УДК 622.271.01

Ю.П.Ашаев

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПОДСЧЕТА ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ ПРИ ДИСКРЕТНОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

Применение дискретных объемных математических моделей месторождений и карьеров, основанных на отображении непрерывного геологического пространства совокупностью точек в памяти ЭВМ, привело к необходимости оценить погрешность подсчета площадей и объемов при заданных линейных размерах шага сетки.

Относительная погрешность подсчета площадей определяется по формуле(I)

$$\delta = \frac{S_U - S_p}{S_U} = \frac{\Delta S}{S_U}$$

или с некоторым приближением

$$\delta = \frac{\Delta S}{S_p},$$

где S_U - истинная площадь; S_p - расчетная площадь; ΔS - отклонение значений истинной площади от расчетной.

При дискретном моделировании, зная количество точек модели, принадлежащих выделяемой области, можно определить две величины S_{min} и S_{max}, между которыми находится истинное значение площади, и на их основе рассчитать относительную погрешность подсчета площади /2/. Эти величины соответствуют значениям минимально возможной площади (рис. I,а). Среднее значение площади лежит между этими значениями и для квадратной сетки с шагом a определяется из выражения

$$S_p = d a, \quad S_{min} < S_p < S_{max},$$

при

$$S_{min} = (d+1)a^2 - \ell a;$$

$$S_{max} = (d+1)a^2 + \ell a,$$

где d - количество точек, принадлежащих выделяемой площади; ℓ - полупериметр фигуры, определяющей выделяемую площадь.

Исходя из того, что S_U лежит в пределах между S_{min} и S_{max}, запишем $$S_p - \Delta S_1 \leq S_U \leq S_p + \Delta S_2$$

при $$\Delta S_1 = 0{,}5a^2(n-2);$$

$$\Delta S_2 = 0{,}5a^2(n+2),$$

где n – количество точек, лежащих на границе фигуры, определяющей выделяемую площадь.

С некоторым приближением

$$\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S = 0{,}5a^2 n. \qquad (I)$$

Максимально допустимое значение ΔS, определяемое из выражения (I), соответствует максимальной относительной погрешности δ_{max}. В общем случае относительная погрешность (δ) подсчета площади (объема) зависит от размера шага сетки по пространственным координатам (чем меньше шаг сетки, тем меньше δ); от размеров расчетной площади (чем больше площадь, тем меньше δ); геометрической конфигурации фигуры (чем сложнее геометрическая форма, тем больше периметр и больше значение δ).

Сущность δ_{max} заключается в том, что истинное значение площади S_U с вероятностью I находится в интервале

$$S_p(1-\delta_{max}) \leq S_U \leq S_p(1+\delta_{max}).$$

В практических расчетах возникает задача оценки полученного расчетного значения S_p, то есть определения доверительной вероятности значения S_p с заданной относительной погрешностью δ при фиксированных линейных размерах шага сетки по координатным осям.

Для пояснения этой задачи рассмотрим процесс аппроксимации непрерывного криволинейного контура R, ограничивающего площадь S_U дискретным контуром W. При аппроксимации появление дополнительных положительных и отрицательных элементарных площадей ($+S_э$, $-S_э$) в каждой граничной точке (рис. I,б) носит вероятностный характер. Предположим, что вероятность появления площадей ($+S_э$, $-S_э$) в конкретной граничной точке равна 0,5. Появлению ($+S_э$) поставим в соответствие I, а появлению ($-S_э$) – 0.

