рующая на изменения внешней среды, является ключевым инструментом управления и может обеспечить динамическое развитие отрасли и повышение эффективности ее деятельности.

Литература

1. Государственная Корпорация по атомной энергии «Росатом»: годовой отчет 2009 [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://rosatom.ru/upload/iblock/f95/ f95773ff59519eac235ea7a3bfbcd349.pdf.

2. Государственная Корпорация по атомной энергии «Росатом»: публичный годовой отчет 2010 [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://rosatom.ru/upload/iblock/8ee/ 8ee2b603c3bc1e0117153b19bf7aa58a.pdf.

3. Государственная Корпорация по атомной энергии «Росатом»: 2011 публичный годовой отчет [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://rosatom.ru/upload/ iblock/465/ 46508c8fb8cddc1a75b1715cf95ba73c.pdf.

4. Итоги Деятельности Государственная Корпорация по атомной энергии «Росатом» за 2015 год: публичный годовой отчет [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://rosatom.ru/upload/iblock/e21/ e21ced22b2cc8d7fed8d83cadab6d0b8.pdf.

5. Итоги деятельности Государственной корпорации по атомной энергии «Росатом» за 2018 год: публичный годовой отчет [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://rosatom.ru/upload/iblock/24a/ 24a1cc1a92f3609d80fb0a60d7770dfe.pdf.

6. Итоги деятельности Государственной корпорации по атомной энергии «Росатом» за 2016 год: публичный годовой отчет [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://rosatom.ru/upload/iblock/d9a/ d9a7d8a9569667eb38bcfc153a7016fe.pdf.

7. Паспорт программы инновационного развития и технологической модернизации Госкорпорации «Росатом» на период до 2030 года (в гражданской части) [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://www.rosatom.ru/upload/ iblock/5e1/5e130b6e7fba0fb511f400defad83aca.pdf.

УДК 330.4

Хацкевич Г. А., д.э.н., профессор
Институт бизнеса Белорусского государственного университета,
г. Минск, Республика Беларусь
Проневич А. Ф., к.ф.-м.н, доцент
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы,
г. Гродно, Республика Беларусь

О ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ С ЗАДАННОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ НОРМОЙ ЗАМЕЩЕНИЯ

Введение. Производство есть процесс преобразования одних благ в другие: факторов производства в готовую продукцию. Зависимость между количеством используемых факторов производства и максимально возможным при этом выпуском продукции называют производственной функцией [1, с. 25]. Все факторы производства можно представить в виде двух агрегатов (капитал и труд), а моделирование производственного процесса P осуществлять на основании двухфакторной производственной функции (ПФ)

$$Y = F(K, L) \quad \forall (K, L) \in G, \tag{1}$$

где K – капитал, L – труд, Y – объем выпущенной продукции, а неотрицательная функция F является дважды непрерывно дифференцируемой на экономической области G из пространства затрат $\mathbf{R}_+^2 = \{(K, L): K \geq 0, L \geq 0\}$.

Выбор функциональной формы ПФ (1) является одним из наиболее сложных и ответственных этапов экономико-статистического моделирования. Здесь происходит «стыковка» информации об объекте моделирования и сведений о свойствах различных параметрических классов функций, из числа которых предстоит выбрать вид модели [2]. Параметрический вид большинства из применяемых в настоящее время ПФ возник или может рассматриваться (см, например, [2 – 8]) как общий интеграл системы дифференциальных уравнений в частных производных, выражающий инвариантность некоторых характеристик ПФ или соотношений между ними при изменении аргументов.

В процессе развития теории ПФ определился набор стандартных двухфакторных ПФ, обладающих заранее определенными свойствами (например, однородности и заданной эластичности замещения факторов производства). Укажем некоторые наиболее распространенные двухфакторные ПФ, широко используемые в практике моделирования производственных процессов.

В 1928 году в статье [9] американских ученых-математика Ч. У. Кобба и экономиста П. Х. Дугласа – для описания влияния величины затрачиваемого капитала и труда на объем продукции в обрабатывающей промышленности США за 1899 – 1922 гг. была использована функция (ПФ Кобба−Дугласа)

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta} \quad \forall (K,L) \in \mathbf{R}_{+}^{2}, \quad A>0, \quad \alpha, \beta \in (0;1), \quad \alpha+\beta=1. \tag{2}$$

В своей более поздней работе [10] П.Х. Дуглас снял предположения об условиях, накладываемых на показатели степеней α и β функции (2).

