СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Т.Г. Хомицкая

Белгосуниверситет, пр. Скорины, 4, Минск-80, Беларусь
E-mail: tgh@e-mail.ru

В классе кусочно-непрерывных скалярных управлений $u(t)$, $t \in T = [t_*, t^*]$, $t_* < t^* < +\infty$, рассматривается линейно-квадратичная задача терминального управления:

$$\alpha^0 = \varphi_0(x^0(t^*)) = \min \varphi_0(x(t^*)),\ \dot{x} = A(t)x + b(t)u,\ x(t_*) = x_0,\ \varphi_1(x(t^*)) \le \rho,\ |u(t)| \le L,\ t \in T, \tag{1}$$
$$(\varphi_0(x) = c'x + x'Dx/2,\ \varphi_1(x) = d'x + x'Qx/2,\ c, d, x \in R^n,\ L, \rho \in R,\ D, Q \in R^{n\times n},\ D > 0,\ Q \ge 0)$$

Здесь $A(t)$, $b(t)$, $t \in T$, – кусочно-непрерывные $n\times n$-матричная и n-векторная функции.

Понятия допустимого и оптимального управлений определяются стандартно.

Пусть $X^\alpha = \{x \in R^n : \varphi_0(x) \le \alpha\}$, $X_1^\rho = \{x \in R^n : \varphi_1(x) \le \rho\}$. Задача (1) эквивалентна следующей:

$$\alpha^0 = \min \alpha,\ \dot{x} = A(t)x + b(t)u,\ x(t_*) = x_0,\ x(t^*) \in X^\alpha,\ x(t^*) \in X_1^\rho,\ |u(t)| \le L,\ t \in T. \tag{2}$$

Пусть h_i, $i \in I$, и v_i, $i \in I$, $(I = \{1, 2, \dots, m\},\ m \ge n+1)$ – семейства единичных n-векторов, каждые n из которых являются линейно-независимыми. Вычислим $g_i^*(\alpha) = \max_{x\in X^\alpha} h_i'x$; $g_{*i}(\alpha) = \min_{x\in X^\alpha} h_i'x$; $f_i^*(\rho) = \max_{x\in X_1^\rho} v_i'x$; $f_{*i} = \min_{x\in X_1^\rho} v_i'x$, $i \in I$. Вводим кусочно-линейную аппроксимацию задачи (2):

$$\alpha_m^0 = \min \alpha,\ \dot{x} = A(t)x + b(t)u,\ x(t_*) = x_0,$$
$$g_{*i}(\alpha) \le h_i'x(t^*) \le g_i^*(\alpha),\ f_{*i}(\rho) \le v_i'x(t^*) \le f_i^*(\rho),\ i \in I;\ |u(t)| \le L,\ t \in T. \tag{3}$$

Существование допустимых управлений выявляется с помощью задачи первой фазы. Выберем произвольно допустимое управление $|\tilde{u}(t)| \le L$, $t \in T$; подсчитаем $v_i'\tilde{x}(t^*)$, $i \in I$; введем множества $I^- = \{i \in I : v_i'\tilde{x}(t^*) < f_{*i}(\rho)\}$, $I^+ = \{i \in I : v_i'\tilde{x}(t^*) > f_i^*(\rho)\}$ и вычислим $\tilde{\omega}_i = v_i'\tilde{x}(t^*) - f_{*i}(\rho)$, $i \in I^-$; $\tilde{\omega}_i = v_i'\tilde{x}(t^*) - f_i^*(\rho)$, $i \in I^+$. Сформируем задачу первой фазы:

$$\sum_{i\in I^+\cup I^-} x_{n+i} \to \min,\ \dot{x} = A(t)x + b(t)u,\ x(t_*) = x_0, |u(t)| \le L,\ t \in T,$$
$$f_{*i}(\rho) + \gamma \le v_i'x(t^*) + x_{n+i} \le f_i^*(\rho) - \gamma,\ i \in I^-;\ f_{*i}(\rho) + \gamma \le v_i'x(t^*) - x_{n+i} \le f_i^*(\rho) - \gamma,\ i \in I^+;$$
$$f_{*i}(\rho) \le v_i'x(t^*) \le f_i^*(\rho),\ i \in I^0 = I \setminus (I^+ \cup I^-),\ 0 \le x_{n+i} \le \tilde{\omega}_i,\ i \in I^+ \cup I^-.$$

Здесь γ – малое число, которое характеризует степень выполнения условия Слейтера: $0 < \gamma < \gamma_0/2$, $\gamma_0 = \min(f_i^*(\rho) - f_{*i}(\rho))$, $i \in I$.

Если задача (3) имеет допустимые управления, то строятся ее программные решения. Задача (3) является нелинейной задачей оптимального управления. Для ее решения введем вспомогательную задачу:

$$\beta(\alpha) = \min \beta,\ \dot{x} = A(t)x + b(t)u,\ x(t_*) = x_\beta = x_0 + \beta l,$$
$$g_{*i}(\alpha) \le h_i'x(t^*) \le g_i^*(\alpha),\ f_{*i}(\rho) \le v_i'x(t^*) \le f_i^*(\rho),\ i \in I;\ |u(t)| \le L,\ t \in T,\ (\beta \in R). \tag{4}$$

Здесь $l = x^* - x_0$, $\varphi_0(x^*) = \min \varphi_0(x)$, $x \in X_1^\rho$.

При фиксированном значении α задача (4) является линейной задачей оптимального управления, для которой разработан быстрый двойственный метод вычисления оптимальных программ (модификация алгоритма [1]). Оптимальное значение α_m^0 критерия качества задачи (3) равно минимальному корню уравнения $\beta(\alpha) = 0$. Решив это уравнение и применив специальную процедуру доводки, получим оптимальное управление исходной задачи (1).

Построенные алгоритмы вычисления оптимальных программ позволяют, следуя [1], реализовать оптимальные управления типа обратной связи в режиме реального времени.

Литература

1. *Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. №6.