Такой подход позволяет применять функцию распределения биноминальных случайных величин для n независимых испытаний и при достаточно большом n применять интегральную формулу Муавра-Лапласа /3/, позволяющую вычислить вероятность того, что в n независимых испытаниях событие (появление $+S_э$) состоится число раз, заключенное в границах от a до b ($b > a$)

$$P_n(a \le m \le b) = 0{,}5[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)] \qquad (2)$$

при $x_1 = (b - np)/\sqrt{npq}$; $x_2 = (a - np)/\sqrt{npq}$,

где p – вероятность того, что событие ($+S_э$) наступает в единичном событии (p =0,5); q – вероятность того, что событие ($+S_э$) не наступает (q =0,5). Функция $\Phi(x)$ рассчитывается по формуле

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

и определяется таблично /3/. При достаточно малых n вероятность вычисляется по локальной формуле Муавра-Лапласа как сумма вероятностей указанных распределений

$$P_n(a \le m \le b) = P_{a,n} + P_{a+1,n} + \ldots + P_{b,n}.$$

Числа a и b можно выбирать в соответствии с заданной относительной погрешностью вычислений δ. Если число граничных точек n соответствует максимальной относительной погрешности δ_{max}, то

$$\begin{cases} a = 0{,}5n(\delta_{max} - \delta)/\delta_{max} \\ b = 0{,}5n(\delta_{max} + \delta)/\delta_{max} \end{cases}$$

при $p = 0{,}5$; $q = 0{,}5$

$$x_1 = -\sqrt{n}\,\delta/\delta_{max}; \quad x_2 = \sqrt{n}\,\delta/\delta_{max},$$

тогда

$$P_n(a \le m \le b) = \Phi(\sqrt{n}\,\delta/\delta_{max}).$$

Определение численных значений n и δ_{max} весьма затруднительно, так как предусматривает детальное изучение геометрической конфигурации рассматриваемой фигуры и ее расположения относительно дискретной сетки. При вероятностно-статистическом методе оценки погрешности подсчета площадей и объемов значения n и δ_{max} довольно точно определяются из аналитических выражений, учитывающих коэффициент сложности ($k_{сл}$) рассчитываемой фигуры и простой периметр фигуры ($\ell_{пр}$). Простой периметр для фигуры с площадью S_p определяется из выражения

$$\ell_{пр} = 2(L_x + L_y)\sqrt{S_p/(L_x L_y)}, \tag{4}$$

где L_x, L_y - соотношение линейных размеров рассчитываемой фигуры вдоль оси OX и OY .

Коэффициент сложности определяет сложность геометрического строения рассчитываемой фигуры по аналогии с показателем (λ_p) оценки сложности залегания рудных тел /4/ и рассчетными формулами определения относительной погрешности подсчета площадей при замене сложного контура более простым /5/. Сущность коэффициента сложности заключается в том, что он определяет отношение периметра фигуры с линейными размерами L_x, L_y к простому периметру фигуры в виде прямоугольника с такими же линейными размерами. Его численное значение всегда больше или равно I и определяется по формулам:

для квадратной сетки с шагом a

$$k_{сл} = a\left(\sum_{i=1}^{K} n_i + \sum_{j=1}^{N} n_j\right)/\ell_{пр}, \tag{5}$$

где n_i - количество пересечений секущей, параллельной оси OY с контуром фигуры на i -ом интервале; n_j - количество пересечений секущей , параллельной оси OX с контуром фигуры на j -ом интервале; K - количество интервалов вдоль оси OX , где число n_i постоянно; N - количество интервалов вдоль оси OY , где число n_j постоянно; для сетки с усредненными значениями шага сетки $\Delta x, \Delta y$ по осям OX, OY

$$k_{сл} = \left(\sum_{i=1}^{K} \Delta x\, n_i + \sum_{j=1}^{N} \Delta y\, n_j\right)/\ell_{пр}. \tag{6}$$

Схема, поясняющая формулы (5), (6), приведена на рис. I,в. Используя выражения (4),(5), можно вычислить общее количество гранич-

Таблица I

Данные расчета доверительной вероятности вычисления площади с заданной относительной погрешностью