Большое применение в экономическом анализе получила CES-функция

$$F(K,L) = A\left(bK^{-\gamma} + (1-b)L^{-\gamma}\right)^{-\mu/\gamma} \; \forall (K,L) \in G, \tag{3}$$

$$A>0, \;\; \mu>0, \quad b\in[0;1], \quad \gamma \in [-1;0)\cup(0;+\infty),$$

которая была предложена в Р. М. Солоу в 1956 году в статье [11]. ПФ (3) была исследована и использована для анализа реальных национальных экономик в работе [12] учеными-экономистами К. Д. Эрроу, Х. Чинери, Б. С. Минхас и Р. М. Солоу, после чего она стала широко использоваться как модель производства, более адекватная реальности, чем ПФ Кобба – Дугласа (2). Отметим, что если $\mu=1$, то из CES-функции (3) при $\gamma=-1$ получаем линейную однородную ПФ

$$F(K,L) = cK + dL \quad \forall (K,L) \in \mathbf{R}_{+}^{2}, \quad c=Ab, \;\; d=A(1-b); \tag{4}$$

при $\gamma \to 0$ имеем ПФ Кобба−Дугласа с параметрами $\alpha=b, \; \beta=1-b;$ а при $\gamma \to +\infty$ предельной для CES-функции (3) является ПФ Леонтьева

$$F(K,L) = A\cdot\min(K;L) \quad \forall (K,L) \in \mathbf{R}_{+}^{2}, \quad A>0. \tag{5}$$

Важнейшими характеристиками ПФ (1) являются показатели эффективности процесса замещения факторов производства. Количественные меры замещения были впервые введены [13] в 1932 году английским экономистом Д.Р.Хиксом для двухфакторных ПФ (1) как *предельная норма технического замещения MRTS* (marginal rate of technical substitution) труда капиталом

$$MRTS_{LK}(K,L) = \frac{F_L(K,L)}{F_K(K,L)} \quad \forall (K,L) \in G' \subset G \tag{6}$$

и эластичность замещения труда капиталом

$$\sigma(K,L) = \frac{F_K\,F_L\,(K\,F_K + L\,F_L)}{KL(2F_K\,F_L\,F_{KL} - F_K^2F_{LL} - F_L^2F_{KK})} \quad \forall (K,L) \in G' \subset G, \tag{7}$$

где для частных производных первого и второго порядков ПФ (1) введены для удобства обозначения:

$$\partial_K F = F_K,\ \partial_L F = F_L,\ \partial^2_{KK} F = F_{KK},\ \partial^2_{LL} F = F_{LL},\ \partial^2_{KL} F = F_{KL}.$$

Показатель *MRTS* (6) является для ПФ характеристикой первого порядка (относительно производных) и на языке процентов приближенно показывает, на сколько процентов нужно увеличить или уменьшить использование капитала *K* при уменьшении или увеличении труда *L* на 1%. Графически же характеристика *MRTS* представляется тангенсом угла наклона касательной к изокванте ПФ в точке, указывающей необходимые объемы труда и капитала для производства заданного объема продукции. Например, линейная ПФ (4) имеет постоянную предельную норму замещения $MRTS_{LK}(K,L) = \dfrac{c}{d}$, для ПФ Кобба Дугласа (2) характеристика $MRTS_{LK}(K,L) = \dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{K}{L}$ является линейной функцией относительно фондовооруженности труда $k = K/L$, а у CES-функции (3) данный показатель $MRTS_{LK}(K,L) = \dfrac{1-b}{b}\left(\dfrac{K}{L}\right)^{\gamma+1}$.

Эластичность замещения (7) является характеристикой ПФ второго порядка, так как она зависит и от вторых производных ПФ. Она (характеристика) представляет связь фондовооруженности $k = K/L$ с предельной нормой технического замещения, показывая, на сколько процентов должна измениться фондовооруженность при изменении *MRTS* на 1%.

