УДК 622.271.01

Ю.П.Ашаев, Г.Н.Андреева

ОБЪЕМНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕСТОРОЖДЕНИЙ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Развитие научных исследований в области открытых горных работ и при проектировании карьеров вызывает необходимость все более широкого применения математических методов и ЭВМ для решения разнообразных задач управления, планирования и проектирования. Фундаментальным положением автоматизации проектирования карьеров при помощи ЭВМ остается создание универсальной математической модели месторождения, отображающей реальный геологический объект в цифровом виде в памяти ЭВМ. В практике математического моделирования месторождений за последнее время прослеживается тенденция создания математических моделей, базирующихся на исходных геологических данных, гарантирующих использование в горных планах новейшей геологической информации и способных удовлетворить, как запросы горного дела, так и геологии [2, 3, 6, 8, 9].

Применение методов численного анализа при моделировании месторождений является, с нашей точки зрения, наиболее эффективным направлением.

Использование уравнения Лапласа для аппроксимации функции распределения геологических, экономических и других параметров ранее неоднократно рассматривалось в литературе [1, 2, 7], а последние расчетные данные, полученные при реализации данных методов на ЭВМ, и их экспертная оценка подтверждают правильность сделанных предположений.

Уравнение Лапласа, используемое для объемной аппроксимации геологического объекта вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \; 0, \qquad (1)$$

где U - функциональная зависимость; x, y, z - пространственные координаты, является линейным уравнением в частных производных эллиптического типа.

Численные методы решения таких уравнений в большинстве случаев - единственный способ получения результатов. При этом значения получают в дискретных точках системы, заменяя уравнения в частных производных их конечно-разностными аналогами.

В [I, 2, 5] уже рассматривалась задача аппроксимации функции вида $h = f(x, y)$ уравнением Лапласа при граничных условиях типа Дерихле, позволяющая осуществлять погоризонтальное моделирование месторождения. Решение данной задачи определялось решением конечно-разностных уравнений с использованием равномерной сетки.

Такой подход к решению задачи моделирования месторождения, несмотря на достоинства, имеет ряд недостатков:

- используется не вся имеющаяся информация, т.е. учитываются только данные, относящиеся к моделируемой поверхности (горизонту);
- возникают ошибки расчета "снесения" данных в узлах сетки;
- ошибка интерполяции зависит от шага сетки, который в общем случае задается субъективно;
- погрешности вычисленных значений функции в узлах сетки определяются не шагом сетки, а плотностью исходных значений в рассчитываемой области.

Сократить эти недостатки или в какой-то мере уменьшить их влияние позволяет применение уравнения Лапласа для объемной аппроксимации (согласно уравнению (I) с граничными условиями типа Дерихле, которые математически выражаются

$$U(x_i, y_i, z_k) = U_e, \qquad (2)$$

где $U(x_i, y_i, z_k)$ - значение функции в фиксированной точке с координатами; U_e - численное значение функции в этой точке.

Для математической модели, построенной по такому принципу, предлагается использовать неравномерную сетку, которая сводится к построению трех взаимно перпендикулярных плоскостей, в точке, соответствующей координатам фиксирования исходных данных. В дальнейшем производится выделение узлов, образуемых при пересечении этих плоскостей, и интерполяции значений функции в этих точках [4].

Преимущества неравномерной объемной сетки по сравнению с равномерной выражаются в следующем:

- использование всей информации;
- исключение ошибки за счет "снесения" данных в реальных точках в узлы сетки, так как шаг сетки подбирается таким, чтобы реальные точки находились в узлах сетки;
- частота сетки находится в прямой зависимости от плотности исходной информации в рассчитываемой области;
- появляется возможность регулирования min и max шагом сетки в зависимости от требуемой точности.

Но наряду с преимуществами при построении алгоритма по данному методу возникает и ряд дополнительных трудностей:

- увеличение объема хранимой информации;
- усложнение алгоритма решения задачи.

Как указывалось выше, для решения уравнения (I) с граничными условиях (2) необходимо аналитическую форму уравнения заменить её конечно-разностным аналогом. Получить конечно-разностное уравнение можно, используя метод разложения функции в ряд Тейлора в заданной точке, и, решая уравнение относительно исходной производной.

