дорожки» приблизительно в 15 – 20 мВ, причем частотный диапазон, занимаемый шумом, приблизительно равен полосе пропуска УПТ и составляет ≈20 кГц. Данные параметры шума на входе АЦП распределяют его шум квантования в достаточно широкой полосе частот, определяемой частотой отсчетов. В результате имеется возможность улучшить разрешающую способность АЦП за счет т. н. сверхдискретизации, т. е. достаточно высокой частоты отсчетов, и последующего отфильтровывания большей части шумов квантования [7]. Спектрометрический сигнал в приборе с механическим сканированием изменяется очень медленно, верхняя частота его спектра составляет доли Герца. Поэтому АЦП микроконтроллера с большим запасом достаточен для сверхдискретизации, а последующий цифровой фильтр низких частот реализуется в программе для МК.

Как уже отмечалось, частота отсчетов спектрометрического сигнала равна 6.2 кГц. Она обеспечивает распределение шума квантования в частотной полосе около 3. 2 кГц. Последующее цифровое отфильтровывание высокочастотных спектральных составляющих заключается в скользящем суммировании 256 соседних отсчетов. При этом низкочастотные спектральные компоненты с частотами не выше 20 Гц, которые коррелированы в суммируемых отсчетах, увеличатся в 256 раз, а некоррелированные высокочастотные компоненты возрастут только в 16 раз. В результате отношение сигнал/шум квантования улучшается в 16 раз, а число разрядов накапливаемых отсчетов возрастает до 20 разрядов. Сформированные таким способом трехбайтные коды сигнальных отсчетов передаются в компьютер, который завершает процедуру фильтрации отбрасыванием 4 младших разрядов. Таким образом, разрешающая способность АЦП улучшается до 14 двоичных разрядов, что как минимум не уступает данному показателю прежнего АЦП на основе вольтметра Щ1413. Для иллюстрации разрешающей способности модернизированного комплекса на рисунке 4 приведена спектрограмма излучения неоновой лампы, записанная в диапазоне длин волн от 580 до 600 нм с шагом 0.0125 нм при ширине щелей 50 мкм.

Из спектрограммы видно, что комплекс без насыщения и заметных скачков квантования определяет форму и количественные параметры как сильных, так и слабых спектральных линий.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Сильверстейн, Р. Спектрометрическая индикация органических соединений / Р. Сильверстейн, Г. Басслер, Т. Морил – Москва : Мир, 1977.
2. Beyerman, K. Organic Trace Analysis. – New York : Halsted Press, 1982.
3. Свердлова, О.В. Электронные спектры в органической химии. – Ленинград : Имия, 1985.
4. Больщиков, Ф. А. Модернизация установки для регистрации спектров поглощения и люминесценции в области длин волн 0.2 – 2 мкм / Ф.А. Больщиков, А.В. Малов, К.Н. Нищев, П.А. Рябочкина, С.Н. Ушаков // Приборы и техника эксперимента. – 2007. – № 5. – С. 160–162.
5. Некрасов, В.В. Электроника / В.В. Некрасов, Г.А. Шаулов, А.Ю. Ковалев // Наука, технология, бизнес. – 2002. – № 3. – С. 32–36.
6. Герман, А.Е. Універсальный программіруемый контроллер спектральных комплексов / А.Е. Герман, Г.А. Гачко, Г.А. Панютін // Веснік Гродзенскага дзяржаунага універсітэта імя Янкі Купалы. – Серыя 2. – 2000. – № 2. – С. 84–90.
7. Ричард, Лайонс. Цифровая обработка сигналов. – Бином-Пресс, 2006. – 656 с.

Материал поступил в редакцию 12.05.2017

VORSIN N.N., GLADYSHCHUK A.A., KOUCHNER T.L. Modernization of the spectral KSVU-23 complex

The architecture of upgrade of the universal spectral KSVU-23 computer system differing from known for extremely small expenses and simplicity of repetition is offered. The software of the upgraded complex is available to the free downloading on the website of department of physics of BSTU.

