

13. Краснопрошин В.В. Обучение по прецедентам на основе анализа свойств признаков / В.В. Краснопрошин, В.Г. Родченко // Доклады БГУИР. – 2017. – №6. – С. 35–41.
14. Гипотеза компактности [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Гипотеза_компактности.

15. Краснопрошин, В.В. Кластерные структуры и их применение в интеллектуальном анализе данных / В.В. Краснопрошин, В.Г. Родченко // Информатика. – 2016. – № 2. – С. 71–77.

Материал поступил в редакцию 08.01.2018

KRASNOPROSHIN V.V., RODCHENKO V.G. The analysis of solutions space in problems of learning by precedents

The study examines the issue of building solution space in problems of learning by precedents. It proposes a method of building solution space where classes do not intersect. A search mechanism based on the research of the properties of feature combinations has been well-grounded. It allows to avoid complete search of solution spaces.

УДК 004.942

Краснопрошин В.В., Коновалов О.Л., Чайко В.В.

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПЛОСКИХ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ТРЕЩИН

Введение. Актуальность задачи моделирования «гидравлический разрыв пласта» (ГРП) обусловлена интенсивным освоением сланцевых месторождений. Процесс гидроразрыва определяется сложным взаимодействием между распространяющейся напорной трещиной и присутствующей в массиве сетью природных дислокаций (трещин). Понимание этого взаимодействия путем адекватного численного моделирования имеет решающее значение для разработки оптимальных стратегий ГРП.

Классическими аналитическими моделями гидроразрыва являются: модель Perkins-Kern-Nordgren (PKN) и модель Khristianovic-Geertsma-de Klerk (KGD). С помощью этих моделей исследуется процесс распространения одиночной трещины эллиптической конфигурации в однородной среде. Кроме аналитических моделей в последнее время набирают популярность численные псевдо-3D модели, которые позволяют моделировать распространение одиночной вертикальной трещины в неоднородной среде.

В настоящий момент для моделирования ГРП в трещиноватых коллекторах активно развиваются подходы, базирующиеся на методе дискретных элементов (DEM), который позволяет учитывать при моделировании значительно большее количество характеристик породного массива, в том числе неоднородность и естественную трещиноватость. Существует целый ряд зарубежных коммерческих и исследовательских реализаций численных схем моделирования ГРП на базе DEM, например, такие известные пакеты, как PFC (ITASCA, США) и LDEC (Lawrence Livermore National Laboratory, США). Однако практическому использованию этих пакетов для дизайна ГРП препятствует высокая вычислительная сложность DEM метода. В этой связи актуальной представляется проблема разработки высокоэффективной параллельной численной DEM схемы моделирования ГРП.

В статье предлагается подход к решению проблемы на основе параллельных вычислений с использованием графических процессоров (GPGPU).

Структура и состав численной модели. Разработанная сопряженная дискретно-элементная модель описывает три основных взаимосвязанных физических процесса, происходящих при гидроразрыве:

1. Напряженно-деформированное состояние упругой горной породы, ее разрушение, распространение фронта трещины.
2. Течение вязкой жидкости в скважине и теле трещины.
3. Утечка жидкости в пласт через стенки трещины, фильтрация жидкости в пористой среде горной породы.

За моделирование каждого процесса отвечает соответствующая компонента.

1. Моделирования напряженно-деформированного состояния породы и образования трещин (механическая компонента). Для

моделирования напряженно-деформированного состояния упругой среды горной породы используется LS (lattice spring) подход.

Этот подход впервые применен в [3], где разрабатывается модель VIB (виртуальных внутренних связей) и определяются микро-структурные параметры связей составляющих дискретизированную модель сплошной среды. В [4] разработана улучшенная модель VMIB (виртуальных многомерных внутренних связей), связи разбиваются на составляющие: отдельно рассматриваются нормальные и касательные силы. В работе [5] предложена модель RMIB (реальных многомерных внутренних связей), где связи не представляются виртуальными элементами, а находятся из соприкосновений частиц в произвольной упаковке пространства моделируемой среды. Теория RMIB позволяет построить аналитические правила для вычисления микро-структурных параметров связей для материала, с заданным макро-структурным поведением.