Номер фигуры	$L_x : L_y$	Размер шага сетки $\Delta x \cdot \Delta y$	Количество граничных точек: истинное	Количество граничных точек: расчетное	$k_{ся}$	Площадь фигуры: истинная	Площадь фигуры: расчетная	Максимальное расчетное отклонение	Задаваемая относительная погрешность, %	Доверительная вероятность вычисления площади
I	I:I	5x5	68	7I	I,00	7850	7925	890	3	0,9762
									5	0,9998
									I0	I
		I0xI0	34	36		7850	8I00	I800	3	0,582I
									5	0,8230
									I0	0,993I
II	I:I	5x5	I27	I26	I,I3	II545	II575	I575	3	0,9865
									5	I
									I0	I
		I0xI0	56	63		II545	III00	3I50	3	0,5935
									5	0,8324
									I0	0,9944
Ш	3I:I8	I0x5	74	67	I,I2	7687,5	7900	I883	3	0,7I54
									5	0,9233
									I0	0,9995

ных точек для квадратной сетки с шагом a

$$n = k_{сл} \ell_{пр} / a \tag{7}$$

и значение максимальной относительной погрешности

$$\delta_{max} = (k_{сл} \ell_{пр} a)/(\cdot 2 S_p). \tag{8}$$

При оценке точности подсчета объемов величина относительной погрешности зависит от значения отклонения истиной площади от рассчетной в плоскосоти XOY и не зависит от величины шага по оси OZ .Это связано с тем, что дискретные уровни моделирования по оси выбираются в соответствии с горизонтами отработки и дискретность понижения горных работ совпадает с дискретностью уровней моделирования. Поэтому при оценке точности подсчета объемов достаточно учитывать лишь площадь расчетной фигуры на каждом горизонте отработки. А во всех вышеприведенных расчетных формулах величина S_p заменяется на $V_p / \Delta Z$.

На рис. 2. в качестве иллюстрированного примера приведены плоские фигуры различного геометрического строения, интерпритирующие подсчетные площади. В табл. I даны результаты определения доверительной вероятности расчета площади для этих фигур для различных размеров шага сетки.

В практике автоматизированного проектирования при применении дискретных математических моделей чаще встречается обратная задача - определение размера шага сетки для заданной фигуры с площадью S , чтобы относительная погрешность расчета площади не превышала δ при заданной доверительной вероятности расчета - P .

Согласно формуле (3) по таблице для функции $\Phi(x)$ при заданном значении P находим фиксированное табличное значение A

$$A = \sqrt{n}\, \delta / \delta_{max}. \tag{9}$$

Численные значения n и δ_{max} определяются по формулам (7),(8), а значение δ задается. После преобразований получаем следующие формулы расчета:

для трехмерного (объемного) случая

$$A = 2 \delta V / (\Delta Z \sqrt{\ell_{пр} k_{сл}}\, \Delta x \sqrt{\Delta y}); \tag{10}$$

для двухмерного (плоского) случая

$$A=2\delta S/(\Delta x\sqrt{\ell_{пр}k_{сл}\Delta y}). \qquad (11)$$

Согласно выражениям (10),(11) формулы расчетов оптимального значения шага квадратной сетки ($\Delta x=\Delta y=a$) имеют вид:
для трехмерного случая

$$a=\sqrt[3]{(2\delta v/(\Delta z A\sqrt{\ell_{пр}k_{сл}}))^2}; \qquad (12)$$

для двухмерного случая

$$a=\sqrt[4]{(2\delta S/(A\sqrt{\ell_{пр}k_{сл}}))^2}. \qquad (13)$$

Данные расчетов оптимального шага квадратной сетки при заданных значениях δ и P для контрольных подсчетных площадей приведены в табл. 2. Для сравнения приведены данные определения шага сетки , полученные из формулы вычисления оптимального расстояния (a) между