Рассмотрим разложение функции в ряд Тейлора:

для прямой разности

$$U(x_i+\Delta x_{i+1}) = U(x_i) + \Delta x_{i+1} U^{(1)}(x_i) + \frac{1}{2}\Delta x_{i+1}^2 U^{(2)}(x_i) + Q_1(\Delta x_{i+1}); \quad (3)$$

для обратной разности

$$U(x_i-\Delta x_i) = U(x_i) - \Delta x_i U^{(1)}(x_i) + \frac{1}{2}\Delta x_i^2 U^{(2)}(x_i) + Q_2(\Delta x_i). \quad (4)$$

Принимая

$Q_1(\Delta x_{i+1}) = 0;\ Q_2(\Delta x_i) = 0$

на основании уравнения (3) и (4) получаем

$$U^{(2)}_{(x_i)} = 2\,\frac{\Delta x_{i+1} U(x_i-\Delta x_i) - U(x_i)\cdot[\Delta x_{i+1}+\Delta x_i] + \Delta x_i\cdot U(x_i+\Delta x_{i+1})}{\Delta x_i\,\Delta x_{i+1}(\Delta x_i+\Delta x_{i+1})}, \quad (5)$$

где Δx_i – шаг сетки между $i-1$ и i точкой по оси X; Δx_{i+1} -шаг сетки между i и $i+1$ точкой по оси X; $U(\ldots)$ – значение функции в соответствующей точке; $U^{(n)}(\ldots)$ – значение частной производной n -го порядка по соответствующей переменной.

Погрешность данного преобразования составляет $Q(\Delta x_i\ \Delta x_{i+1})$. Переходя от уравнения (5) к уравнению (I) для объемного случая и решив его относительно $U(x_i, y_i, z_k)$, для всей совокупности точек получаем систему уравнений

$$U_{i,j,k} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\Delta x_{i,j,k}\,\Delta x_{i+1,j,k}} + \frac{1}{\Delta y_{i,j,k}\,\Delta y_{i,j+1,k}} + \frac{1}{\Delta z_{i,j,k}\,\Delta z_{i,j,k+1}}\right.} \times$$

$$\times \left\{ \frac{U_{i+1,j,k}\,\Delta x_{i,j,k} + U_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i,j,k}\,\Delta x_{i+1,j,k}(\Delta x_{i,j,k} + \Delta x_{i+1,j,k})} + \right.$$

$$+ \frac{U_{i,j+1,k}\,\Delta y_{i,j,k} + U_{i,j-1,k}\,\Delta y_{i,j+1,k}}{\Delta y_{i,j,k}\,\Delta y_{i,j+1,k}(\Delta y_{i,j,k} + \Delta y_{i,j+1,k})} +$$

$$\left. + \frac{U_{i,j,k+1}\,\Delta z_{i,j,k} + U_{i,j,k-1}\,\Delta z_{i,j,k+1}}{\Delta z_{i,j,k}\,\Delta z_{i,j,k+1}(\Delta z_{i,j,k} + \Delta z_{i,j,k+1})} \right\};$$

$$i = \overline{1,I}; \qquad j = \overline{1,J}; \qquad k = \overline{1,K}, \tag{6}$$

где I – предельное значение текущей переменной по координате X J – предельное значение текущей переменной по координате y , K – предельное значение текущей переменной по координате z .

Система уравнений (6) позволяет определять значение функции $U_{ij,k}$ по вычисленным значениям функции в близлежащих точках, т.е. имеем так называемую классическую семиточечную модель.

Нахождение решения системы уравнений (6) в граничных узлах является затруднительным, так как значения функции в ближайших точках могут быть не определены – находиться вне граничного контура. Условно определим значение функции в таких точках

$$U_{i,j,k} = *. \tag{7}$$

Введем поправочные коэффициенты R_x, R_y, R_z , которые позволяют найти значения функций в граничных узлах и, в случае необходимости свести систему уравнений (6) к системе уравнений для плоскости или прямой. С учетом поправочных коэффициентов система уравнений (6) примет вид