ПФ (2) − (5) являются примерами однородных функций постоянной эластичности замещения факторов производства: функция Кобба–Дугласа (2) имеет единичную эластичность замещения, т. е. $\sigma(K,L)=1$; для CES-функции (3) эластичность замещения равна $\sigma(K,L)=1/(1+\gamma)$; у линейной функции (4) эластичность замещения факторов бесконечна, а для функции Леонтьева (5) эластичность замещения факторов равна нулю. В общем случае класс *однородных* двухфакторных ПФ (1) с *постоянной эластичностью замещения* описывается следующим утверждением (см., например, [2; 3; 14])

Теорема 1. *Пусть двухфакторная ПФ* (1) *является однородной степени* $q \neq 0$ *и имеет постоянную эластичность замещения факторов производства* $\sigma \neq 0$. *Тогда двухфакторная ПФ* (1) *имеет следующий аналитический вид*

$$F(K,L) = \begin{cases} \beta K^{\alpha} L^{q-\alpha} & \text{при } \sigma = 1; \\ \left(\beta_1 K^{\gamma} + \beta_2 L^{\gamma}\right)^{q/\gamma} & \text{при } \sigma \neq 1, \end{cases}$$

где действительное число $\alpha \neq 0$ *и* $\alpha \neq q$, *числа* $\beta, \beta_1, \beta_2 > 0$, *а* $\gamma = (\sigma - 1)/\sigma$.

Основной класс ПФ, используемых при моделировании производственных процессов *P* – однородные ПФ с постоянной эластичностью замещения факторов производства (теорема 1). Однако этот класс ПФ в полной мере не позволяет описывать реальные процессы производства, что приводит к задаче его расширения в разных направлениях (см., например, работы [2 − 8]). Аналитическое описание класса однородных ПФ с переменной эластичностью замещения для двух факторов впервые найдено [15] американским экономистом индийского происхождения Н. Реванкаром для частного случая линейной зависимости эластичности замещения от пропорции факторов

$$F(K,L)= AK^{\alpha}(\nu K+L)^{\beta} \quad \forall (K,L)\in G, \qquad A>0,\ \ \nu\in \mathbf{R}_+,\ \ \alpha,\beta\in \mathbf{R}\backslash\{0\},$$

и в общем (двухфакторном) случае получено Р. Сато и Р.Ф. Гофманом [16]

$$F(K,L)=A\exp\int\frac{dk}{k+B\exp\int\dfrac{d\ln k}{\sigma(k)}}\Big|_{k=\frac{K}{L}}, \qquad A,B>0.$$

Параметрическое представление класса положительно однородных вогнутых функций *произвольной размерности* через вогнутые функции, заданные на стандартном симплексе, было получено В.К. Горбуновым в работе [17].

В данной статье получены новые виды ПФ, что расширяет возможности для моделирования реальных производственных процессов *P*. А именно решена одна из *обратных задач* теории ПФ: восстановить двухфакторную ПФ исходя из заданной предельной нормы технического замещения в виде рациональной функции. Способ построения ПФ основан на нахождении решений дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Основной результат данной работы выражает

Теорема 2. *Пусть для некоторого производственного процесса P предельная норма замещения* (*труда капиталом*) *задана рациональной функцией*

$$MRTS_{LK}(K,L)=-\frac{a_1K+b_1L+c_1-L(a_3K+b_3L+c_3)}{a_2K+b_2L+c_2-K(a_3K+b_3L+c_3)} \quad \forall (K,L)\in G,$$

$$a_j,b_j,c_j\in \mathbf{R},\ \ j=1,2,3,\ \ |a_3|+|b_3|+|c_3|\neq 0,$$

где экономическая область G *из множества*

$$\{(K,L)\in \mathbf{R}_+^2 : a_2K+b_2L+c_2-K(a_3K+b_3L+c_3)\neq 0\}$$

пространства затрат $\mathbf{R}_+^2$. *Тогда верны следующие утверждения*:

Пусть собственным числам λ_1,λ_2 *и* λ_3 *матрицы* $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$ *соответствуют линейно независимые вещественные собственные векторы* $\nu^j=(\alpha_j,\beta_j,\gamma_j),\ j=1,2,3.$ *Тогда производственный процесс P на экономической области G может быть описан одной из ПФ аналитического вида*

$$F_{\varphi}(K,L)=\varphi\Big((\alpha_1K+\beta_1L+\gamma_1)^{h_1}(\alpha_2K+\beta_2L+\gamma_2)^{h_2}(\alpha_3K+\beta_3L+\gamma_3)^{h_3}\Big),$$

где h_1,h_2 *и* h_3 *находятся из системы* $h_1+h_2+h_3=0,\ \lambda_1h_1+\lambda_2h_2+\lambda_3h_3=0.$

Здесь и далее φ *– произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция на открытом числовом луче* $(0;+\infty)$.