В предлагаемой работе механическая компонента основана на теории RMIB. Ввиду ориентированности решателя на исполнение на GPU, производится генерация частиц в расчетной области, так чтобы они организовывали регулярную сетку (например, как на рисунке 1). Сторона ячейки диаграммы Вороного, построенной для множества частиц, становится трещиной при разрушении соответствующей связи. В экспериментах пользователь может задать случайные сдвиги частиц, ограниченные небольшой локальной окрестностью, но при этом, не меняя структуру сетки.

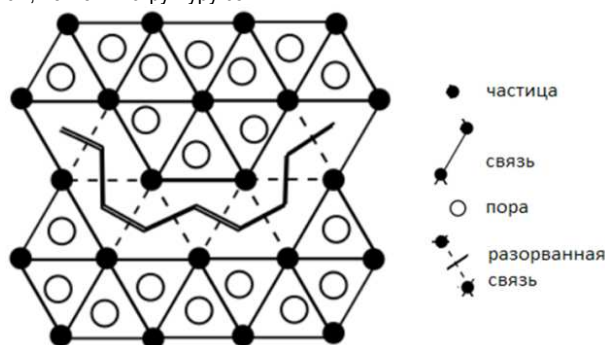


Рисунок 1 – Конфигурация сетки объединенной схемы

В механической модели каждая связь содержит две пружины: нормальную пружину и пружину сдвига с жесткостями K_n и K_s соответственно. Вектор деформации связи u_{ij} раскладывается на нормальную u_{ij}^n и сдвиговую u_{ij}^s составляющие, которые вызывают деформацию соответствующих пружин. По конструктивным законам

Коновалов О.Л., к. т. н., доцент Белорусского государственного университета.

Чайко В.В., аспирант Белорусского государственного университета.

Беларусь, БГУ, 220050, г. Минск, пр. Независимости, 4.

получаются нормальные и сдвиговые силы, действующие на частицы $F_{ij}^n = k_n \cdot u_{ij}^n$, $F_{ij}^s = k_s \cdot u_{ij}^s$. При превышении деформации критического значения $u_{ij} > \delta_0$ связь переходит в разорванное состояние. В этом состоянии нормальная пружина по-прежнему упруго работает на сжатие, но не оказывает сопротивления при растяжении; силы, которые возникают при деформации пружины сдвига, не учитываются. Модель можно расширить, добавив силы трения для разорванных пружин сдвига.

В механической модели выражение микроструктурных параметров вычисляется согласно теории RMIB. Жесткости нормальной и сдвиговой пружины получаем из следующих соотношений [4]: для трехмерного случая

$$k_n = \frac{3E}{\alpha^{3D}(1-2\nu)}; \quad (1.1)$$

$$k_s = \frac{3(1-4\nu)E}{\alpha^{3D}(1+\nu)(1-2\nu)};$$

$$\alpha^{3D} = \frac{\sum l_i^2}{L^3};$$

для двумерного случая

$$k_n = \frac{2E}{\alpha^{2D}(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad (1.2)$$

$$k_s = \frac{2(1-4\nu)E}{\alpha^{2D}(1+\nu)(1-2\nu)};$$

$$\alpha^{2D} = \frac{\sum l_i^2}{L^2};$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, L – линейный размер образца, l – длина связи.

Для решения динамической задачи для заданного набора частиц и связей рассматривается уравнение движения и составляется система обыкновенных ДУ следующего вида

$$Ku + C\dot{u} + M\ddot{u} = F(t), \quad (2)$$

где u – обозначает вектор смещения частиц, K – матрица жесткости, C – матрица массы, M – матрица демпинга; $F(t)$ – вектор внешних сил.

После применения разностной аппроксимации получаем следующий метод решения системы.

$$\dot{u}_i^{(t+\frac{\Delta t}{2})} = \dot{u}_i^{(t-\frac{\Delta t}{2})} + \left\{ \sum F_i^{(t)} - \alpha \left| \sum F_i^{(t)} \right| \text{sgn} \left(\dot{u}_i^{(t-\frac{\Delta t}{2})} \right) \right\} \frac{\Delta t}{m_p}, \quad (3)$$

где α – демпинговая константа, m_p – масса частицы, $\sum F_i^{(t)}$ – сумма всех сил, действующих на частицу (возникающие из-за напряжения в нормальных и сдвиговых пружинах и воздействия внешних сил).