$$U_{i,j,k} = \frac{1}{\left(\frac{R_x}{\Delta x_{i,j,k}\,\Delta x_{i+1,j,k}} + \frac{R_y}{\Delta y_{i,j,k}\,\Delta y_{i,j+1,k}} + \frac{R_z}{\Delta z_{i,j,k}\,\Delta z_{i,j,k+1}}\right.} \times$$

$$\times \left\{ R_x \frac{U_{i+1,j,k}\,\Delta x_{i,j,k} + U_{i-1,j,k}\,\Delta x_{i+1,j,k}}{\Delta x_{i,j,k}\,\Delta x_{i+1,j,k}(\Delta x_{i,j,k} + \Delta x_{i+1,j,k})} + \right.$$

$$+ R_y \frac{U_{i,j+1,k}\,\Delta y_{i,j,k} + U_{i,j-1,k}\,\Delta y_{i,j+1,k}}{\Delta y_{i,j,k}\,\Delta y_{i,j+1,k}(\Delta y_{i,j,k} + \Delta y_{i,j+1,k})} +$$

$$R_z\frac{U_{i,j,k+1}\,\Delta z_{i,j,k}+U_{i,j,k-1}\cdot\Delta z_{i,j,k+1}}{\Delta z_{i,j,k}\,\Delta z_{i,j,k+1}(\Delta z_{i,j,k}+\Delta z_{i,j,k+1})}\};$$

$$i=\overline{1,I};\quad j=\overline{1,J},\quad k=\overline{1,K}. \tag{8}$$

Система уравнений (8) является общей для определения значения функции $U_{i,j,k}$ в расчетных точках и путем незначительных преобразований может быть сведена к системе уравнений для:

- равномерной сетки

$$(\Delta x_{i,j,k}=\Delta x_{i,j,k+1}=\Delta y_{i,j,k}=\Delta y_{i,j,k+1}=\Delta z_{i,j,k}=\Delta z_{i,j,k+1});$$
$$i=\overline{1,I};\quad j=\overline{1,J};\quad k=\overline{1,K};$$

- сетки с равномерным шагом по каждой координате

$$(\Delta x_{i,j,k}=\Delta x_{i,j,k+1};\ \Delta y_{i,j,k}=\Delta y_{i,j,k+1};\ \Delta z_{i,j,k}=\Delta z_{i,j,k+1});$$
$$i=\overline{1,I},\quad j=\overline{1,J};\quad k=\overline{1,K};$$

- плоскости (когда один из коэффициентов R_x, R_y, R_z равен 0);
- прямой (когда два коэффициента из совокупности R_x, R_y, R_z равны 0).

Система уравнений (8) с учетом значений функции в точках вне рассматриваемой области (согласно фо]муле (7) для расчета значений функций в граничных узлах имеет ряд дополнительных условий:

$$R_x=\begin{cases}0, & \text{при } (U_{i+1,j,k}=*)\wedge(U_{i-1,j,k}=*);\\ 1, & \text{при } [(U_{i+1,j,k}\neq*)\vee(U_{i-1,j,k}\neq*)]\vee[(U_{i+1,j,k}\neq*)\wedge(U_{i-1,j,k}\neq*)];\end{cases} \tag{9}$$

$$R_y=\begin{cases}0, & \text{при } (U_{i,j+1,k}=*)\wedge(U_{i,j-1,k}=*);\\ 1, & \text{при } [(U_{i,j+1,k}\neq*)\vee(U_{i,j-1,k}\neq*)]\vee[(U_{i,j+1,k}\neq*)\wedge(U_{i,j-1,k}\neq*)];\end{cases} \tag{10}$$

$$R_z=\begin{cases}0, & \text{при } (U_{i,j,k+1}=*)\wedge(U_{i,j,k-1}=*);\\ 1, & \text{при } [(U_{i,j+1,k}\neq*)\wedge(U_{i,j-1,k}\neq*)]\vee[(U_{i,j,k+1}\neq*)\wedge(U_{i,j,k-1}\neq*)];\end{cases} \tag{11}$$

$$\Delta x_{i,j,k}=\begin{cases}\Delta x_{i,j,k} & \text{при } (U_{i-1,j,k}\neq*);\\ \Delta x_{i+1,j,k} & \text{при } (U_{i-1,j,k}=*)\wedge(U_{i+1,j,k}\neq*);\end{cases} \tag{12}$$