УДК 512.542

Артюшеня Т.А., Трофимук А.А.

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ОБЛАДАЮЩИЕ НОРМАЛЬНЫМ РЯДОМ, ФАКТОРЫ КОТОРОГО ИМЕЮТ ПОРЯДКИ, СВОБОДНЫЕ ОТ ЧЕТВЕРТЫХ СТЕПЕНЕЙ

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Используемые обозначения и определения соответствуют [1]. Пусть n и m – натуральные числа. Говорят, что n свободно от m-х степеней, если p^m не делит n для всех простых p. При $m=2$ говорят, что n свободно от квадратов, при $m=3$ – от кубов, а при $m=4$ – от четвертых степеней.

Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G, \qquad (1)$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i. Фактор-группы G_{i+1} / G_i называются факторами нормального ряда (1).

Если порядок группы G свободен от квадратов, то в группе G существует циклическая холлова подгруппа N такая, что G/N циклическая [2, теорема IV.2.11]. В частности, производная длина G не превосходит 2.

В работе [3] были исследованы разрешимые группы, обладающие нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от кубов. В частности, нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5. Аналогичные результаты получены для A_4-свободной группы. Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от четвертых степеней. Тогда нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6, $l_2(G) \le 2$, $l_3(G) \le 2$, $l_p(G) \le 1$ для $p > 3$.

Следствие. Пусть G – A_4-свободная разрешимая группа, которая обладает нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от четвертых степеней. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, $l_p(G) \le 1$ для $p \ne 3$.

***Артюшеня Татьяна Александровна**, ассистент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета, e-mail: 887766t@gmail.com.*
Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.
***Трофимук Александр Александрович**, к.физ.-мат.н., доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина, e-mail: Alexander.trofimuk@gmail.com.*
Беларусь, БрГУ им. А.С. Пушкина, 224016, бульвар Космонавтов, 21.

Пример. В системе компьютерной алгебры GAP построены группа $G_1 = [S]GL(2,3)$ и A_4-свободная группа $G_2 = [E_{7^3}]([S]Q_8)$, где S – экстраспециальная группа порядка 27, E_{7^3} – элементарная абелева группа порядка 7^3, Q_8 – группа кватернионов порядка 8. Очевидно, что $|G_1| = 2^4 \cdot 3^4$ и $|G_2| = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$, при этом для каждой из них существует нормальный ряд, факторы которого свободны от четвертых степеней. Для группы G_1 порядок подгруппы Фраттини равен 3, а для группы G_2 подгруппа Фраттини единичная. Причем нильпотентная длина группы G_1 равна 3, $l_2(G_1) = 2$, $l_3(G_1) = 2$, производная длина группы G_2 равна 5. Значит, оценки нильпотентной длины и p-длины, полученные в теореме, и оценка производной длины, полученная в следствии, являются точными.

Вспомогательные результаты. Напомним некоторые понятия, существенные в данной работе.

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций [1]. Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотетных и абелевых групп обозначают через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно

Группа G называется A_4-свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4.

Подгруппой Фраттини неединичной группы называется пересечение всех ее максимальных подгрупп и обозначается $\Phi(G)$.

Если все факторы ряда (1) абелевы и m – наименьшее среди всех нормальных рядов с абелевыми факторами, то значение m называют производной длиной группы G и обозначают через $d(G)$.

Если все факторы ряда (1) нильпотентны и m – наименьшее среди всех нормальных рядов с нильпотентными факторами, то значение m называют нильпотентной длиной группы G и обозначают через $n(G)$.

Если все факторы ряда (1) являются либо p-группой, либо p'-группой и натуральное число l – наименьшее число p-факторов среди всех таких рядов, то значение l называют p-длиной группы G и обозначают через $l_p(G)$.

Лемма 1. Пусть n – натуральное число и группа G обладает нормальным рядом с факторами порядков, свободных от n-х степеней.