2. Описание моделирования течения жидкости по сети трещин (гидравлическая компонента). Как упоминалось ранее, при разрыве связи механической модели возникает трещина, располагающаяся на советующей стороне ячейки Вороного. В гидравлической модели удобно забыть о RMIB частицах и связях и разделить моделируемую среду на элементы с геометриями ячеек Вороного. Геометрические параметры трещины будем находить из геометрии соответствующих прослоек между смещенными при упругой деформации ячейками Вороного, построенных по сетке на начальной итерации. Из построенных таким образом трещин составляется сеть (как показано на рисунке 2) и при необходимости увеличения точности решателя проводится разбиение трещины на элементы меньшей длины (как показано на том же рисунке).

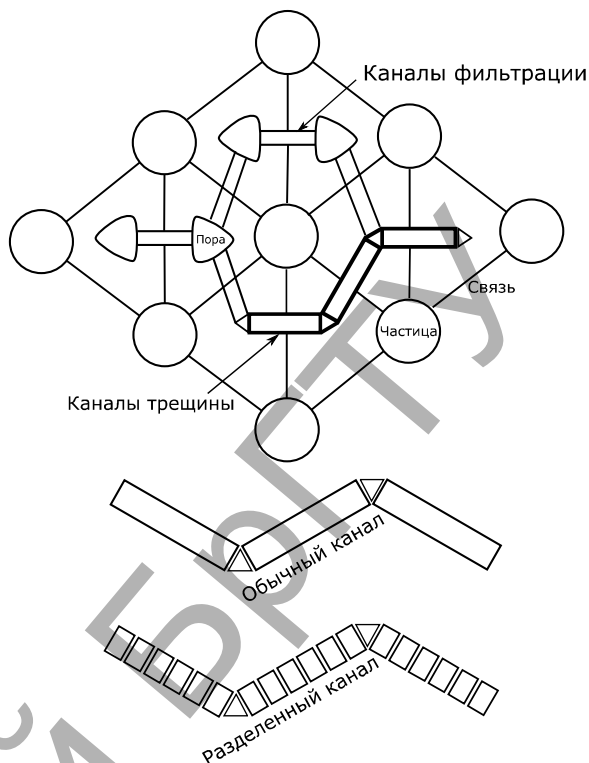


Рисунок 2 – Расположение каналов сети трещин. Разделение каналов

В гидравлической модели для описания движения жидкости по сети трещин на каждой итерации будем независимо рассчитывать ламинарное течение потоков между смежными трещинами. Для объединенных в сеть трещин в схеме рассчитывается объем v_i и давление p_i жидкости в трещине и объем трещины v_{ci} и давление жидкости. Для расчета потока q_{ij} на текущей итерации между смежными трещинами используется формула Пуазейля течения жидкости по каналу с усредненной геометрией соседних трещин

$$q_{ij} = k \cdot a_{ij}^3 \frac{p_i - p_j}{L_{ij}}. \quad (4)$$

Давление в трещине определяется следующей формулой

$$p_i = \begin{cases} K_i \left(1 - \frac{v_{ci}}{v_i} \right) & \text{если } v_i \geq v_{ci}; \\ p_0 & \text{если } v_i < v_{ci}. \end{cases} \quad (5)$$

3. Описание моделирования фильтрации жидкости в породе (фильтрационная компонента). В фильтрационной компоненте для моделирования фильтрации жидкости используется понятие пор и каналов. Поры располагаются в углах ячеек диаграммы Вороного, построенной для частиц RMIB-модели (см. рисунок 2). Поры не должны быть смежными сторонам ячеек, соответствующих трещинам. Поры, находящиеся в соседних углах ячейки Вороного, соединяются фильтрационным каналом (см. рисунок 3).

По связывающим каналам через поры проходит жидкость согласно законам фильтрации в пористой среде. В отличие от трещин, геометрии которых определены сторонами ячеек вороного, поровый канал, как и поры, не представляет конкретный объект, вроде капилляра или микротрещины (как в работе [7]), а описывает состояние пористого материала в непрерывном представлении.