2) *Пусть* $\lambda_1=\hat{\lambda}_1+\tilde{\lambda}_1 i$ *– существенно комплексное* ($\tilde{\lambda}_1\neq 0$) *собственное число матрицы A, которому соответствует собственный вектор* $\nu^1=(\hat{\alpha}_1+\tilde{\alpha}_1 i,\hat{\beta}_1+\tilde{\beta}_1 i,\hat{\gamma}_1+\tilde{\gamma}_1 i),$ *а* λ_3 *– собственное число матрицы A, которому соответствует вещественный собственный вектор* $\nu^3=(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3).$ *Тогда производственный процесс P на области G описывается одной из ПФ вида*

$$F_\varphi(K,L)=\varphi\left(\left(\frac{\hat{p}^2(K,L)+\tilde{p}^2(K,L)}{(\alpha_3K+\beta_3L+\gamma_3)^2}\right)\exp\left(-2\frac{\hat{\lambda}_1-\lambda_3}{\tilde{\lambda}_1}\operatorname{arctg}\frac{\tilde{p}(K,L)}{\hat{p}(K,L)}\right)\right),$$

где линейные функции $\hat{p}(K,L)=\hat{\alpha}_1K+\hat{\beta}_1L+\hat{\gamma}_1$, $\tilde{p}(K,L)=\tilde{\alpha}_1K+\tilde{\beta}_1L+\tilde{\gamma}_1$.

Пусть λ_1 — *двукратное собственное число матрицы A, которому соответствуют вещественные собственный вектор* $\nu^1=(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ *и первый присоединенный вектор* $\nu^2=(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$, *а* λ_3 — *собственное число матрицы A, которому соответствует вещественный собственный вектор* $\nu^3=(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$. *Тогда производственный процесс P описывается одной из ПФ*

$$F_\varphi(K,L)=\varphi\left(\frac{\alpha_1K+\beta_1L+\gamma_1}{\alpha_3K+\beta_3L+\gamma_3}\exp\left((\lambda_3-\lambda_1)\cdot\frac{\alpha_2K+\beta_2L+\gamma_2}{\alpha_1K+\beta_1L+\gamma_1}\right)\right)\quad\forall(K,L)\in G.$$

Пусть λ_1 — *трехкратное собственное число матрицы A, которому соответствуют вещественные собственный вектор* $\nu^1=(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$, *первый присоединенный вектор* $\nu^2=(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ *и второй присоединенный вектор* $\nu^3=(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$. *Тогда производственный процесс P описывается одной из ПФ*

$$F_\varphi(K,L)=\varphi\left(\frac{(\alpha_2K+\beta_2L+\gamma_2)^2-(\alpha_1K+\beta_1L+\gamma_1)(\alpha_3K+\beta_3L+\gamma_3)}{(\alpha_1K+\beta_1L+\gamma_1)^2}\right)$$

$\forall(K,L)\in G$.

Доказательство каждого из утверждений теоремы основано на интегрировании дифференциального уравнения Якоби в частных производных спектральным

$$\left(a_1K+b_1L+c_1-L(a_3K+b_3L+c_3)\right)\partial_K F+\left(a_2K+b_2L+c_2-K(a_3K+b_3L+c_3)\right)\partial_L F=0$$

методом построения первых интегралов линейных однородных систем уравнений в частных производных первого порядка [18; 19].

Выводы. В работе решена обратная задача восстановления двухфакторных ПФ исходя из заданной предельной нормы технического замещения труда капиталом в виде рациональной функции типа (2,2). Указаны аналитические виды двухфакторных ПФ, обладающих заданной рациональной предельной нормой замещения труда капиталом (теорема 2).