Таблица 2

Данные расчета оптимальной длины шага сетки

Номер фигуры	Вероятностно-статистический метод			Значение шага сетки, полученное из выражения $a=0{,}025/M\sqrt[3]{S^2\delta^2/D}$
	доверительная вероятность	значение функции	оптимальная длина шага сетки	
I	0,80	I,30	6,76	4,43
	0,90	I,65	5,77	
	0,95	I,95	5,I4	
	0,99	2,58	4,55	
II	0,80	I,30	8,37	4,90
	0,90	I,65	7,I4	
	0,95	I,95	6,37	
	0,99	2,58	5,29	
III	0,80	I,30	7,20	4,35
	0,90	I,65	6,I3	
	0,95	I,95	5,46	
	0,99	2,58	4,34	

фиктивными параллельными сечениями, используемыми при построении цифровой модели месторождения /6/. На основании этой формулы расстояние a выбирается таким, чтобы относительная погрешность подсчета площади не превышала заданного числа. Формула имеет вид

$$a=\frac{0{,}025}{M}\sqrt[3]{S^2\delta^2/D}, \qquad (14)$$

где S - площадь расчетной фигуры; δ - значение относительной погрешности подсчета площади; D - диаметральна полувариация, определяемая как сумма разностей ординат на соседних сечениях; M - масштаб чертежа.

Значение δ при расчетах взято 3%, согласно допустимым погрешностям при расчетах площадей и объемов на ЭВМ.

Выбор размера шага дискретной сетки моделирования имеет важное значение. При малых размерах можно достичь высокой точности подсчета площадей и объемов, однако при этом возрастает количество узловых точек, составляющих математическую модель, что приводит к значительному увеличению необходимой емкости памяти ЭВМ и увеличению времени счета. Принципиальное влияние на выбор шага сетки имеет тип задачи, для которой строится дискретная объемная математическая модель месторождения. Например, при решении задач квартального планирования горных работ шаг дискретной сетки математической модели, на базе которой решается эта задача, должен быть меньше, чем при решении задач годового планирования. Это связано с различными значениями объемов руды, породы и горной массы, которыми необходимо оперировать при расчетах.

Погрешность подсчета площадей и объемов также во многом зависит от того, насколько точно при расчетах удается отобразить геометрические элементы горных выработок (верхнюю и нижнюю бровки уступа, линии фронта горных работ для определенных этапов отработки). Существующие способы воспроизведения криволинейных контуров базируются на отображении линии совокупностью точек, которые аппроксимируют положение и форму линии на плоскости и в пространстве. Каждая точка характеризуется координатами (x_i, y_i, z_i) , а процесс восстановления конфигурации линии заключается в ее описании аналитическими уравнениями или системой полиномов, описывающих участки кривой. Наиболее простым , но получившим широкое распространение является способ аппроксимации кривой ломаной линией, состоящей из отрезков прямой, соединяющей две соседние точки. При этом возникает задача оценки влияния дискретности положения точек на погрешность подсчета площадей и объемов. С учетом того, что расстояние между точками на участке кривой должно зависеть от радиуса кривизны на этом участке, были проведены исследования, позволившие получить аналитическую зависимость между радиусом кривизны, расстоянием между точками и относительной погрешностью расчетов. В процессе исследований рассматривались следующие зависимости: окружность,полиномы второй и третьей