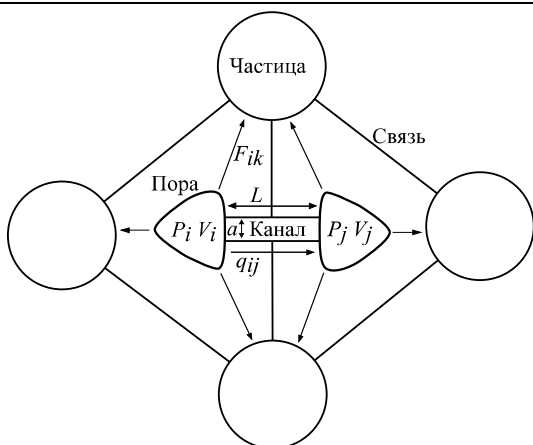


Рисунок 3 – Поры и канал фильтрации

Параметры канала (L – длина и a – ширина) рассчитываются из геометрии сетки с учетом смещений частиц. Поток жидкости q_{ij} между порами с давлениями p_i и p_j , соединенными каналом с заданными параметрами определяется по закону Дарси

$$q_{ij} = a_{ij} \frac{k}{\mu} \cdot \frac{p_i - p_j}{L_{ij}}, \quad (6)$$

где k – коэффициент фильтрации, μ – вязкости жидкости.

С учетом рассчитанных потоков и изменения объемов пор v_i , рассчитываемых по геометрии сетки, поровое давление определяется аналогично давлению в трещине по формуле (5).

Расчет фильтрации между порой и гидравлической трещиной проводится схожим образом. Для этого в месте сочленения трещин i и j устанавливается фиктивная пора с давлением $2 \frac{p_i v_i + p_j v_j}{v_i + v_j}$ и проводится аналогичный расчет фильтрации.

4. *Связи между гидравлической, фильтрационной и механической компонентой.* Гидравлическая и фильтрационная компоненты взаимодействуют друг с другом с помощью фильтрационных каналов, связывающих каналы трещины и поры. С их помощью трещина может отдавать или получать жидкость из пористой среды. Из описания гидравлической и фильтрационной схемы видно, что все геометрические параметры пор и каналов определяются по смещениям частиц, полученным в механической схеме. Влияние гидравлической и фильтрационной схемы на механическую реализуется с помощью установки соответствующих граничных условий. Трещина длиной L_i оказывает давление p_i на соседнюю частицу, тем самым добавляя к сумме сил $\sum F_i^{(t)}$, действующих на частицу, силу $F^{hc} = p_i L_i$ в направлении от центра канала к частице. Поровый канал длиной L_{ij} между порами с давлениями p_i и p_j добавляет силу

$$F^{pc} = \frac{p_i + p_j}{2L_{ij}}$$

Описание общей итерации сопряженной дискретно-элементной модели. Итерация разработанного метода состоит из последовательности внутренних итераций, строящих решение соответствующих подзадач на текущем временном слое (см. рисунок 4).

Полученные результаты каждой подзадачи влияют на решение других подзадач на следующем временном слое:

1. Механическая схема изменяет геометрические характеристики пор и каналов, используемых для расчета гидравлической и фильтрационной итерации.

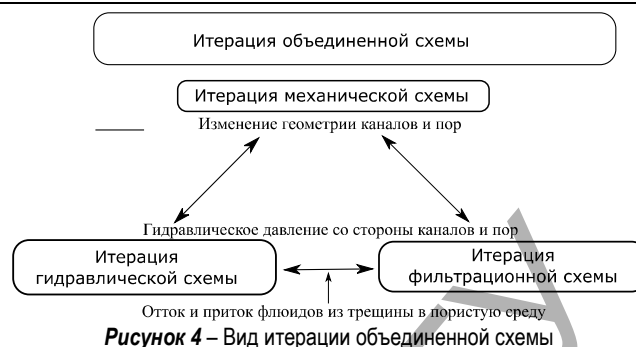


Рисунок 4 – Вид итерации объединенной схемы

2. Давление жидкости на стены трещины, а также поровое давление, полученное в гидравлической и фильтрационной итерации, учитывается при расчете сил механической итерации.

3. Объемы флюидов в трещине изменяются в ходе притока и оттока в пористую среду.

В RMBB модели для устойчивости решения требуется, чтобы упругая волна за один временной шаг проходила расстояние меньшее, чем величина дискретизации сетки. Поэтому, ввиду маленького временного шага, для решения реальных задач требуется большое (в некоторых задачах порядка десятков миллиардов) количество итераций. Однако преимущество предлагаемой методики состоит в том, что численная схема обладает простой структурой и элементы сетки могут быть обработаны независимо внутри одной итерации. Поэтому разработанный подход наиболее эффективно может быть реализован на SIMD системах, в частности с помощью технологии GPGPU.

