С. Автоматизация на ОАО "Савушкин продукт"	88
Кишкевич А. П., Ревотюк М. П. Рекуррентный алгоритм решения задачи коммивояжера с ветвлением на задачах о назначении	90
Козак А. Ф., Костюк Д. А., Марчик Д. В. Программно-аппаратная система акустического спектрального анализа корродирующих поверхностей	93
Кравцевич Л. И. Пакет прикладных программ для регистрации видеоизображений и тестирования параметров ПЗС-матриц	96
Куган С. Ф. Проблемы использования программных продуктов в строительных компаниях	99
Кузьмицкий Н. Н., Савчук Л. Н. Использование MS.NET-платформы для автоматизации некоторых компонентов образовательного процесса	101
Лежнин А. В. Нейроморфное моделирование зрительной системы человека	103
Лозовский А. В. Состояние электронного бизнеса в Республике Беларусь	104
Люлькович М. С. О подходах к проектированию системы администрирования из комплекса тестирования знаний	106
Науменко Д. Ю. Решение проблемы парковок с помощью системы видеонаблюдения	108
Нестеренков С. Н. Применение языка JAVA для разработки распределенных приложений	111
Печко Е. В. Разработка региональных систем поддержки принятия решений	113
Rybytak P. Numerical simulation of fluid flow and mass transport using Lattice-Boltzmann Method	116
Проскура Е. М., Чичурин А. В. Условия существования стационарных решений ограниченной кольцеобразной задачи шестнадцати тел	118
Ратобыльская Д. В., Сукач Е. И. Компьютерное моделирование прогнозов численности и структуры населения	121
Ревотюк М. П., Шешко Е. В. Выделение предопределенных решений на графах при многократном поиске кратчайших путей	122
Романцевич Е. В. «Сфера» - инструментальная среда автоматизированного создания и модификации компьютерных обучающих программ	125
Сайко Д. В. "Интеллектуальная" система управления складом на основе WMS решений для ОАО «Савушкин продукт»	127
Саникович В. В., Саникович О. И. Использование современных web-технологий в процессе формирования информационных образовательных сред	130
Сидорович С. А., Силаев Н. В. О некоторых подходах к построению подсистем тестирования в комплексе тестирования знаний	132
Тавониус К. А. Использование переменного масштаба пиктограмм для навигации по файловой системе	134
Федосенко В. И. Психолого-педагогические аспекты применения ЭВМ в обучении	137
Филипенко Е. В. Планирование эксперимента при исследовании свойств формовочных смесей	138
РАЗДЕЛ V. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ	141
Андрушкевич И. Е., Шиёнок Ю. В. Уравнения Максвелла и алгебра Клиффорда	141
Белемук О. В. О решениях в классах специальных функций нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка с инвариантами бинарной формы (аналитический и программный аспекты)	144
Болтромеюк В. В. Сравнительный анализ некоторых способов аппроксимации функций	144
Будько Д. А. Об одном методе определения резонансных кривых для дифференциаль-	147

ных систем с периодическими коэффициентами	
Валуева Т. А. Исследование периодических свойств последовательности состояний одного класса автономных автоматов	150
Василькович С. И., Савчук В. Ф. Сходимость в гильбертовом пространстве итерационной процедуры решения некорректных задач с правилом останова по невязке	153
Войнов А. Ф., Мирская Е. И. Исследование скорости сходимости моментов осредненной оценки взаимной спектральной плотности	156
Воловод Ю. А., Павлюкевич А. Н. О нелокальных квазиньютоновских методах решения нелинейных уравнений	159
Гондюк В. Ю., Савчук В. Ф. Априорные оценки погрешности в энергетической норме для итерационного метода решения уравнений I рода	163
Ивашкевич Е. В. Моделирование электрокинетического переноса в неоднородных средах на основе LBE-алгоритмов	165
Кожокарь Ю. В., Крощенко А. А. Решение неперiodической задачи дуффинга разностным методом	169
Коробейникова Е. В. Мультипликативность в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания и с обходом узлов заявками	171
Костевич А. Л., Шилкин А. В. Проверка гипотезы о чистой случайности с использованием предикторов: случай цепи Маркова	172
Кузин В. В., Веремчук А. П. Об ещё одном подходе к решению задачи дуффинга	175
Матысик О. В., Козак И. П. Метод итераций неявного типа решения некорректных задач	178
Матысик О. В., Матусевич А. А. Метод последовательных приближений для решения операторных уравнений	181
Матысик О. В., Наумовец С. Н. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений	181
Наумовец С. Н., Матысик О. В. Сходимость неявной итерационной процедуры в случае неединственного решения операторного уравнения	184
Панасик Д. А., Рыбачук Г. Г. Сравнительный анализ некоторых методов решения СЛАУ	186
Пантелеева Е. В., Савчук В. Ф. О возможности применения правила останова по соседним приближениям для явного метода итераций решения линейных уравнений	190
Рыбачук Г. Г. Сравнительная характеристика некоторых квазиньютоновских процессов решения нелинейных уравнений	193
Савчук М. А. Исследование эффективности асимптотических формул в схеме Бернулли	197
Старовойтов Р. С., Харько Ю. Г., Тимофеев А. Э. О применении метода конечных элементов при решении задачи Дуффинга и его уточнении	200
Стрилец Н. Н. Об эффективной регуляризации в R^n нелокальных квазиньютоновских методов для решения нелинейных задач	203
Фетисова С. А., ребенников Е. А. Об устойчивости равновесных решений ограниченной дельтоидной задачи пяти тел	206
Худяков А. П., Мадорский В. М. О восстановлении сеточного решения краевых задач	209
Швычкина Е. Н. О нормальных дифференциальных системах третьего порядка, решения которых обладают бесконечными предельными свойствами	212
Юхимук М. М. Об ограниченности одного класса мероморфных функций в бесконечно связанных областях	215
Якубук Р. М. Об одном подходе нахождения приближенного решения в аналитическом виде жестких начальных задач	218

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

Материалы V Республиканской научной конференции
молодых ученых и студентов
28 - 30 ноября 2007 года

Ответственный за выпуск: *Рубанов В.С.*
Редактор: *Строкач Т. В.*
Компьютерная вёрстка: *Боровикова Е. А.*
Корректор: *Никитчик Е.В.*

Лицензия № 02330/0133017 от 30.04.2004 г.

Подписано к печати 20.11.2007 г.

Формат 60x84 ¹/₁₆. Бумага «Снегурочка». Гарнитура Arial Narrow.
Усл. печ. л. 13,02. Уч.-изд. л. 14,0. Заказ N 1221. Тираж 100 экз.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».

224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Лицензия № 02330/0148711 от 30.04. 2004.