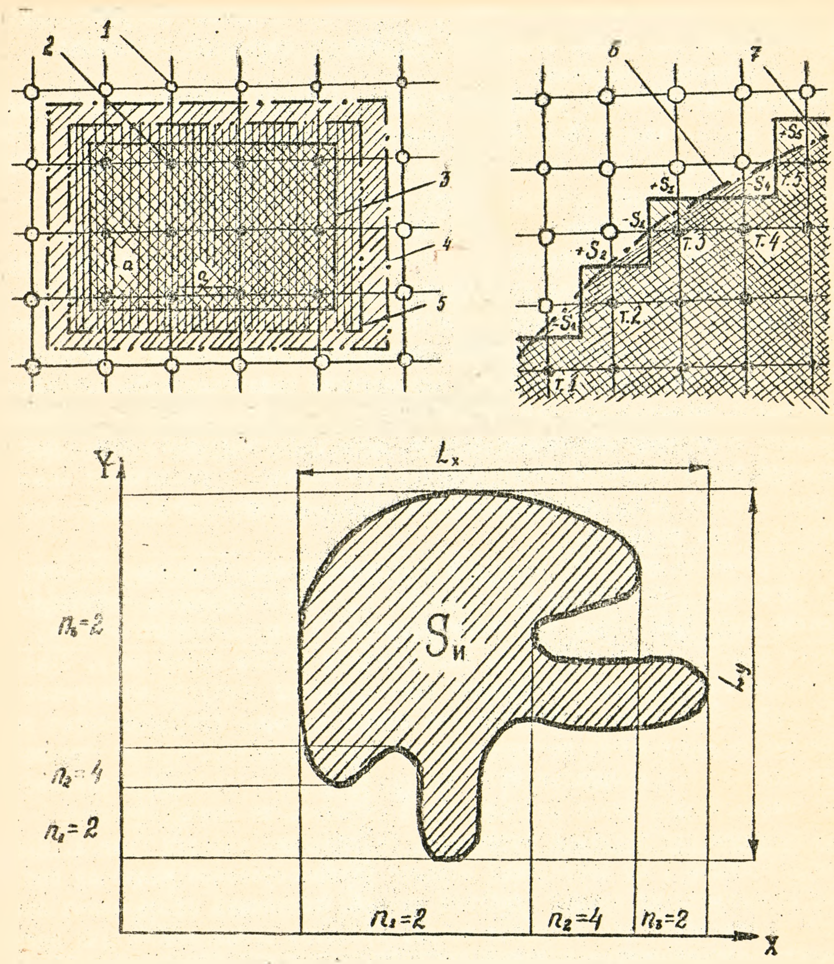

Рис. I. К пояснению вероятностно-статистического метода оценки подсчета площадей и объемов при дискретном математическом моделировании: а) схема к расчету площади; б) преобразование непрерывной криволинейной границы в дискретную; в) схема к определению коэффициента сложности. I - точки вне подсчетной площади; 2 - точки внутри подсчетной площади; 3 - линия, ограничивающая S_{min}; 4 - линия, ограничивающая S_{max}; 5 - линия, ограничивающая S_p; 6 - истинная граница подсчетной площади; 7 - дискретная граница