$$\Delta x_{i+1,j,k}\begin{cases}\Delta x_{i+1,j,k} & \text{при } (U_{i+1,j,k}\neq*);\\ \Delta x_{i,j,k} & \text{при } (U_{i+1,j,k}=*)\wedge(U_{i-1,j,k}\neq*);\end{cases} \tag{13}$$

$$\Delta y_{i,j,k}=\begin{cases}\Delta y_{i,j,k} & \text{при } (U_{i,j-1,k}\neq *);\\ \Delta y_{i,j+1,k} & \text{при } (U_{i,j-1,k}= *)\wedge(U_{i,j+1,k}\neq *);\end{cases} \qquad (14)$$

$$\Delta y_{i,j+1,k}=\begin{cases}\Delta y_{i,j+1,k} & \text{при } (U_{i,j+1,k}\neq *);\\ \Delta y_{i,j,k} & \text{при } (U_{i,j+1,k}= *)\wedge(U_{i,j-1,k}\neq *);\end{cases} \qquad (15)$$

$$\Delta z_{i,j,k}=\begin{cases}\Delta z_{i,j,k} & \text{при } (U_{i,j,k-1}\neq *);\\ \Delta z_{i,j,k+1} & \text{при } (U_{i,j,k-1}= *)\wedge(U_{i,j,k+1}\neq *);\end{cases} \qquad (16)$$

$$\Delta z_{i,j,k+1}=\begin{cases}\Delta z_{i,j,k+1} & \text{при } (U_{i,j,k+1}\neq *);\\ \Delta z_{i,j,k} & \text{при } (U_{i,j,k+1}= *)\wedge(U_{i,j,k-1}\neq *).\end{cases} \qquad (17)$$

Для решения системы уравнений (8) с учетом граничных условий (9) - (17) необходимо прибегать к итерационным методам с одновременным исправлением граничных значений.

Согласно процессу усреднения для неявных схем [4], выбрав начальные значения $U^0_{i,j,k}$, последовательные приближения l -го шага итерации $U^l_{i,j,k}$ для внутренних узлов (x_i, y_i, z_k) сетки определяют согласно системы уравнений

$$U^l_{i,j,k}=\frac{1}{\left(\frac{R_x}{\Delta x_{i,j,k}\,\Delta x_{i+1,j,k}}+\frac{R_y}{\Delta y_{i,j,k}\,\Delta y_{i,j+1,k}}+\frac{R_z}{\Delta z_{i,j,k}\,\Delta z_{i,j,k+1}}\right.}\times$$

$$\times\left(R_x\frac{U^{l-1}_{i+1,j,k}\,\Delta x_{i,j,k}+U^l_{i-1,j,k}\,\Delta x_{i+1,j,k}}{\Delta x_{i,j,k}\cdot\Delta x_{i+1,j,k}\cdot(\Delta x_{i,j,k}+\Delta x_{i+1,j,k})}+\right.$$

$$+R_y\frac{U^{l-1}_{i,j+1,k}\,\Delta y_{i,j,k}+U^l_{i,j-1,k}\,\Delta y_{i,j+1,k}}{\Delta y_{i,j,k}\,\Delta y_{i,j,k+1}(\Delta y_{i,j,k}+\Delta y_{i,j+1,k})}+$$

$$\left.+R_z\frac{U^{l-1}_{i,j,k+1}\,\Delta z_{i,j,k}+U^l_{i,j,k-1}\cdot\Delta z_{i,j,k+1}}{\Delta z_{i,j,k}\cdot\Delta z_{i,j,k+1}\cdot(\Delta z_{i,j,k}+\Delta z_{i,j,k+1})}\right);$$

$$i=\overline{1,I};\qquad j=\overline{1,J};\qquad k=\overline{1,K}. \qquad (18)$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока во всех узлах не выполняется условие

$$|U^l_{i,j,k}\;U^{l-1}_{i,j,k}|\leq\varepsilon, \qquad (19)$$

где ε -наперед заданная малая величина.

В результате вышеописанных преобразований имеем объемную математическую модель месторождения, представляемую точечно-цифровой матрицей $U_{i,j,k}\,(i=\overline{1,I},\; j=\overline{1,J},\; k=\overline{1,K})$, причем эта функция может нести в себе большой объем информации о месторождении и его спецификации, например, физико-механические свойства, процентное содержание составляющих компонентов, некоторые свойства слагающих пород - буримость, взрываемость, трещиноватость.

Данная объемная математическая модель может быть универсально применена или непосредственно, или при последующей аппроксимации аналитическими зависимостями (поверхностями и кривыми) для получения всевозможных проекций и сечений, для нахождения пересечений, моделирования развития фронта горных работ, построения контуров карьера для каждого этапа отработки, расчетов объемов руды и породы для ряда других задач моделирования и горно-геометрического анализа.

ЛИТЕРАТУРА

I. Байконуров О.А., Букейханов Д.Г., Ашаев П.Ф., Съедин В.Ф. Аналитический метод горно-геометрического анализа карьерных полей штокверных месторождений посредством ЭЦВМ.- Проблемы разработки полезных ископаемых. - Алма-Ата: КазПТИ 1972, вып.3

2. Аппроксимация функций вида $h=f(x,y)$ уравнением Лапласа. - Инструктивные указания, серия УП (подсчет запасов). - Алма-Ата: Мин.гео .КазССР, 1972,вып.3..

3. Арсентьев А.И., Бевз Н.Д., Сологуб Е.И. Исследование оптимального направления развития горных работ в карьере с помощью ЭЦВМ. - Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых.- Л.: ЛГИ, 1966, № 3.

4. Генри Б.,Кричлоу. Современная разработка нефтяных месторождений. - проблемы моделирования. - М.: Недра, 1979.

5. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. - М.:Наука, 1967.

6. Кузьмин А.П., Сорокина М.К. и др. Программа определения на ЭВМ контура некондиционного участка пласта. - Информационный листок Кемеровского межотраслевого территориального центра научно-технической информации и проп.- Кемерово, 1974, № 6.

7. Букейханов Д.Г., Съедин В.Ф., Ашаев П.Ф., Ким Л.И. Математическое моделирование сложных штокверных месторождений.- В кн.: Теория кодирования и информационное моделирование, Алма-Ата: Наука, 1975.

2-1745

8. Симкин Б.А., Шнута Ю.К. Аналитическое моделирование месторождений и их с крытой разработки. - М.: Наука, 1976.

9. Bosmon H.Cw Mine Evolution and Production Scheduling. CIM-Bulletin, NT-6, T-6, 1973, p.92-97.

КазПТИ им.В.И.Ленина, кафедра ТРМ

УДК 622.271.01

Ю.П.Ашаев, Т.К.Кулубеков

НОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ВЫДЕЛЕНИЯ КОНДИЦИОННЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ДЛЯ ПОДСЧЕТА ЗАПАСОВ ПО ДАННЫМ ЭКСПЛУАТАЦИОННОЙ РАЗВЕДКИ В КАРЬЕРЕ ЖАНАТАС

В период отработки месторождений полезных ископаемых периодически производится переоценка запасов, которые утверждены ГКЗ на стадии предварительной и детальной разведки. Переоценка запасов на стадии обработки производится по данным эксплуатационной разведки с учетом объемов уже извлеченных запасов к моменту переоценки. Переоценке подвергаются как количественные, так качественные параметры, являющиеся особенно важными для многокомпонентных месторождений с изменчивым качеством [3]. При изменчивом качестве наиболее важной становится задача точного определения границ рудного тела, а внутри него - контуров залегания забалансовых и балансовых руд, которые также могут иметь многосортную структуру. Получение уточненных границ рудных тел создает возможность выбора наиболее оптимальной технологии отработки и снижения потерь и разубоживания.

В настоящее время широкое распространение получил метод канавных проб, позволяющий для карьеров, разрабатываемых открытым способом, при сравнительно незначительных затратах и технологической простоте получить достоверные данные. Этот метод широко применяется при разработке месторождений фосфоритов, и, в частности, месторождений бассейна Каратау.

Для таких типов месторождений и предлагается алгоритм обработки на ЭВМ данных геологической и эксплуатационной разведки. Автоматизацией процесса выделения так называемых кондиционных пересечений, совокупностей последовательно расположенных проб, удовлетворяющих утвержденным кондициям, и ранее занимались