1. Если H – подгруппа группы G, то H обладает нормальным рядом с факторами порядков, свободных от n-х степеней.
2. Если N – нормальная подгруппа группы G, то G/N обладает нормальным рядом с факторами порядков, свободных от n-х степеней.

Лемма 2 [4, лемма 12]. Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n,p)$. Тогда:

1) если $n = 2$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$;
2) если $n = 3$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^5$;
3) если $n \in \{2,3\}$, $p > 3$ и $O_p(H) = 1$ то $H - p'$-группа.

Лемма 3 [4, лемма 13]. 1. Если H – разрешимая A_4-свободная подгруппа группы $GL(2,p)$, то H метабелева.
3. Если H – разрешимая A_4-свободная неприводимая подгруппа группы $GL(3,p)$, то $H \in \mathfrak{A}^4$.

Лемма 4 [4, лемма 7]. $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^k$ тогда и только тогда, когда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^{k+1}$.

Лемма 5. Если G – разрешимая группа и $F(G) = E_4 \neq G$, то $G \cong A_4$ или $G \cong S_4$.

Доказательство. Поскольку $F(G)$ – абелева подгруппа, то согласно теореме 4.22 [1] $C_G(F(G)) = F(G)$. Так как $\mathrm{Aut}(F(G)) \cong GL(2,2) \cong S_3$, то либо $G/F(G) \cong Z_3$, либо $G/F(G) \cong S_3$. Если $G/F(G) \cong Z_3$, то $G \cong A_4$. Если $G/F(G) \cong S_3$, то $G \cong S_4$.

Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы.

Пусть ряд (1) является нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от четвертых степеней. Без ограничения общности можно считать, что $G_1 \neq 1$. Воспользуемся индукцией по порядку группы G и покажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^5$. Хорошо известно, что формационные произведения $\mathfrak{N}^4$ и $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^5$ являются насыщенными формациями, поэтому $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. В силу леммы 1 собственные подгруппы и фактор-группы группы G обладают нормальными рядами с факторами порядков, свободными от четвертых степеней. Поэтому на них распространяется индукция и они принадлежат $\mathfrak{F}$. Значит можно считать, что $\Phi(G) = 1$ и $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Кроме того, $F = C_G(F)$. Ясно, что $F \subseteq G_1$, поэтому F является подгруппой некоторой силовской p-подгруппы группы G_1 и порядок F равен p, p^2 или p^3 для некоторого простого p.

Пусть сначала $|F| = p$. Тогда G/F – циклическая группа, как группа автоморфизмов группы простого порядка p и G метабелева. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $|F| = p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе группы $GL(2,p)$. Из п.1 леммы 2 следует, что $G/F \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$, поэтому $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $|F| = p^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе группы $GL(3,p)$. Из п.2 леммы 2 следует, что $G/F \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^5$, поэтому $G \in \mathfrak{F}$. Из $G \in \mathfrak{N}^4$ следует, что нильпотентная длина группы G не превышает 4. Из $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^5$ и леммы 4 следует, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^6$ и следовательно производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6.

Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то p-длина группы не превышает 2 для всех простых чисел p.

Уточним оценку p-длины для $p > 3$. С помощью индукции по порядку G покажем, что $l_p(G) \leq 1$ для любого $p > 3$. По лемме VI.6.9 [2] можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная p-

подгруппа. Ясно, что $F \subseteq G_1$, поэтому порядок F равен p, p^2 или p^3, где p – простое число.

Если $|F| = p$, то G/F изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов $Aut F$ группы F, порядок которой равен $p-1$. Отсюда, $G_p = F$ и $l_p(G) \le 1$.

Если $|F| = p^n$, $n \in \{2,3\}$, то $Aut F = GL(n,p)$, G/F – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n,p)$ и $O_p(G/F) = 1$. По лемме 2 G/F – p'-группа, т. е. $l_p(G) \le 1$ для всех простых $p > 3$. Теорема доказана.

Доказательство следствия.

Пусть G A_4-свободна. Воспользуемся индукцией по порядку группы G и докажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Можно считать, что $\Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, которая совпадает с подгруппой Фиттинга F, $F = C_G(F)$. Так как $F \le G_1$, то порядок $|F|$ равен p или p^2, или p^3, где p – простое число.

Если $|F| = p$, то G/F – циклическая группа, как группа автоморфизмов группы простого порядка p, поэтому G/F абелева. Пусть $|F| = p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой A_4-свободной разрешимой подгруппе H группы $GL(2,p)$. Подгруппа H метабелева по лемме 3, тогда $G/F \in \mathfrak{A}^2$. Пусть $|F| = p^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой A_4-свободной разрешимой подгруппе H группы $GL(3,p)$. По лемме 3 подгруппа $H \in \mathfrak{A}^4$, т.е. $G/F \in \mathfrak{A}^4$.

Итак, в любом случае $G/F \in \mathfrak{A}^4$. Так как $F/\Phi(G)$ абелева и $(G/\Phi(G))/(F/\Phi(G)) \cong G/F$, то по лемме 4 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^5$ и производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Покажем, что 3-длина не превышает 2, p-длина не превышает 1 для всех простых $p \ne 3$.

В силу ранее доказанного следствия 2-длина и 3-длина группы G не превышает 2, p-длина не превышает 1 для всех простых $p > 3$. Используя индукцию по порядку группы, докажем, что 2-длина не превышает 1. По лемме VI.6.9 [2] можно считать, что $O_{2'}(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа порядка 2^α, обладающая дополнением M в группе G, т. е. $G = [F]M$. Поскольку $|F| = |G:M|$ и M – максимальная подгруппа группы G, то $\alpha \le 2$. Так как $C_G(F) = F$, то фактор-группа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(\alpha, 2)$. Если $|F| = 2$, то группа G изоморфна F и 2-длина не превышает 1. Если $|F| = 4$, то по лемме 5 группа G изоморфна или A_4, или S_4, а, значит, не A_4-свободна. Противоречие.

Заключение. В данной статье исследованы разрешимые группы, обладающие нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от четвертых степеней. В частности, нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6, у A_4-свободной разрешимой группы производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Построен пример такой группы, показывающий точность полученных оценок.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967.
3. Трофимук, А.А. Конечные разрешимые группы с порядками факторов нормального ряда, свободного от кубов / А.А. Трофимук, В.С. Монахов // Вестник Брестского университета. Серия 4. Физика и математика. – №1. – 2010. – С. 118–126.
4. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2011. – Т. 52, №5. – С. 1123–1137.

Материал поступил в редакцию 06.02.2018

ARTSIUSHENIA T.A., TROFIMUK A.A. Finite groups having a normal series in which the orders of factors are fourth power-free

A natural number n is called free of the fourth powers, if p^4 it does not divide n for all prime p. A group is called A_4-free if it does not contain sections isomorphic to the alternating group A_4. The structure of finite solvable groups in which orders of factors of the normal series are free of fourth degrees is studied. In particular, sharp estimates of the derived, nilpotent, and p-length for such groups are obtained. These estimates are refined for A_4-free groups.

УДК 512.542

Грицук Д.В., Трофимук А.А.

КОНЕЧНЫЕ π-РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ 2-МАКСИМАЛЬНЫХ π-ПОДГРУПП

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве P обозначается через π'. Группа называется π-группой, если все простые делители порядка группы принадлежат множеству π, и π'-группой – в противном случае.

Напомним, что группа G называется π-разрешимой, если она обладает нормальным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G, \qquad (1)$$

***Грицук Д.В.**, к. физ.-мат. н., доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина, e-mail: Alexander.trofimuk@gmail.com.*
Беларусь, БрГУ им. А.С. Пушкина, 224016, бульвар Космонавтов, 21.