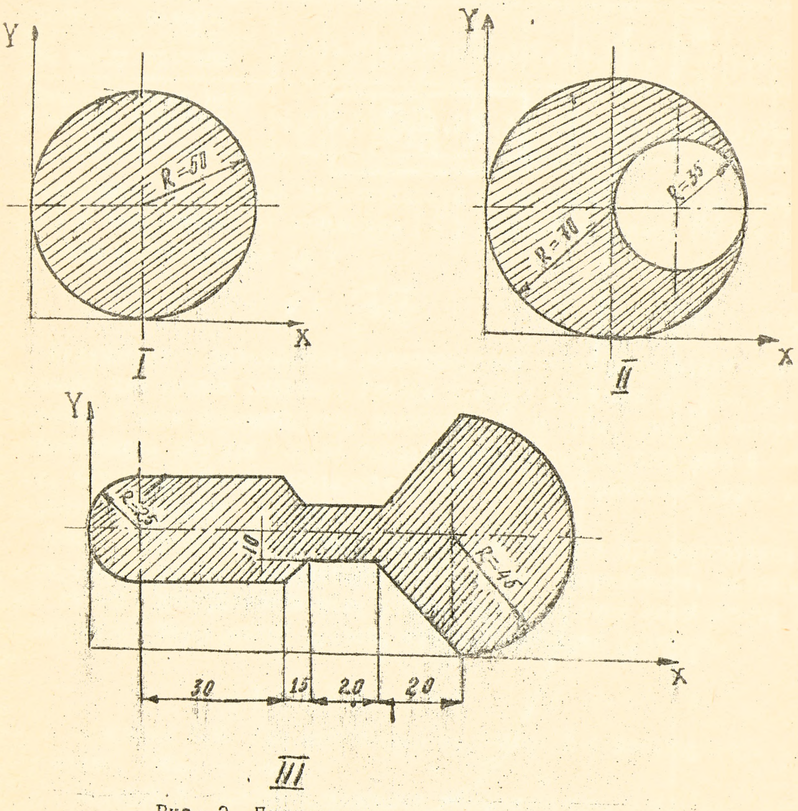

Рис. 2. Примеры подсчетных площадей

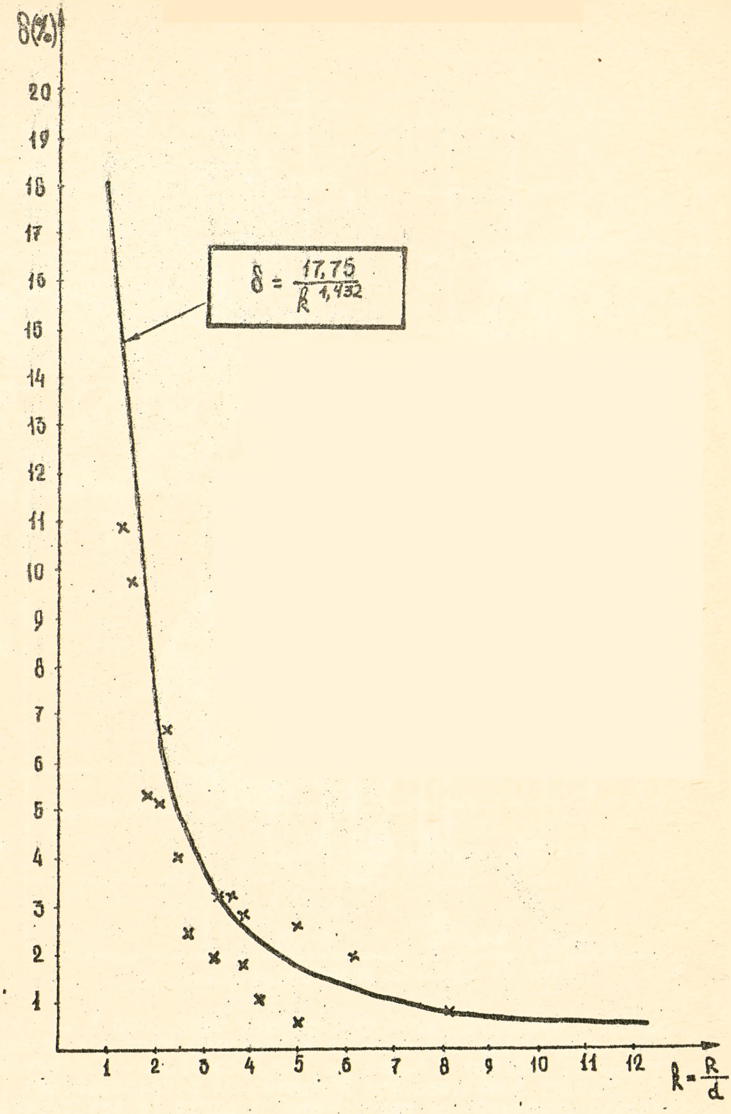

Рис. 3. График функции $\delta = f(k)$

степеней. На основании расчетных данных с использованием методов численного анализа (метода средних) получена аналитическая формула,

Таблица 3

Рекомендуемые величины для определения расстояния между точками

Отношение радиуса кривизны к расстоянию между точками	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,4	4,5	3,5	2,8	2,4	2,1	1,5
Относительная погрешность подсчета площади	6,5	3,7	2,4	1,8	1,3	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	10