Полученные теоретические результаты (теорема 2) могут быть использованы при моделировании реальных производственных процессов.

Литература

1. Тарасевич, Л.С. Микроэкономика / Л.С. Тарасевич, П.И. Гребенников, А.И. Леусский. – М.: Юрайт-Издат, 2006. – 374 с.
2. Клейнер, Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение / Г.Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.
3. Горбунов, В.К. Производственные функции: теория и построение / В.К. Горбунов. – Ульяновск: УлГУ, 2013. – 84 с.
4. Khatskevich, G.A. On quasi-homogeneous production functions with constant elasticity of factors substitution / G.A. Khatskevich, A.F. Pranevich // Journal of Belarussian State University. Economics. – 2017. – No. 1. – P. 46 – 50.
5. Хацкевич, Г.А. Квазиоднородные производственные функции единичной эластичности замещения факторов по Хиксу / Г.А. Хацкевич, А.Ф.Проневич // Экономика, моделирование, прогнозирование: сб. науч. тр. / [редкол.: М.К. Кравцов (гл. ред.) и др.]. – Минск: НИ-

ЭИ Мин-ва экономики Респ. Беларусь, 2017. – Вып. 11. – С. 135 – 140.

6. Хацкевич, Г.А. Двухфакторные производственные функции с заданными эластичностями выпуска и производства / Г.А. Хацкевич, А.Ф. Проневич, В.Ю. Медведева // Бизнес. Инновации. Экономика. – 2017. – Вып. 1. – С. 110 – 119.

7. Khatskevich, G.A. Production functions with given elasticities of output and production / G.A. Khatskevich, A.F. Pranevich // Journal of Belarussian State University. Economics. – 2018. – No. 2. – P. 13 – 21.

8. Khatskevich, G.A. Analytical forms of productions functions with given total elasticity of production / G.A. Khatskevich, A.F. Pranevich, Yu. Yu. Karaleu // Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2019. – Vol. 1052. – P. 276 – 285.

9. Cobb, C.W. A theory of production / C.W. Cobb, P.H. Douglas // American Economic Review. – 1928. – Vol. 18. – P. 139 – 165.

10. Douglas, P.H. The Cobb-Douglas production function once again: its history, its testing, and some new empirical values // P.H. Douglas // Journal of Political Economy. – 1976. – Vol. 84, No. 5. – P. 903 – 916.

11. Solow, R.M. A contribution to the theory of economic growth / R.M. Solow // Quarterly Journal of Economics. – 1956. – Vol. 70, No. 1. – P. 65 – 94.

12. Arrow, K.J. Capital-labor substitution and economic efficiency / K.J. Arrow, H.B. Chenery, B.S. Minhas, R.M. Solow // The Review of Economics and Statistics. – 1961. – Vol. 43, No. 3. – P. 225 – 250.

13. Hicks, J.R. The theory of wages / J.R. Hicks. – London: Macmillan, 1932. – 247 p.

14. Losonczi, L. Production functions having the CES property / L. Losonczi // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. – 2010. – Vol. 26(1). – P. 113 – 125.

15. Revankar, N.S. A class of variable elasticity of substitution production functions / N.S. Revankar // Econometrica. – 1971. – Vol. 39, No. 1. – P. 61–71.

16. Sato, R. Production function with variable elasticity of factor substitution: some analysis and testing / R. Sato, R.F. Hoffman // The Review of Economics and Statistics. – 1968. – Vol. 50. – P. 453–460.

17. Горбунов, В.К. О представлении линейно-однородных функций полезности / В.К. Горбунов // Ученые записки Ульяновского гос. ун-та. Сер. «Фундаментальные проблемы математики и механики». – 1999. – Вып. 1(6). – С. 70 – 75.

18. Горбузов, В.Н. Спектральный метод построения интегрального базиса якобиевой системы в частных производных / В.Н. Горбузов, А.Ф. Проневич // Дифференц. уравн. и процессы управл. – 2001. – № 3. – С. 17 – 45.

19. Горбузов, В.Н. Интегральный базис системы Якоби Гессе в частных производных/ В.Н.Горбузов, С.Н.Даранчук// Известия Российского гос. педагогич. ун-та. Сер. Естеств. и точн. науки. – 2005. – № 5. – С. 65 – 76.