Верификация модели. Начиная с середины двадцатого века, активно проводились исследования аналитических моделей напорного трещинообразования. Были разработаны аналитические модели плоских трещин PKN, KGD, а также псевдотрехмерные модели P3D, PL3D. Несмотря на значительные допущения, принятые для упрощения вычислений, эти модели нашли широкое практическое применение [8].

Разработанный авторами решатель предназначен для решения плоских задач, геометрия полученной трещины предполагается одинаковой по всей высоте скважины (трещины постоянной высоты). Для определения геометрии такого типа трещин воспользуемся моделью KGD. В ней применяется приближения геометрии трещины эллипсом. Модель KGD позволяет выразить геометрические параметры трещины (ширина основания и полудлина) в виде функции, зависящей от времени, физико-механических свойств пласта и гидравлических параметров жидкости ГРП и режима ее накачки.

В результате численных экспериментов, проведенных решателем на основе сопряженной дискретно-элементной модели, форма трещин оказалась близкой к эллиптической. Сравнение параметров геометрии трещины согласно модели KGD и полученных решателем на модельной задаче показано на рисунках 5 и 6. Как видно, решение DEM, так и KGD делают похожие прогнозы динамики изменения геометрии гидравлической трещины.

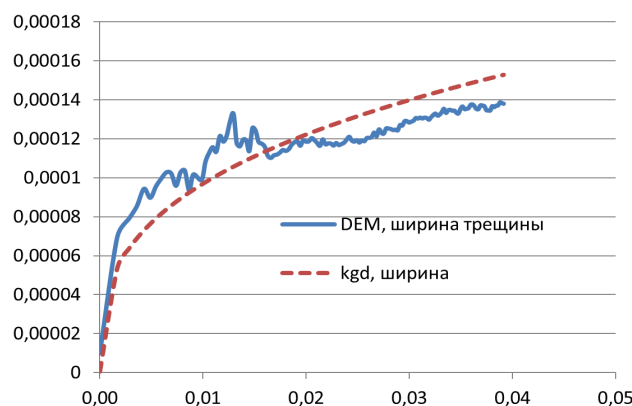


Рисунок 5 – Сравнение ширины основания трещины, полученной численным решением DEM и моделью KGD

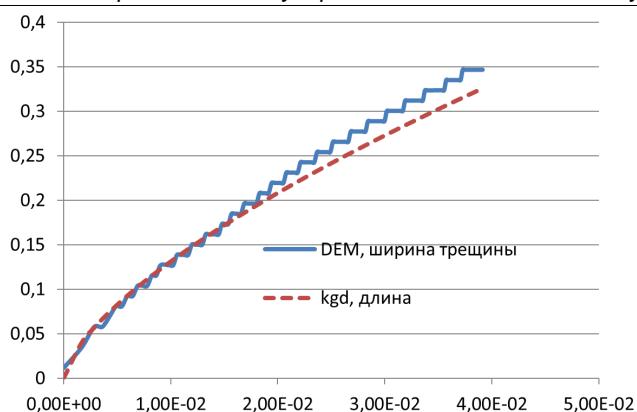


Рисунок 6 – Сравнение полудлины трещины, полученной численным решением DEM и моделью KGD

Заключение. В данной статье рассматривается алгоритм расчета геометрических параметров плоских гидравлических трещин основанный на основе сопряженной дискретно-элементной модели. Разработанная модель включает три компонента для моделирования различных физических процессов, возникающих при ГРП, а также методику их сопряжения. Дискретно-элементная структура модели позволяет естественно включать возможность формирования трещин, осуществления течения жидкости по сети трещин и фильтрации через поры, с учетом напряженно-деформированного состояния пласта. Разработанная модель ориентирована на реализацию на системах массово-параллельной архитектуры, в том числе с использованием технологии GPGPU. Проведено сравнение геометрических параметров трещин, получаемых DEM-решателем и моделью KGD.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Fu, P. An explicitly coupled hydro-geomechanical model for simulating hydraulic fracturing in arbitrary discrete fracture networks / P. Fu, S. Johnson, C. Carrigan // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2012. – Vol. 37 – Is. 14 – P. 2278–2300.
2. Fu, P. Generalized displacement correlation method for estimating stress intensity factors / P. Fu, S. Johnson, R. Settigast, C. Carrigan // Engineering Fracture Mechanics – Vol. 88 – July 2012 – P. 90–107.
3. Gao, H. Numerical simulation of crack growth in an isotropic solid with randomized internal cohesive bonds / H. Gao, P. Klein // Journal of the Mechanics and Physics of Solids – Vol. 46 – Is. 2 – 1998 – P. 187–218.
4. Zhang, Z. A new quasi-continuum constitutive model for crack growth in an isotropic solid / Z. Zhang, X. Ge // European Journal of Mechanics - A/Solids – Vol. 24 – Is. 2 – 2005 – P. 243–252.
5. Zhao, G. Development of Micro-Macro Continuum-Discontinuum Coupled Numerical Method // Thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne – 2010.
6. Wang, S. Fully Coupled Thermal-Hydraulic-Mechanical Reservoir Simulation with Non-Isothermal Multiphase Compositional Modeling / S. Wang, J. Zhang, Z. Yang, C. Yin, Y. Wang, R. Zhang, Y. Wu // Society of Petroleum Engineers – SPE Reservoir Simulation Conference – 2017.
7. Sarmadivaleh, M. Numerical and experimental investigation of the interaction of natural and propagated hydraulic fracture / H. Fatahi, M. Hossain, M. Sarmadivaleh // Journal of Natural Gas Science and Engineering – Vol. 37 – 2017 – P. 409–424.
8. Экономидес, М. Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта: от теории к практике / М. Экономидес, Р. Олни, П. Валько – Москва : Орсга Пресс, 2004.

Материал поступил в редакцию 14.01.2018

KRASNOPROSHIN V.V., KONOVALOV O.L., CHAIKO V.V. Algorithm for calculating the geometric parameters of flat hydraulically induced fractures

This paper investigates the algorithm for calculating the geometry of flat fractures propagating under the pressure of pumping fluid. The conjugate discrete-element model and the corresponding numerical scheme are introduced. The comparison of the geometric parameters of the fractures obtained by numerical modeling and analytical model KGD is made.

УДК 581.3

Ивасьев С.В.

МЕТОД ВЫСОКОВЕРЯТНОСТНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ МНОГОРАЗЯДНЫХ ЧИСЕЛ НА ОСНОВЕ ВЕКТОРНО-МОДУЛЬНОГО УМНОЖЕНИЯ

Введение. Проблема принадлежности заданного натурального числа к классу простых или составных чисел является актуальной не только в математике, но и в компьютерных науках. Отличить простое число от составного, а также разложить последнее на простые множители, является одной из важнейших задач арифметики. Поиск больших простых чисел, например, необходим для обеспечения надежности систем шифрования информации с открытым ключом. Безопасность последних базируется на утверждении, что операция умножения двух больших простых чисел является односторонней функцией.

На сегодняшнее время проверка простоты числа осуществляется на основе вероятностных тестов Ферма, Соловей-Штрассена, Миллера-Рабина, которые отличаются большой вычислительной сложностью.

Обзор известных решений проверки чисел на простоту. Основной идеей теста Ферма проверки на простоту является использование теоремы Ферма, согласно которой, если n – простое, то для произвольного a , $1 \leq a \leq n - 1$ имеет место равенство $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, иначе n не является простым [1].

В тесте на простоту Соловей-Штрассена используется критерий Эйлера: если n – простое, то $a^{\frac{n-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{n}\right) \pmod{n}$ для всех значений a , которые взаимно простые с n . Следует отметить, что в данном подходе нужно проверять, будет ли $\left(\frac{a}{n}\right)$ квадратичным остатком, то есть вычислять символ Якоби [1], что приводит к временной сложности $O(n \cdot \log_2^2 n)$.

Тест Миллера-Рабина наиболее часто используется на практике и называется сильным тестом на простоту. Он базируется на следующем факте. Пусть n – нечетное простое число, причем $n - 1 = 2^s r$, где r – нечетное, s – некоторое натуральное число, a – натуральное число, взаимно простое с n , то есть $\text{НОД}(a, n) = 1$. Тогда имеет место одно из равенств: $a^r \equiv 1 \pmod{n}$, или $a^{2^j r} \equiv -1 \pmod{n}$ для некоторого j , $0 \leq j \leq s - 1$ [2]. Учитывая, что в данном методе

Ивасьев Степан Владимирович, к.т.н., старший преподаватель кафедры кибербезопасности Тернопольского национального экономического университета, E-mail: stepan.ivasiiev@gmail.com
Украина, ТНЭУ, 46000, г. Тернополь, ул. Львовская, 11.