позволяющая определить относительную погрешность подсчета площади (δ) в зависимости от отношения (k) радиуса кривизны (R) к расстоянию между точками (α)

$$\delta = \frac{17,75}{k^{1,42}}. \qquad (15)$$

Полученную зависимость целесообразно использовать при значениях, больших или равных единице. График функции приведен на рис. 3, а в таблице 3 даны рекомендуемые величины δ и k, которые могут быть использованы как при оценке погрешностей подсчета площадей и объемов, так и при снятии координат точек о геометрической форме горных выработок и рудных залежей.

Общая погрешность подсчета площадей и объемов при дискретном моделировании должна вычисляться с учетом как погрешности, возникающей за счет дискретности шага сетки, так и за счет погрешности аппроксимации непрерывной кривой, кусочно-линейной функцией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хохряков В.С. Проектирование карьеров. 2-е изд.перераб. и доп.- М.: Недра, 1980. - 336с.

2. Матерон Ж. Основы прикладной геостатистики. - М.: Мир, 1968.- 408с.

3. Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. 4-е изд. - М.: Статистика, 1979, - 279с.

4. Ломоносов Г.Г. Формирование качества руды при открытой добыче, -М.: Недра, 1975. - 224с.

5. Бастан П.П., Хохряков В.С. Оценка погрешности простых геометрических моделей рудных тел. - Изв.вузов, Горный журнал, 1980,№3. с.6-8.

6. Аленичев В.М., Сивков М.И. Составление календарного плана горных работ карьера с использованием ЭВМ. - Изв. вузов. Горный журнал, 1979, №6, с.17-19.

УДК 622.271.01 Г.Н.Андреева

АВТОМАТИЗАЦИЯ КОНТРОЛЯ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ГОРНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА КАРЬЕРНЫХ ПОЛЕЙ

Метод автоматического контроля горно-геологической информации реализован в комплексе программ "Дискретное объемное математическое моделирование месторождений и карьеров и горно-геометрический анализ карьерных полей", созданном в КазПТИ им. В.И.Ленина.

Алгоритм автоматического контроля основан на том свойстве, что снимаемые замкнутые кривые (контуры карьера, рудных тел, линии фронта горных работ) не могут иметь общих областей, то есть они не могут пересекаться друг с другом. Появление подобных пересечений расценивается как ошибка.

Рассмотрим предлагаемый алгоритм автоматического контроля.

Пусть имеется $q = \overline{1,N}$ горизонтов с заданными точками вида $(X,Y)=(x_i^q, y_i^q)$, $i=\overline{1,K_q}$, K_q - количество точек на q-м горизонте. Будем рассматривать горизонты последовательно, начиная с самого нижнего до самого верхнего.

Шаг 1. За начальный исходный контур берется самый нижний горизонт N.

Шаг 2. Из совокупности точек (x_i^q, y_i^q), $i=\overline{1,K_q}$ выделяем две соседние точки:

$$P_e(x_e^q, y_e^q),\ P_{e+1}(x_{e+1}^q, y_{e+1}^q),\quad e=i.$$

Шаг 3. Из совокупности точек (x_j^{q-1}, y_j^{q-1}), $j=\overline{1,K_{q-1}}$ выделим две соседние точки: $P'_m(x_m^{q-1}, y_m^{q-1})$ $P'_{m+1}(x_{m+1}^{q-1}, y_{m+1}^{q-1})$, $m=j$

Шаг 4. Упорядочиваем по возрастанию координаты по X и по Y точек P_e, P_{e+1}, P'_m, P'_{m+1} отдельно. В результате получаем последовательность значений по координате X: x_1'', x_2'', x_3'', x_4'' и по координате Y: y_1'', y_2'', y_3'', y_4''.

Шаг 5. Если выполняется для координат X точек P_e, P_{e+1}, P_m, P_{m+1} условие: