

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Задания, методические указания, статистические таблицы

$$\sum (x_{j\cdot} - \bar{x}_{j\cdot})^2$$

Брест 2002

УДК 519.2.(076)

Данная работа может быть использована для составления контрольных работ на заочном факультете, а также аттестационных и контрольных работ для студентов дневной формы обучения тех специальностей, в программу которых включены вопросы математической статистики. Приводимые здесь решения типовых задач помогут при выполнении контрольных заданий.

Составители: Б. А. Годунов, доцент, к. ф.-м. н.
В. С. Рубанов, доцент, к. ф.-м. н.
Т. А. Тузик, доцент.

Рецензент: В.М. Мадорский, канд. физ.-мат. наук, зав. кафедрой информатики и прикладной математики Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина.

© Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет» 2002

1. Организационно-методические указания.

Одной из основных форм работы студента является самостоятельное изучение материала. После прослушивания лекций, приступая к изучению любой темы, следует ознакомиться с содержанием основных ее вопросов, указанных в программе, с решениями типовых задач, приведенными в этой работе, и, наконец, обратиться к рекомендуемой литературе. В конце даются основные статистические таблицы.

Для контроля над усвоением материала желательно ответить на вопросы для самопроверки. Если при этом возникают затруднения, то можно обратиться за консультацией на кафедру.

2. Вопросы для самопроверки.

Тема 1. Выборочный метод.

1. В чем заключаются основные задачи математической статистики?
2. Генеральная и выборочная совокупности. Объем совокупности.
3. Способы отбора выборочной совокупности.
4. Статистическое распределение. Что такое вариант, частота и частость?
5. Что такое интервальное распределение?
6. Эмпирическая функция распределения.
7. Полигон. Гистограмма. Кумулята.
8. Статистические оценки параметров распределения. Что такое несмещенность, эффективность и состоятельность оценки?
9. Выборочные средняя, дисперсия, среднеквадратическое отклонение. Что такое исправленная выборочная дисперсия? При каком условии она рассматривается?
10. Свойства выборочных средней и дисперсии. Назовите формулу вычисления дисперсии.
11. Что такое точность оценки и ее надежность (доверительная вероятность)?
12. Как найти доверительные интервалы для оценок параметров нормального распределения?
13. Что такое метод условных вариантов? Когда он применим? В чем его преимущества?
14. Эмпирические и выравнивающие частоты. Построение функции плотности по опытным данным.

Тема 2. Проверка статистических гипотез.

1. Что такое статистическая гипотеза? Нулевая и конкурирующая гипотезы.
2. Ошибки первого и второго рода.
3. Критическая область. Критические точки. Статистический критерий.
4. Что такое уровень значимости гипотезы и мощность критерия?
5. Как определить объем выборки?
6. Сравнение двух средних.
7. Проверка гипотезы о виде распределения. В чем заключается критерий Пирсона?

Тема 3. Элементы теории корреляции.

1. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
2. Что такое условные средние?
3. В чем заключаются две основные задачи теории корреляции?
4. Выборочное уравнение прямой линии регрессии. Нормальная система.
5. Расскажите об устройстве корреляционной таблицы.
6. Что такое выборочный коэффициент корреляции? Каковы его свойства и на что он указывает?
7. Уравнение прямой линии регрессии в случае сгруппированных данных.
8. Выборочное корреляционное отношение.
9. Понятие о нелинейной и множественной корреляции.

3. Контрольные задания.

Задание к задачам 1, 2, 3.

В результате статистических наблюдений некоторой совокупности относительно количественного признака X были получены выборочные данные.

Требуется:

Составить дискретный или интервальный ряд распределения частот и относительных частот случайной величины X и построить полигон или гистограмму частот.

Найти эмпирическую функцию распределения признака X и построить ее график.

Вычислить числовые оценки параметров распределения: выборочные среднюю, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

Выдвинуть гипотезу о виде распределения рассматриваемой случайной величины X . На основании пунктов 1 и 3 обосновать выбор вида распределения. Написать аналитическое выражение функции плотности для выбранного распределения, используя оценки, полученные в пункте 3, и найти теоретические (выравнивающие частоты) и теоретическую интегральную функцию распределения.

Приняв уровень значимости $\alpha = 0,05$ или $0,01$, по критерию согласия Пирсона подтвердить или отвергнуть выдвинутую гипотезу о виде распределения.

Для подтвердившегося нормального распределения найти вероятность попадания признака в интервал $(a - 5; a + 3)$.

Задание к задаче 4.

В результате группировки данных статистического наблюдения над признаками X и Y получена корреляционная таблица. С целью изучения линейной связи между этими признаками требуется:

1. найти их числовые показатели $\bar{x}_g, \bar{y}_g, \sigma_x, \sigma_y$;
2. выборочный коэффициент корреляции r_g и оценить его надежность с уровнем значимости $\alpha = 0,01$;
3. найти уравнения прямых регрессий Y на X и X на Y ;
4. найти эмпирические и теоретические значения условных средних и рассмотреть отклонения между ними;
5. изобразить в системе координат \bar{Y}_x и \bar{y}_x, \bar{X}_y и \bar{x}_y .

Вариант 1.

ЗАДАЧА 1.

2 4 2 4 3 3 3 2 0 6 1 2 3 2 2 4 3 3 5 1
 0 2 4 3 2 2 3 3 1 3 3 3 1 1 2 3 1 4 3 1
 7 4 3 4 2 3 2 3 3 1 4 3 1 4 5 3 4 2 4 5
 3 6 4 1 3 2 4 1 3 1 0 0 4 6 4 7 4 1 3

ЗАДАЧА 2.

65 71 67 73 68 68 72 68 67 70 78 74 79 65 72
 65 71 70 69 69 76 71 63 77 75 70 74 65 71 68
 74 69 69 66 71 69 73 74 80 69 73 76 69 69 67
 67 74 68 74 60 70 66 70 68 64 75 78 71 70 69
 73 75 74 72 80 72 69 69 71 70 73 65 66 67 69
 71 70 72 76 72 73 64 74 71 76 68 69 75 76 73
 74 78 66 75 72 69 68 63 70 70 78 76 73 73 67

ЗАДАЧА 3.

32	700	49	32	3	400	1630	1020
1110	332	543	921	417	35	35	2639
1799	0	524	1654	16	445	753	85
646	23	1235	2140	0	24	820	448
921	515	990	966	80	1610	1121	901
1560	439	800	749	41	163	3000	24
420	25	700	1199	7	2009	1295	950
67	511	630	241	25	1100	810	800
24	120	1110	700	7	1112	625	85
140	1020	48	68	432	25	1110	3
703	1111	120	24	84	3	0	125
412	551	440	18	1600	100	8	420

ЗАДАЧА 4.

$X \backslash y$	12	16	20	24	28	32
20	3	4				
30		2	6			
40			8	31	10	
50			2	14	6	
60				5	7	2

Вариант 2.

ЗАДАЧА 1.

0 4 2 0 5 1 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1
3 1 5 2 0 2 2 3 2 2 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4
5 5 3 2 2 0 2 1 1 3 2 3 5 3 5 2 5 2 1 1
2 3 4 3 2 3 2 4 2

ЗАДАЧА 2.

71 66 66 72 69 71 71 68 72 69 73 73 66 72 73
70 69 74 72 69 74 70 74 72 76 71 66 62 69 74
76 74 69 64 75 71 76 68 68 78 71 71 68 67 74
68 81 71 68 72 71 71 71 69 61 74 66 70 72 65
67 73 78 73 71 75 73 71 72 68 67 69 69 77 63
71 74 67 68 69 74 69 67 74 66 74 74 69 75 70
73 63 77 74 75

ЗАДАЧА 3.

809	0	75	0	119	901	800	128	1999	75
1410	2500	510	800	742	1400	500	0	180	900
1703	521	500	15	1803	803	27	902	1300	810
0	542	2510	241	26	1110	990	525	630	79
1240	76	412	24	149	3	1125	311	1599	511
1806	2100	2200	963	7	0	900	1700	25	1000
701	699	1899	84	23	25	140	1320	501	1370
240	0	1130	800	3500	123	910	1120	3200	1300
1800	1120	5	99	800	549	1971	440	24	1920
450	701	2300	400	1310	48				

ЗАДАЧА 4.

$X \backslash Y$	11	17	23	29	35	41
15	5	1				
25		6	2			
35			5	26	5	
45			7	12	10	
55				6	7	8

Вариант 3.

ЗАДАЧА 1.

3 7 4 6 1 4 2 4 6 5 3 2 9 0 5 6 7 7 3 1
 5 5 4 2 6 2 1 5 3 3 1 5 6 4 4 3 4 1 5 5
 3 4 3 7 4 5 6 7 5 2 4 6 6 7 7 3 5 4 4 3
 5 5 7 6 6 1

ЗАДАЧА 2.

135 133 124 132 104 152 134 130 129 120 122 124
 117 123 123 129 121 122 125 131 147 124 137 112
 126 128 111 129 115 147 131 132 137 119 125 120
 129 125 123 127 132 118 133 132 132 134 131 120
 135 132 125 132 108 114 121 133 133 135 131 125
 114 115 122 131 125 132 120 126 115 117 118 118
 132 134 127 127 124 135 128 127 115 144 129 120
 137 127 125 116 132 120 117 127 118 109 127 122

ЗАДАЧА 3.

74	630	1120	79	512	128	515	1320	209
0	511	3000	511	241	0	2700	1500	2600
1811	48	1600	809	25	910	560	700	24
699	1631	1140	75	1100	525	180	320	0
240	25	1901	900	810	810	731	511	510
800	754	2200	549	280	14	0	1310	1100
810	1655	412	750	25	1500	420	501	310
1100	630	250	965	930	1730	3200	963	5
25	2140	500	32	740	1729	17	1300	240
240	820	16	3600	800	1900	1300	0	241

ЗАДАЧА 4.

$X \backslash Y$	6	8	10	12	14	16
10				5	7	2
15			2	8	6	
20			8	21	10	
25	5	2	6			
30	3	5				

Вариант 4.

ЗАДАЧА 1.

4 6 0 2 1 3 3 1 2 5 3 1 2 2 4 4 4 3 2 5
 2 5 1 2 3 0 3 0 5 1 2 1 3 0 4 0 2 2 1 0
 5 1 4 2 4 2 1 3 1 0 6 1 2 1 4 2 2 0 2 4
 2 2 1 2 2

ЗАДАЧА 2.

120 135 116 118 133 136 125 126 119 126 129 127
 129 124 127 132 126 131 127 130 126 124 135 127
 124 123 123 130 132 143 122 139 120 134 108 132
 121 111 123 140 137 120 125 131 118 120 120 136
 129 127 116 138 128 133 122 131 128 140 138 134
 120 126 109 137 111 115 117 130 113 126 115 124
 125 118 115 128 123 129 128 120 115 134 118 135
 134

ЗАДАЧА 3.

1692 501 5847 1769 5261 1854 1584 6347 1981 1515
 290 499 6541 3611 1112 972 12801 749 8014 214
 604 4203 597 723 2250 788 817 2512 7171 3142
 248 4104 759 391 1478 444 497 1714 1347 252
 3019 1806 1158 1059 1467 1128 1024 6010 6351 3314
 4491 420 4027 853 2297 3961 2753 2318 2714 116
 518 179 1959 1400 226 4299 9955 523 181 7401
 54 1953 1498 3813 4404 4270 112 684 1 147
 7611 2480 5147 4168 1259 1149 2401 3001 2992 4975
 3057 2812 514 1259 3103 3216 2419 2647 4953 619

ЗАДАЧА 4.

$X \backslash Y$	5	7	9	11	13	15
8					5	3
12				7	4	
16			5	18	8	
20		7	12	9		
24	3	4				

Вариант 5.

ЗАДАЧА 1.

```

0 0 3 1 0 0 1 3 1 4 1 0 3 0 2 0 0 0 0 1
1 1 1 3 2 0 0 1 4 1 0 5 0 2 0 1 2 1 2 0
1 2 1 0 0 1 0 1 1 0 2 1 4 2 0 1 5 0 0 2
1 2 0 1 1 1 2 6 0 2 2 1 2 2 0 0 0 2 0 0
      0 1 0 4
    
```

ЗАДАЧА 2.

```

365 371 370 369 369 376 371 363 377 375 370 374 365 371 368
374 369 369 366 371 369 373 374 380 369 373 376 369 369 367
367 374 368 374 360 370 366 370 368 364 375 378 371 370 369
373 375 374 372 380 372 369 369 371 370 373 365 366 367 369
371 370 372 376 372 373 364 374 371 376 368 369 375 376 373
374 378 366 375 372 369 368 363 370 370 378 376 373 373 367
365 371 367 373 368 368 372 368 367 370 378 374 379 365 372
    
```

ЗАДАЧА 3.

```

1281    689    1942    1117    1823    1392    1064    522    1511    1099
2830    684    1169    3102    995     972    10561   875    6167    275
 789    3380    763     849    3671    891     898    1638   4712   2601
 398    8519    1781    527    1072    651     659    1096   1012   415
4017    1411    3269    984    1057    968     980    4632   1590   1354
5717    594     58     917    3395    2149    1764   1579   1700   3457
 714    211    1456    1025    350    3594    956     795    244   6727
 117    1438    4510    19     1546    2253    151     846     2    159
2456    1621    5301    2719    1001    6918    2899    3998   2394   3212
2511    1858     700    2756    4410    4351    2987    1657   2015   815
    
```

ЗАДАЧА 4.

$X \backslash Y$	15	25	35	45	55	65
14	2	4				
22		4	7			
30		3	30	16	4	
38			12	7	6	
46				2	2	1

Вариант 6.

ЗАДАЧА 1.

2 0 0 3 1 2 2 2 3 4 1 2 3 3 2 1 1 3 3 0
 4 1 3 3 0 1 0 0 1 2 1 1 3 2 3 0 1 0 4 2
 3 1 2 1 1 1 1 2 1 2 5 2 1 3 2 3 1 1 1 1
 2 1 1 1 3 1 3 1 2 1 2 1 1 0 0 3 3 1 2 3

ЗАДАЧА 2.

6,8 8,1 7,1 6,8 7,2 7,1 7,1 7,1 6,9 6,1 7,4 6,6 7,0 7,2 6,5
 6,7 7,3 7,8 7,3 7,1 7,5 7,3 7,1 7,2 6,8 6,7 6,9 6,9 7,7 6,3
 7,1 7,4 6,7 6,8 6,9 7,4 6,9 6,7 7,4 6,6 7,4 7,4 6,9 7,5 7,0
 7,1 6,6 6,6 7,2 6,9 7,1 7,1 6,8 7,2 6,9 7,3 7,3 6,6 7,2 7,3
 7,0 6,9 7,4 7,2 6,9 7,4 7,0 7,4 7,2 7,6 7,1 6,6 6,2 6,9 7,4
 7,6 7,4 6,9 6,4 7,5 7,1 7,6 6,8 6,8 7,8 7,1 7,1 6,8 6,7 7,4
 7,3 6,3 7,7 7,4 7,5

ЗАДАЧА 3.

915	349	1823	1114	1708	1210	817	283	1348	1072
2519	347	874	2791	597	561	8562	471	5531	247
411	2976	384	445	3371	481	494	1567	3891	2213
259	7213	1691	289	876	293	315	949	712	271
3511	1243	2913	590	793	613	578	3923	1017	1191
4793	289	114	497	3001	1900	1671	1397	1624	2891
376	228	1291	728	249	3115	517	379	234	1761
195	1273	3700	87	1395	1917	198	429	3	221
1941	1523	4620	2370	671	5790	2684	3492	1923	2864
1950	1764	371	2381	4417	3679	2703	1599	1849	423

ЗАДАЧА 4.

$X \backslash Y$	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	52,5
17	2	3				
19	3	4	4			
21		8	14	5		
23			10	5	3	2
25					5	2

Вариант 7.

ЗАДАЧА 1.

1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 1 1 2 0 1 6
 1 5 0 2 0 1 1 2 1 0 0 2 1 0 2 5 1 1 2 1 0
 1 2 3 0 0 0 3 0 3 1 1 0 2 3 2 2 1 0 2 1 1
 1 0 2 0 5 0 0 2 1 0 2 1 1 4 0 1 0 2 3 2 2
 2 1 0 1 0 1 3 1 1 2 1 2 1 0 1 1 3 3 1 2 1

ЗАДАЧА 2.

12,6 12,8 11,1 1,29 11,5 14,7 13,1 13,2 13,7 11,9 12,5 12,0
 12,9 12,5 12,3 12,7 13,2 11,8 13,3 13,2 13,2 13,4 13,1 12,0
 13,5 13,2 12,5 13,2 10,8 11,4 12,1 13,3 13,3 13,5 13,1 12,5
 11,4 11,5 12,2 13,1 12,5 13,2 12,0 12,6 11,5 11,7 11,8 11,8
 13,2 13,4 12,7 12,7 12,4 13,5 12,8 12,7 11,5 14,4 12,9 12,0
 13,7 12,7 12,5 11,6 13,2 12,0 11,7 12,7 11,8 10,9 12,7 12,2
 13,5 13,3 12,4 13,2 10,4 15,2 13,4 13,0 12,9 12,0 12,2 12,4
 11,7 12,3 12,3 12,9 12,1 12,2 12,5 13,1 14,7 12,4 13,7 11,2

ЗАДАЧА 3.

796 245 1294 931 1271 984 769 194 1031 916
 2019 231 781 2291 614 592 7123 394 4819 172
 328 2591 314 372 2799 419 429 1793 3313 1852
 129 5431 1267 183 793 161 214 814 673 136
 2951 1008 2459 567 763 638 519 3691 1162 972
 4578 146 24 451 2610 1309 1730 1134 1204 2374
 219 86 1028 715 143 2714 487 273 117 4115
 43 1013 3162 17 1059 1311 49 349 4 91
 1510 1171 3994 1891 671 5417 2134 2863 1457 2305
 1631 1572 258 1974 3820 3104 2210 1197 1306 336

ЗАДАЧА 4.

$X \backslash Y$	11	14	17	20	23	26
7					4	5
9			3	9	2	
11		8	15	4		
13	6	5	7			
15	3	6	3			

Вариант 8.

ЗАДАЧА 1.

1 1 2 0 1 1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3
 2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0
 1 1 2 1 0 1 1 3 3 1 2 3 0 0 0 3 0 3 1 1
 0 1 0 2 1 1 1 2 1 2 1 0 2 1 1 0 1 1 4 0
 0 5 0 0 2 1 2 1 0 2 3 2 0 2 3 2 2 0 2 1

ЗАДАЧА 2.

12,9 12,4 12,7 13,2 12,6 13,1 12,7 13,0 12,6 12,4 13,5 12,7
 12,4 12,3 12,3 13,0 13,2 14,3 12,2 13,9 12,0 13,4 10,8 13,2
 12,1 11,1 12,3 14,0 13,7 12,0 12,5 13,1 11,8 12,0 12,0 13,6
 12,9 12,7 11,6 13,8 12,8 13,3 12,2 13,1 12,8 14,0 13,8 13,4
 12,0 12,6 10,9 13,7 11,1 11,5 11,7 13,0 11,3 12,6 11,5 12,4
 12,5 11,8 11,5 12,8 12,3 12,9 12,8 12,0 11,5 13,4 11,8 13,5
 12,0 13,5 11,6 11,8 13,3 13,6 12,5 12,6 11,9 12,6 12,9 12,7
 13,4

ЗАДАЧА 3.

638	193	1494	812	1453	934	571	124	1024	741
1723	191	574	1805	471	434	6404	338	3910	67
274	2110	254	334	2459	361	373	1291	2997	1631
83	5381	1421	139	611	158	173	693	512	116
2617	948	1967	453	567	478	438	3012	1123	859
4226	151	24	390	2213	1561	1384	1061	1376	1934
239	19	973	531	91	2351	421	251	56	3812
73	951	2810	16	1059	1548	48	316	5	31
1431	1210	3517	1678	491	4214	1751	2491	1533	1871
1572	1468	214	1705	3310	2794	1792	1328	1507	291

ЗАДАЧА 4.

X \ Y	22	36	50	64	78	92
200	5	3	4			
250		7	8	1		
300			9	10	14	
350				12	8	2
400				5	1	7

Вариант 9.

ЗАДАЧА 1.

2 0 1 4 2 0 1 5 2 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0
 1 1 2 1 0 1 1 3 3 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1
 0 2 1 1 4 0 6 0 2 1 1 0 2 3 2 0 2 3 2 2
 2 1 3 0 1 0 3 3 1 1 2 0 1 1 0 3 1 1 2 1
 2 1 0 1 0 1 0 2 1 4 1 2 1 2 0 5 0 0 0 1

ЗАДАЧА 2.

8,5 9,1 8,7 9,3 8,8 8,8 9,2 8,8 8,7 9,0 9,8 9,4 9,9 8,5 9,2
 8,5 9,1 9,0 8,9 8,9 9,6 9,1 8,3 9,7 9,5 9,0 9,4 8,5 9,1 8,8
 9,4 8,9 8,9 8,6 9,1 8,9 9,3 9,4 9,9 8,9 9,3 9,6 8,9 8,9 8,7
 8,7 9,4 8,8 9,4 8,0 9,0 8,6 9,0 8,8 8,4 9,5 9,8 9,1 9,0 8,9
 9,3 9,5 9,4 9,2 9,9 9,2 8,9 8,9 9,1 9,0 7,3 8,5 8,6 8,7 8,9
 9,1 9,0 9,2 9,6 9,2 9,3 8,4 9,4 9,1 9,6 8,8 8,9 9,5 9,6 9,3
 9,4 9,8 8,6 9,5 9,2 8,9 8,8 8,3 9,0 9,0 9,8 9,6 9,3 9,3 8,7

ЗАДАЧА 3.

723	238	1304	814	1245	871	693	123	949	793
1733	215	697	1864	541	499	5845	435	4112	93
336	2153	334	399	2392	448	441	1064	2853	1624
57	4417	1213	159	714	171	193	739	673	114
2493	896	2096	539	679	568	517	3215	973	839
3993	167	49	474	2210	1359	1187	971	1151	2015
251	75	937	674	16	358	493	312	84	381
37	914	2690	51	957	1398	61	396	6	71
1469	1015	3519	1673	611	285	1892	2421	1432	1999
1591	1274	249	1681	3326	2671	1913	1093	1341	371

ЗАДАЧА 4.

$X \backslash Y$	16	20	24	28	32	36
18	2	1				
20	1	3	3			
24		3	5	7		
26			2	7	7	
28				1	5	1

Вариант 10.

ЗАДАЧА 1.

1 0 2 3 2 0 2 3 2 2 0 5 0 0 0 1 2 1 0 1
 1 1 2 0 1 5 0 3 1 6 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3
 2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 4 0
 0 1 0 2 1 1 1 2 1 2 1 3 3 1 0 2 1 1 4 0
 0 0 2 1 1 0 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1 1 1 2

ЗАДАЧА 2.

7,7 7,4 7,6 7,1 7,3 7,7 7,4 7,8 7,8 7,1 7,5 7,4 7,1
 7,9 7,7 7,4 7,9 7,5 7,9 7,7 8,1 7,6 7,1 6,7 7,3 8,6
 8,1 7,9 7,4 6,9 7,9 7,6 8,1 7,3 7,3 8,3 7,6 7,6 7,3
 7,6 7,3 7,7 7,6 7,6 7,6 7,3 6,6 7,9 7,1 7,5 8,0 7,5
 7,2 7,8 8,3 7,8 7,6 8,2 7,8 7,6 7,9 7,3 7,2 7,4 7,4
 7,6 7,9 7,2 7,3 7,4 7,9 7,3 7,2 7,9 7,1 7,9 7,9 7,4
 7,8 6,8 8,2 7,9 8,0 7,7 7,8 7,4 7,9 7,2 7,9 7,7 7,0
 8,2 6,8 7,6 7,1

ЗАДАЧА 3.

516	172	1267	602	1237	697	531	102	791	590
1391	153	574	1563	435	412	5366	349	3110	57
284	1856	247	362	1652	371	380	999	2412	1247
76	4456	1124	113	578	126	194	563	476	83
2156	719	1732	430	512	438	422	2557	947	624
2862	171	16	393	1931	1168	1079	852	1062	1567
215	41	768	481	72	1888	357	238	49	2712
24	735	2340	12	814	1181	29	315	7	34
1301	971	2501	1311	452	3815	1424	1694	1142	1581
1199	1259	186	1369	2367	2231	1497	1025	1294	293

Задача 4.

$X \backslash Y$	10	15	20	25	30	35
2	3	4				
5		10	9	3		
8			6	40	5	
11				4	8	3
14					2	3

Вариант 11.

ЗАДАЧА 1.

6 1 0 2 3 1 1 2 1 2 1 1 2 1 0 4 1 3 3 0
 2 1 1 4 0 0 0 2 1 1 0 2 3 2 0 2 3 2 2 2
 1 1 2 0 1 1 0 3 1 1 0 5 6 0 0 1 2 1 0 1
 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1 1 5 0 0 1 2 1 3 0
 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0 2 0 1 1 0 3 3 1 2 0

ЗАДАЧА 2.

1,26 1,28 1,11 1,29 1,15 1,47 1,31 1,32 1,37 1,19 1,25 1,20
 1,29 1,25 1,23 1,27 1,32 1,18 1,33 1,32 1,32 1,34 1,31 1,20
 1,35 1,32 1,25 1,32 1,08 1,14 1,21 1,33 1,33 1,35 1,31 1,25
 1,14 1,15 1,22 1,31 1,25 1,32 1,20 1,26 1,15 1,17 1,18 1,18
 1,32 1,34 1,27 1,27 1,24 1,35 1,28 1,27 1,15 1,44 1,29 1,20
 1,37 1,27 1,25 1,16 1,32 1,20 1,17 1,27 1,18 1,09 1,27 1,22
 1,35 1,33 1,24 1,32 1,04 1,52 1,34 1,30 1,29 1,20 1,22 1,24
 1,17 1,23 1,23 1,29 1,21 1,22 1,25 1,31 1,47 1,24 1,37 1,12

ЗАДАЧА 3.

523	96	1004	467	1137	653	463	67	752	498
936	89	429	1389	326	271	4967	195	3215	49
167	1682	129	194	1794	201	216	951	2251	1113
47	4017	1124	68	471	79	86	516	364	59
1889	674	1567	312	514	329	284	2413	910	319
2694	72	23	259	1678	748	1039	864	1024	1491
110	39	746	372	54	1723	247	123	46	2510
29	712	2110	17	813	851	31	179	8	35
849	937	2496	1251	371	3674	1314	1751	919	1405
1067	1251	98	840	2308	1930	1354	973	942	176

ЗАДАЧА 4.

$X \backslash Y$	10	13	16	19	22	25
20					4	3
22			9	10	8	
24		10	30	6		
26		6	7	3		
28	4	2	4			

Вариант 12.

ЗАДАЧА 1.

0 1 0 1 0 2 0 1 1 2 1 2 1 1 2 0 1 1 0 1 0
 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 0 5 0 0 0 1 2 1
 1 5 0 0 0 2 1 3 2 1 0 1 1 3 3 1 2 0 2 1 1
 3 1 1 2 1 0 2 0 2 3 2 2 0 0 0 2 1 1 0 0 0
 0 1 1 2 0 1 1 1 0 2 3 3 0 2 4 3

ЗАДАЧА 2.

136 134 125 133 105 153 135 131 130 121 123 125
 118 124 124 130 122 123 126 132 148 125 138 113
 127 129 112 130 116 148 132 133 138 120 126 121
 130 126 124 128 133 119 134 133 133 135 132 121
 136 133 126 133 109 115 122 134 134 136 132 126
 115 116 123 132 126 133 121 127 116 118 119 119
 133 135 128 128 125 136 129 128 116 145 130 121
 138 128 126 117 133 121 118 128 119 110 128 123

ЗАДАЧА 3.

419 192 1027 62 963 613 178 111 738 176
 1197 184 203 1287 297 221 4328 510 2603 85
 313 1467 254 471 1549 468 357 893 1839 1040
 95 3410 917 132 345 149 171 503 138 106
 1709 659 1418 347 64 56 104 1956 746 573
 2415 145 26 349 1524 1011 857 791 839 1391
 213 41 714 162 79 1547 413 248 46 2368
 29 671 1800 11 742 754 54 364 9 38
 846 816 2294 984 109 2912 1204 1678 792 1362
 1096 1042 164 1121 2110 1755 1256 864 998 426

ЗАДАЧА 4.

$X \backslash Y$	14	22	30	38	46	54
16	3	7	2			
24		2	12	6		
32		7	27	11		
40			10	6		
48				2	1	1
56					2	1

Вариант 13.

ЗАДАЧА 1.

1 2 1 2 1 3 4 1 0 3 3 0 5 5 0 0 1 2 1 0 7 0 0 0 2
 1 1 2 1 6 1 1 1 2 5 2 1 1 2 0 1 1 0 3 1 1 1 1 0 2
 2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 0 0 3 0 3 2 2 1 0 1
 1 0 1 0 2 1 0 2 3 2 0 2 3 0 2 1 1 4 1 2 1 3 3 1 1

ЗАДАЧА 2.

565 571 567 573 568 568 572 568 567 570 578 574 579
 565 571 570 569 569 576 571 563 577 575 570 574 565
 574 569 569 566 571 569 573 574 580 569 573 576 569
 567 574 568 574 560 570 566 570 568 564 575 578 571
 573 575 574 572 580 572 569 569 571 570 573 565 566
 571 570 572 576 572 573 564 574 571 576 568 569 575
 574 578 566 575 572 569 568 563 570 570 578 576 573
 565 572 571 568 569 567 570 569 567 569 576 573 573

ЗАДАЧА 3.

47	198	974	169	930	546	351	104	639	71
1267	143	51	1294	397	363	4009	123	2705	83
321	1491	138	108	1279	174	214	831	1954	864
48	3260	894	153	34	128	171	93	446	112
1723	597	1408	291	502	411	310	1968	762	267
2391	164	26	246	1437	666	860	741	857	1461
218	97	671	491	91	1396	357	53	82	2167
29	612	1891	17	648	657	34	207	10	46
591	799	2109	812	432	2964	1342	1234	724	1386
624	961	204	1210	2003	1769	1369	840	999	304

ЗАДАЧА 4.

$x \backslash y$	13	19	25	31	37	43
17	3					
23	7	2	6			
29		2	11	32		
35			10	12	2	
41					6	3
47						4

Вариант 14.

ЗАДАЧА 1.

2 1 1 1 2 1 2 2 0 5 1 2 7 1 5 0 0 0 2 1
 1 1 2 6 1 1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3
 1 0 2 0 1 1 3 3 1 2 1 6 0 0 3 0 3 1 1 0
 1 1 2 0 1 0 2 3 2 2 1 0 2 1 1 3 1 0 1 1
 0 0 2 1 1 0 2 3 2 0 4 0 5 0 0 0 1 2 1 0

ЗАДАЧА 2.

22 19 21 21 18 22 19 23 23 16 22 23 17 23 28
 24 22 19 24 20 24 22 26 21 16 12 19 24 23 21
 26 24 19 14 25 21 26 18 18 28 21 21 18 17 24
 18 31 21 18 22 21 21 21 19 11 24 16 20 22 15
 25 23 21 22 18 17 19 19 27 13 23 13 27 24 25
 21 24 17 18 19 24 19 17 24 16 24 24 19 25 20
 21 16 16 20 19

ЗАДАЧА 3.

764	127	615	71	346	810	127	61	831	791
1213	164	712	1401	127	311	3690	215	2310	81
168	1237	119	194	379	267	291	434	1721	1067
94	3109	899	77	724	112	154	749	612	38
34	823	1167	512	691	540	387	1756	953	467
2267	90	29	276	154	411	901	347	297	1260
241	82	897	634	65	1537	294	112	76	148
37	846	1678	26	157	679	64	160	11	91
1001	941	2058	1190	569	2616	1354	1591	992	1371
119	768	190	1108	1839	1609	1389	912	503	184

ЗАДАЧА 4.

$X \backslash y$	5	9	13	17	21	25
3						3
8				6	7	2
13		4	10	25		
18		8	7	4		
23		5	2			
28	3	1	1	2		

Вариант 15.

ЗАДАЧА 1.

1 1 4 3 1 4 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 0 1 0 1
 2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0
 1 1 2 1 0 1 1 3 3 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1
 0 2 1 1 4 0 0 6 2 1 1 0 2 3 2 0 2 3 2 2
 0 2 1 1 2 0 1 2 1 1 1 1 2 0 2 0 5 0 0 1

ЗАДАЧА 2.

10,4 15,2 13,4 13,0 12,9 12,0 12,2 12,4 11,8 10,9 12,7 12,2
 12,1 12,2 12,5 13,1 14,7 12,4 13,7 11,2 13,2 13,4 12,7 12,7
 12,9 11,5 14,7 13,1 13,2 13,7 11,9 12,5 12,0 11,4 11,5 12,2
 13,2 11,8 13,3 13,2 13,2 13,4 13,1 12,0 13,5 13,2 12,5 13,2
 10,8 11,4 12,1 13,3 13,3 13,5 13,1 12,5 12,9 12,5 12,3 12,7
 13,1 12,5 13,2 12,0 12,6 11,5 11,7 11,8 11,8 12,6 12,8 11,1
 12,4 13,5 12,8 12,7 11,5 14,4 12,9 12,0 11,7 12,3 12,3 12,9
 13,7 12,7 12,5 11,6 13,2 12,0 11,7 12,7 13,5 13,3 12,4 13,2

ЗАДАЧА 3.

216	148	751	123	738	472	414	92	515	118
1254	139	351	1091	334	287	3371	216	2317	53
176	1294	173	204	901	221	238	611	1621	971
26	915	711	104	244	119	137	156	387	58
1484	486	1213	312	423	361	289	1882	564	39
2104	125	37	244	1304	789	675	547	664	829
169	76	497	400	21	1256	256	162	54	1936
1391	494	1597	64	523	812	68	198	12	71
923	589	826	1029	359	2540	1168	1427	823	1176
950	744	157	512	1734	1508	843	631	760	186

ЗАДАЧА 4.

X \ y	16	18	20	22	24	26
6					1	2
8			4	3	5	
10			3	7	2	
12		2	6	8		
14		10	15			
16	4	3	5			

Вариант 16.

ЗАДАЧА 1.

1 2 1 5 1 0 1 0 2 1 1 1 2 1 2 0 2 3 2 2 0 2 1 1 4
 1 1 2 0 1 1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 3 0 3 1 1
 2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 7 2 1 0 2 1 1 2 1 0 0 5 0 0 0
 1 1 2 1 0 1 6 3 3 1 2 1 0 0 0 0 0 6 2 1 1 0 2 3 2

ЗАДАЧА 2.

752 734 730 729 720 722 724 737 727 725 716 732
 723 729 721 722 725 731 747 724 737 712 732 734
 726 728 711 729 715 747 731 732 737 719 725 720
 729 725 723 727 732 718 733 732 732 734 731 720
 735 732 725 732 708 714 721 733 733 735 131 725
 714 715 722 731 725 732 720 726 715 717 718 718
 727 727 724 735 728 727 715 744 729 720 717 723
 720 717 727 718 709 727 722 735 733 724 732 704

ЗАДАЧА 3.

345	94	720	399	656	456	289	61	513	386
891	89	293	1027	199	189	3132	149	2153	41
129	1156	122	144	1201	157	169	578	1392	801
57	2676	649	68	312	72	87	371	229	59
1304	471	1124	196	271	214	191	1414	549	429
1846	69	19	172	1189	761	637	531	612	1068
103	32	493	237	44	1191	174	112	39	1721
25	481	1361	15	526	767	29	140	13	31
786	567	1690	844	216	2240	950	1296	783	1056
791	691	96	846	1556	1352	991	582	747	131

ЗАДАЧА 4.

$x \backslash y$	17	22	27	32	37	42
17	1	2				
19	1	2	4			
21		4	4	8		
23			2	10	7	
25				3	7	2
27					2	1

Вариант 17.

ЗАДАЧА 1.

6 0 1 2 1 0 1 6 1 0 2 1 1 1 2 1 2 0 2 1 1 4 0 2 0
 1 1 2 0 1 1 0 3 5 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 0 5 0 2 3
 2 0 1 1 4 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0 3 2 2 1 0
 1 1 2 1 0 1 1 3 3 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1 0 0 2 1 2

ЗАДАЧА 2.

68 68 72 68 67 70 78 74 79 65 72 65 71 67 73
 76 71 63 77 75 70 74 65 71 68 65 71 72 69 69
 66 71 69 73 74 80 69 73 76 69 69 67 74 69 69
 70 68 64 75 78 74 70 69 67 74 68 74 60 70 66
 74 72 80 72 69 69 71 70 73 65 66 67 69 73 75
 64 74 71 76 68 69 75 76 73 73 72 72 76 72 73
 75 72 69 67 63 70 70 78 76 73 73 67 74 78 66

ЗАДАЧА 3.

406	816	612	1096	286	1070	219	113	293	695
626	804	145	1463	574	131	2893	127	738	45
271	179	127	681	641	960	971	2098	99	167
54	2356	158	267	291	529	678	582	1038	103
1612	81	239	402	63	694	284	254	701	1082
657	335	25	59	324	1291	226	590	86	98
57	39	149	1041	49	512	214	201	42	523
26	228	1791	19	428	1324	31	561	14	38
92	1101	326	311	1025	2017	709	723	1386	1589
237	471	905	492	190	1639	1451	1237	705	341

ЗАДАЧА 4.

$x \backslash y$	16,5	21,5	26,5	31,5	36,5	41,5
17,5	2	2				
19,5	3	4				
21,5		13	6	4		
23,5			9	21	10	2
25,5				19	20	1
27,5						4

Вариант 18.

ЗАДАЧА 1.

0 5 0 0 5 1 2 1 6 1 0 1 0 2 1 1 1 2 1 2 1 1 2 0 1 1 0
 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 2 0 1 1 2 0 1 5 0 1 1 2 1 0
 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0 0 2 5 1 4 6 0 0 2 1 1 0 2 3 2 0
 1 1 3 3 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1 2 3 2 2

ЗАДАЧА 2.

966 972 969 971 971 968 972 969 973 973 966 972 973 971
 974 972 969 974 970 974 972 976 971 966 962 969 974 973
 969 964 975 971 976 968 968 978 971 971 968 967 974 963
 971 968 972 971 971 971 969 961 974 966 970 972 965 977
 967 973 978 973 971 975 973 971 972 968 967 969 969 970
 974 967 968 969 974 969 967 974 966 974 974 969 975 981
 963 977 974 975 971 966 970 969 976 974 968

ЗАДАЧА 3.

344	154	580	358	594	402	336	60	470	353
815	96	340	908	291	262	2814	193	1687	49
141	958	138	184	299	213	226	521	1367	701
56	2240	561	63	342	79	84	351	304	58
1262	423	946	279	321	296	270	1052	492	381
1599	75	21	249	971	627	557	473	548	941
121	38	446	311	52	978	251	113	45	1941
28	441	1304	19	472	651	31	173	15	32
666	504	1536	761	297	1899	869	1215	634	923
684	573	114	794	1414	1295	903	534	601	162

ЗАДАЧА 4.

$X \backslash y$	120	140	160	180	200	220
150	1	6	4			
160			4	7	5	
170			16	15	6	
180				18	8	4
190				5	5	6
200					2	3

Вариант 19.

ЗАДАЧА 1.

0 1 2 1 0 2 0 1 0 2 1 1 1 2 1 2 0 2 1 1 4 0 0 4 2 3 2 0
 1 1 2 0 1 1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 5 0 3 0
 2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0 2 3 2 2
 1 1 2 1 0 1 1 3 3 1 2 1 6 0 0 3 0 3 1 1 2 1 1 0

ЗАДАЧА 2.

12,4 13,2 10,4 15,2 13,4 13,0 12,9 12,0 12,2 12,4 13,5 13,3
 12,3 12,9 12,1 12,2 12,5 13,1 14,7 12,4 13,7 11,2 11,7 12,3
 11,1 12,9 11,5 14,7 13,1 13,2 13,7 11,9 12,5 12,0 12,6 12,8
 13,2 13,2 13,4 13,1 12,0 12,9 12,5 12,3 12,7 13,2 11,8 13,3
 10,8 11,4 12,1 13,3 13,3 13,5 13,1 12,5 13,5 13,2 12,5 13,2
 11,4 11,5 12,2 13,1 12,5 13,2 12,0 12,6 11,5 11,7 11,8 11,8
 12,4 13,5 12,8 12,7 11,5 14,4 12,9 12,0 13,2 13,4 12,7 12,7
 13,7 12,7 12,5 11,6 13,2 12,0 11,7 12,7 11,8 10,9 12,7 12,2

ЗАДАЧА 3.

564 85 705 603 341 635 252 53 336 591
 803 81 186 916 451 182 2655 399 1549 41
 284 226 179 381 1069 405 421 437 131 215
 49 1910 204 57 325 67 69 579 505 52
 1108 105 168 429 95 473 312 174 462 624
 1526 61 21 293 998 728 159 641 309 126
 2094 35 197 531 47 1057 142 138 36 1267
 23 154 1194 17 638 741 28 374 16 31
 114 534 1249 787 489 1797 824 1094 762 947
 162 657 87 794 241 1453 891 411 719 362

ЗАДАЧА 4.

$x \backslash y$	130	150	170	190	210	230
85	3	4	2			
95		5	7	5		
105			8	14	6	
115				6	8	9
125				5	6	3
135					5	4

Вариант 20.

ЗАДАЧА 1.

6 5 0 1 5 1 0 2 1 1 4 2 1 2 1 1 4 0 0 0 2 1 1 1 1 2
 0 1 1 0 3 1 1 2 1 2 1 3 0 1 0 3 3 1 1 2 1 0 1 1 3 3
 2 0 1 1 2 0 1 5 0 0 0 2 1 0 2 1 1 2 1 0 0 0 0 1 2 1
 1 2 1 0 0 0 3 0 3 1 1 0 2 0 2 7 2 0 2 3 2 2

ЗАДАЧА 2.

424 404 434 430 429 420 422 424 437 427 425 416
 421 422 425 431 447 424 437 412 432 434 427 427
 426 428 411 429 415 447 431 432 437 419 425 420
 423 427 432 418 433 432 432 434 431 420 429 425
 435 432 425 432 408 414 421 433 433 435 431 425
 414 415 422 431 425 432 420 426 415 417 418 418
 424 435 428 427 415 444 429 420 417 423 423 429
 432 420 417 427 418 409 427 422 435 433

ЗАДАЧА 3.

1528	264	1201	637	1351	104	528	223	1399	1094
691	259	887	346	989	791	2416	616	138	72
572	438	563	604	399	273	85	315	168	723
209	129	735	224	1459	241	256	1657	289	211
372	186	441	911	193	1001	804	160	1123	461
147	238	31	197	424	666	491	1803	184	169
207	63	759	94	74	405	540	557	69	149
34	512	125	29	2110	341	47	590	17	51
175	641	151	718	623	131	679	384	114	119
456	1250	81	707	156	359	674	109	1167	589

ЗАДАЧА 4.

$X \backslash y$	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0
115				4	3	2
120				8	7	
125			8	7	4	
130			7	15	3	
135		2	9	8		
140	1	4	6			

Вариант 21.

ЗАДАЧА 1.

5 1 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 2 3 4 3 2 3 2 4
2 0 2 2 3 2 2 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 2 3 1 5 0 1 1
5 5 3 2 2 0 2 1 1 3 2 3 5 3 5 2 5 2 1 1 0 4 2 0

ЗАДАЧА 2.

75 79 67 75 72 69 68 63 70 70 78 76 74 73 68
69 69 73 68 67 70 78 74 79 65 72 65 72 71 69
69 77 72 63 77 75 70 74 65 71 68 66 72 67 74
74 69 69 66 71 69 73 74 80 69 73 76 69 69 67
68 75 69 74 60 70 66 70 68 64 75 78 72 70 69
74 76 75 72 80 72 69 69 71 70 73 66 67 67 69
72 71 73 76 72 73 64 74 71 76 68 69 76 76 73

ЗАДАЧА 3.

1467	131	1100	605	1203	93	473	60	1281	981
656	123	811	347	923	826	2257	517	191	67
511	421	504	546	389	144	76	326	223	784
46	184	799	75	1354	101	112	1491	302	59
369	264	424	896	272	947	871	219	1005	312
196	89	35	19	405	639	459	1728	241	256
32	53	805	84	69	399	481	493	58	203
38	467	172	29	156	338	41	529	18	42
238	623	205	714	599	189	698	371	157	163
448	1156	72	772	211	353	671	105	1067	523

ЗАДАЧА 4.

$x \backslash y$	300	500	700	900	1000	1100
8	1	2	5			
12		2	7	4		
16		9	6	4		
20			14	6	7	
24				1	8	9
28				4	5	6

Вариант 22.

ЗАДАЧА 1.

1 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 3 1 5 2 0 5 5 3 0 2
 2 2 3 2 0 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 2 1 4 3 2 3 2 4 2 0
 2 1 1 3 1 3 5 3 5 2 5 2 1 1 0 4 2 0 5

ЗАДАЧА 2.

711 662 663 724 695 716 717 688 729 690 731 732 663 724 735
 706 697 748 729 690 749 700 748 729 767 716 665 624 693 742
 761 742 693 644 755 716 767 688 689 780 715 716 687 678 748
 689 810 715 684 724 713 712 711 696 617 748 669 700 721 652
 673 734 785 736 717 758 739 710 727 686 675 694 693 772 631
 714 745 676 687 697 748 695 675 749 668 743 745 696 757 709
 731 632 773 744 755

ЗАДАЧА 3.

285	57	511	307	494	323	215	75	423	299
604	59	219	559	171	193	2098	124	1104	46
104	744	102	118	881	129	137	349	1699	684
93	999	489	72	238	67	62	294	145	84
901	454	735	176	204	167	182	1478	384	311
1167	69	27	198	841	520	483	393	478	723
95	26	435	138	51	856	195	99	41	1239
29	449	936	23	407	528	31	117	19	34
701	357	1336	651	159	1072	594	893	545	549
699	505	52	627	1543	917	571	326	531	109

ЗАДАЧА 4.

$X \backslash y$	210	310	410	510	610	710
3					7	2
8				7	8	
13			15	5	9	
18		6	6	7		
23		5	9	2		
28	2	4	6			

Вариант 23.

ЗАДАЧА 1.

2 1 1 0 4 2 0 5 1 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 1 1 2
 3 1 5 2 0 2 2 3 2 2 0 6 2 1 3 1 3 1 5 4 5 5 3 2
 2 0 2 1 1 3 2 3 5 3 5 2 1 3 4 3 2 3 2 4 2 6

ЗАДАЧА 2.

0,35 0,33 0,24 0,32 0,04 0,52 0,34 0,30 0,29 0,20 0,18
 0,17 0,23 0,23 0,29 0,21 0,22 0,25 0,31 0,47 0,24 0,31
 0,26 0,28 0,11 0,29 0,15 0,47 0,31 0,32 0,37 0,19 0,20
 0,29 0,25 0,23 0,27 0,32 0,18 0,33 0,32 0,32 0,34 0,25
 0,35 0,32 0,25 0,32 0,08 0,14 0,21 0,33 0,33 0,35 0,22
 0,14 0,15 0,22 0,31 0,25 0,32 0,20 0,26 0,15 0,17 0,18
 0,32 0,34 0,27 0,27 0,24 0,35 0,28 0,27 0,15 0,44 0,29
 0,37 0,27 0,25 0,16 0,32 0,20 0,17 0,27 0,18 0,09 0,27
 0,22 0,24 0,37 0,12 0,25 0,20 0,31 0,22

ЗАДАЧА 3.

284	68	311	339	502	361	231	85	438	321
899	61	242	608	172	196	2019	129	815	51
115	956	101	126	864	131	138	379	140	805
93	621	514	80	248	74	73	296	149	89
671	472	1203	179	229	167	189	1150	399	347
1039	79	29	216	723	359	493	415	489	1605
96	46	444	146	55	699	204	99	49	704
34	466	597	27	426	506	35	124	20	44
1320	390	711	731	159	639	790	1111	538	544
1351	365	57	666	984	618	777	374	400	112

ЗАДАЧА 4.

$x \backslash y$	35	40	45	50	55	60
6	3	2	3			
12		1	4	5		
18			7	18	6	
24				9	6	3
30				3	8	4
36					2	1

Вариант 24.

ЗАДАЧА 1.

4 2 0 5 1 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 5 5
 3 1 5 2 0 2 2 3 1 2 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 0
 3 2 2 0 2 1 1 0 2 3 5 3 5 2 5 2 1 1 1 3 2
 4 3 2 3 2 4

ЗАДАЧА 2.

12,9 12,0 12,2 12,4 13,6 13,3 12,4 13,2 10,4 15,2 13,4 13,0
 12,1 12,2 12,5 13,1 14,7 12,4 13,7 11,2 11,7 12,3 12,3 12,9
 11,1 12,9 11,5 14,7 13,1 13,2 13,7 11,9 12,5 12,0 12,6 12,8
 12,9 12,5 12,3 12,7 13,2 11,8 13,3 13,2 13,2 13,4 13,1 12,0
 13,3 13,5 13,1 12,5 13,5 13,2 12,5 13,2 10,7 11,4 12,1 13,3
 11,4 11,5 12,2 13,1 12,5 13,2 12,0 12,6 11,5 11,7 11,8 11,9
 13,4 12,7 12,7 12,4 13,5 12,8 12,7 11,5 14,4 12,9 12,0 13,2
 12,5 11,6 13,2 12,0 11,7 12,7 11,8 10,9 12,7 12,2 13,7 12,7

ЗАДАЧА 3.

1682	511	5847	1769	5261	1844	1584	6347	1981	1515
290	499	6541	3611	1112	972	12801	749	8014	214
614	4203	597	723	2250	788	817	2512	7171	3142
248	4104	759	391	1478	444	497	1714	1347	252
3019	1806	1158	1069	1467	1128	1024	6010	6351	3314
4491	420	4027	853	2297	3961	2753	2318	2714	116
518	179	1959	1440	226	4299	9955	523	181	7401
54	1953	1488	3813	4404	4270	122	684	21	147
7611	2480	5247	4168	1259	1149	2401	3001	2992	4975
3057	2812	514	1259	3103	3216	2419	2647	4953	629

ЗАДАЧА 4.

$X \backslash y$	16,5	21,5	26,5	31,5	36,5	41,5
17	1	2				
19		2	3	6		
21			4	8	2	
23				8	8	7
25				3	8	2
27					3	1

Вариант 25.

ЗАДАЧА 1.

6 0 5 1 1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 0 4 2 3
 4 2 3 2 2 0 6 2 1 3 1 3 1 5 4 1 1 5 2 0 4 3
 5 3 2 2 0 2 1 1 3 2 3 5 1 5 2 5 2 1 1 5 2 3
 2 4 2

ЗАДАЧА 2.

731 682 683 725 684 677 706 788 741 798 654 727 625 710 675
 651 716 703 698 691 768 718 631 775 757 709 743 651 712 688
 691 662 713 694 739 748 807 696 735 764 694 694 678 744 695
 676 747 681 745 604 707 669 708 683 643 755 787 711 701 697
 699 698 710 700 731 658 666 676 695 738 753 741 722 804 727
 717 702 726 764 723 738 647 747 717 765 685 691 750 760 730
 755 725 694 689 632 703 704 787 769 733 733 674 744 789 669

ЗАДАЧА 3.

1381 679 1932 1117 1823 1392 1164 522 1511 1099
 2830 684 1169 3102 995 972 10561 875 6167 275
 799 3380 763 849 3671 891 898 1638 4712 2601
 398 8519 1781 527 1072 651 659 1096 1012 415
 4027 1411 3269 984 1037 968 980 4632 1590 1354
 5717 594 58 907 3395 2149 1764 1579 1700 3457
 714 211 1456 1025 350 3594 956 795 244 6727
 117 1438 4510 19 1546 2253 151 846 22 159
 2456 1621 5301 2719 1001 6918 2889 3998 2394 3212
 2511 1858 700 2756 4410 4351 2987 1657 2015 805

ЗАДАЧА 4.

$X \backslash y$	7	9	11	13	15	17
15					3	2
18			2	6	4	
21		1	9	13		
24		3	2	1		
27	2	2				

Вариант 26.

ЗАДАЧА 1.

2 4 2 0 4 2 0 5 1 1 3 0 0 2 4 3 2 1 3 0 4 5 1 2 3
 3 1 5 2 0 0 2 3 2 1 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 2 3 4 3 5
 5 3 2 6 0 2 1 1 3 2 3 5 3 5 2 5 1 1 1

ЗАДАЧА 1.

672 668 671 671 668 672 669 673 673 666 672 673 673 663 677
 669 674 670 674 672 676 671 666 662 669 674 674 669 675 670
 676 674 669 664 675 672 676 668 668 678 671 671 668 667 674
 671 668 672 671 671 671 669 661 674 665 670 672 665 674 675
 667 673 678 673 671 675 673 671 672 668 667 669 669 677 663
 671 674 667 668 664 674 669 667 674 666 674 668 681 674 672
 671 666 666 670 669

ЗАДАЧА 3.

935	449	1813	1114	1708	1210	817	283	1348	1072
1519	347	874	2791	597	561	8562	471	5531	247
411	2966	384	455	3371	481	494	1567	3891	2213
259	7213	1691	289	876	293	315	949	712	271
3511	1243	2913	590	793	613	578	3923	1017	1191
4793	289	114	497	3001	1900	1671	1397	1624	2891
376	228	1291	728	249	3115	517	379	234	1751
185	1273	3710	87	1395	1917	198	429	23	221
1941	1523	4620	2370	671	5780	2684	3492	1923	2864
1950	1764	371	2371	4417	3679	2703	1599	1849	413

ЗАДАЧА 4.

$x \backslash y$	12	15	16	21	24	27
2	2	3				
5		10	9	3		
8		6	35	5	1	
11			4	8	3	
14				1	2	4

Вариант 27.

ЗАДАЧА 1.

1 3 0 2 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 5 5 3 2 2 0 2 3 2 4 2 1
 3 1 5 2 0 2 2 1 2 1 0 6 2 1 3 1 3 1 5 4 0 4 2 0 5 1
 1 3 2 3 5 3 5 2 5 2 1 1 2 3 4 3 1

ЗАДАЧА 2.

1241 1323 1045 1527 1349 1302 1294 1206 1318 1220 1245
 1178 1231 1234 1296 1213 1224 1257 1317 1472 1249 1221
 1260 1280 1111 1296 1153 1478 1319 1324 1373 1198 1257
 1297 1257 1235 1271 1320 1185 1336 1328 1328 1344 1200
 1351 1323 1253 1325 1087 1149 1219 1331 1337 1357 1185
 1140 1150 1222 1311 1255 1322 1200 1266 1155 1177 1188
 1325 1341 1270 1277 1249 1353 1285 1270 1157 1449 1291
 1371 1278 1256 1164 1323 1200 1174 1278 1187 1097 1274
 1372 1120 1251 1201 1318 1206 1357 1333

ЗАДАЧА 3.

797	246	1295	931	1271	984	769	194	1032	917
2018	232	782	2291	614	592	7123	394	4818	173
329	2592	315	372	2799	419	429	1793	3314	1854
128	5432	1268	183	793	161	214	814	674	137
2952	1007	2458	567	763	638	519	3691	1163	973
4578	145	25	451	2610	1309	1730	1134	1204	238
219	87	1028	715	143	2714	487	273	117	4114
43	1023	3163	17	1059	1311	49	349	24	92
1510	1171	3995	1891	671	5417	2134	2863	1457	2305
1631	1572	259	1974	3820	3104	2210	1197	1306	336

ЗАДАЧА 4.

$x \backslash y$	25	50	75	100	125	150
34	5	4	3	1		
46		6	9	5		
58			12	8	4	
70				4	5	4
82					4	6

Вариант 28.

ЗАДАЧА 1.

0 2 0 5 1 2 6 4 3 2 3 3 0 4 5 1 4 1 3 0 3 1 5 0 0
 2 2 1 2 2 1 6 2 1 3 1 3 1 5 4 5 5 3 2 2 2 4 2 1 1
 0 2 1 1 3 2 3 5 3 5 2 5 1 2 3 4 3 2 3 1 7 6

ЗАДАЧА 2.

10 42 34 30 29 20 22 24 35 33 24 32
 29 21 22 25 31 47 24 37 12 17 23 23
 11 29 15 47 31 32 37 19 25 20 29 25
 23 27 32 18 33 32 32 34 31 20 26 28
 35 32 25 32 8 14 21 33 33 35 31 25
 31 25 32 20 26 15 17 18 18 37 27 22
 32 34 27 27 24 35 28 27 15 44 29 20
 25 16 32 20 17 27 38 9 27 22 14 15

ЗАДАЧА 3.

639	194	1495	813	1453	934	571	124	1024	742
1724	192	5745	1804	471	434	6404	338	3910	68
275	2111	256	335	2459	361	373	1291	2997	1631
83	5382	1422	138	611	158	173	693	512	116
2618	948	1967	454	567	478	438	3012	1123	859
4227	151	24	390	2213	1561	1384	1061	1376	1934
239	19	973	531	91	2351	421	251	56	3812
73	951	2810	16	1059	1548	48	316	25	31
1431	1210	3518	1678	491	4214	1751	2491	1533	1871
1573	1469	215	1704	3310	2794	1792	1328	1507	291

ЗАДАЧА 4.

$X \backslash y$	20	26	32	38	44	50
4	6	4	3			
9		8	7	2		
14			13	8	9	
19			6	5	7	
24				6	2	4

Вариант 29.

ЗАДАЧА 1.

0 2 2 4 3 0 3 3 0 4 5 1 3 1 6 2 0 2 1 3 1 2 3 2 4
 2 2 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 0 4 2 0 5 1 1 3 2 3 4 2 6
 5 5 3 2 2 0 2 1 1 3 2 0 5 3 5 2 5 2 1 1 4 7

ЗАДАЧА 2.

651 716 671 732 688 681 724 685 677 700 788 743 794 650 724
 654 712 700 695 692 768 719 639 772 754 704 745 653 719 684
 743 693 695 667 719 691 735 744 803 690 730 767 698 691 674
 671 745 689 748 604 702 666 707 683 640 750 787 715 703 698
 736 752 744 721 809 720 691 698 716 709 732 654 667 675 693
 712 706 727 768 724 733 641 749 715 760 682 690 750 769 731
 740 780 667 756 724 692 685 637 708 703 785 764 736 737 679

ЗАДАЧА 3.

724	239	1304	815	1245	871	693	123	949	794
1734	216	697	1864	541	499	5845	435	4112	94
337	2154	334	399	2392	448	441	1064	2853	1625
57	4416	1213	159	714	171	193	739	673	115
2493	897	2096	539	679	568	517	3215	973	839
3993	168	49	474	2210	1359	1187	971	1151	2014
251	76	937	674	16	358	493	312	84	381
37	914	2690	51	958	1398	62	396	26	72
1468	1015	3519	1673	611	285	1892	2421	1432	1999
1592	1275	249	1681	3326	2671	1913	1093	1341	373

ЗАДАЧА 4.

x \ y	18	21	24	27	30	33
25	4	3	6			
30		7	4	8		
35		15	19	7		
40			8	5	6	
45				4	3	1

Вариант 30.

ЗАДАЧА 1.

0 4 2 0 5 1 1 3 0 2 1 2 4 3 2 3 3 0 4 5 1 1
 3 1 5 2 0 2 2 3 2 2 1 2 6 2 1 3 1 3 1 5 4 0
 5 5 3 2 2 0 2 1 1 3 2 3 0 0 5 3 5 2 5 2 1 1
 2 3 4 3 2 3 2 4 2 6 7 1 0

ЗАДАЧА 2.

79 74 74 88 77 79 79 76 86 77 81 81 74 80 81
 78 77 82 80 77 82 78 82 80 84 79 74 70 77 82
 84 82 77 72 83 78 84 76 76 86 79 79 76 75 84
 76 89 79 76 80 79 79 79 77 69 84 74 78 80 73
 73 81 86 81 79 83 81 79 80 76 75 77 77 85 71
 79 84 75 76 77 82 77 75 82 74 82 82 77 83 78
 81 71 85 82 83 76 87 76

ЗАДАЧА 3.

518	171	1267	602	1237	697	531	102	791	591
1395	151	574	1563	435	412	5366	349	3110	57
283	1857	247	362	1652	371	380	999	2412	1247
77	4455	1124	113	578	126	194	563	476	83
2156	719	1732	430	513	437	422	2556	947	624
2862	171	18	394	1932	1169	1079	852	1062	1567
215	41	769	45	74	1887	358	238	49	2712
24	735	2341	12	814	1181	29	315	27	35
1301	971	2502	1311	452	3815	1424	1694	1142	1581
1198	1258	186	1369	2367	2231	1497	1025	1294	293

ЗАДАЧА 4.

$X \backslash y$	14	19	24	29	34	39
4	3	3	4	6		
7		5	8	9		
10		2	13	7	6	
13			1	9	2	4
16					3	5

4. Методические указания к решению контрольных заданий.

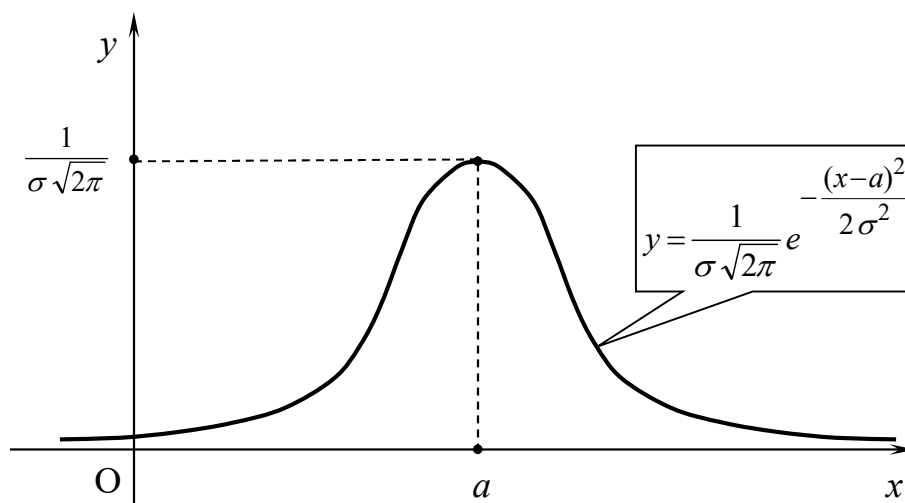
Каждый блок заданий состоит из 30 однотипных задач. Поэтому мы надеемся, что примеры решений аналогичных задач, которые приведены здесь, помогут вам справиться с работой, а заодно глубже понять темы этого раздела высшей математики.

Прежде всего, напомним некоторые виды распределения случайной величины (СВ) X , рассматриваемые в теории вероятностей.

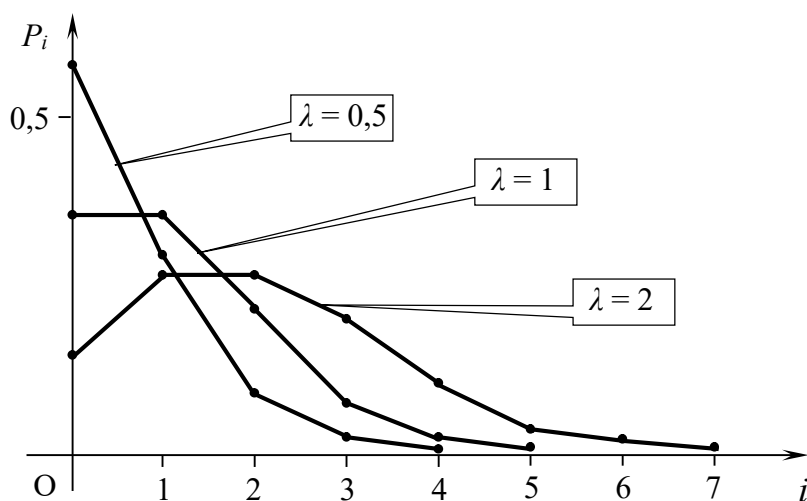
1. *Нормальное распределение* задается функцией плотности вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

график которой имеет вид



Здесь a – математическое ожидание, σ – среднеквадратическое отклонение, σ^2 – дисперсия СВ X . Одним из характерных свойств нормально распределенной величины является "правило 3-х σ ", согласно которому практически все значения ее (99,73 %) попадают в интервал $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$ длиной 6σ .



2. *Распределение Пуассона* рассматривается для дискретных СВ и задает вероятность того, что X примет значение i , формулой

$$P_i = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}.$$

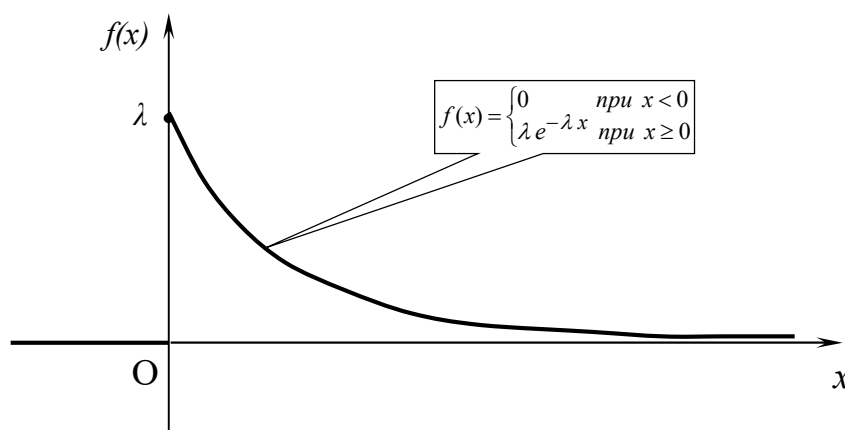
Отличительной особенностью этого распределения является равенство

математического ожидания и дисперсии: $M(X) = \sigma_X^2 = \lambda$. На чертеже приводятся многоугольники этого распределения при некоторых λ .

3. *Показательное распределение* непрерывной неотрицательной СВ задается функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

и отличается тем, что у него совпадают математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение $M(X) = \sigma_X = \frac{1}{\lambda}$. Ниже приведен график.



Выдвигая гипотезу о виде распределения случайного признака, на первом шаге исходят из "похожести" формы гистограммы или полигона на одну из теоретических кривых.^(*)

ЗАДАЧА 1.

Имеем выборочные данные:

0	5	0	0	0	1	2	1	0	1	0	1	0	2	1	1	1	2	1
1	1	2	0	1	1	0	3	1	1	2	1	2	1	3	0	1	0	3
2	0	1	1	2	0	1	5	0	0	0	2	1	0	2	1	1	2	1
1	1	2	1	0	1	1	3	3	1	2	1	0	0	0	3	0	3	1
0	2	1	1	4	0	0	0	2	1	1	0	2	3	2	0	2	3	2
								2	3	0	1	2						

Обозначим через x_i варианты признака X . Из условия видим, что x_i принимает одно из значений 0, 1, 2, 3, 4, 5. Следовательно, X – дискретная случайная величина. Объем выборки $n = 100$. Просматривая данные, подсчитываем частоты n_i вариант x_i и записываем в таблицу (графы 2 и 3).

^(*) Справедливости ради отметим, что для многих СВ, используемых в практике, вид распределения известен, и дело сводится к расчету параметров и оценке их надежности.

Мы предлагаем формировать общую таблицу, которая содержит вспомогательные и итоговые результаты подсчетов по всем пунктам задания. Она заполняется по мере выполнения работы.

Таблица 1.

i	x_i	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$F^*(x_i)$	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$	P_i	$n'_i = nP_i$	n_i	$\frac{(n'_i - n_i)^2}{n'_i}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	29	0,29	0,29	0	0	0,2923	29,23	29	0,0018
1	1	37	0,37	0,66	37	37	0,3595	35,95	37	0,0307
2	2	21	0,21	0,87	42	84	0,2211	22,11	21	0,0557
3	3	10	0,10	0,97	30	90	0,0906	9,06 2,79 0,68 } = 12,53	10 1 2 } = 13	0,0176
4	4	1	0,01	0,98	4	16	0,0279			
5	5	2	0,02	1,00	10	50	0,0068			
Σ		100	1,00		123	277	0,9982			0,1058

Вычисляем относительные частоты вариант x_i по формуле $\frac{n_i}{n} = \frac{n_i}{100}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, 5$). Результаты вносим в графу 4. Теперь совокупность граф 2 и 3 есть статистический ряд распределения частот, а столбцов 2 и 4 – статистический ряд распределения относительных частот.

Начертим полигон частот, откладывая на горизонтальной оси варианты x_i , а на вертикальной – соответствующие частоты n_i . Затем полученные точки последовательно соединяем отрезками прямых.

Эмпирическая функция распределения определяется формулой $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x – сумма частот вариант, меньших x . В статистике она является аналогом интегральной функции распределения $F(x) = P(X < x)$ в теории вероятностей. Исходя из таблицы 1 (графа 4), получим:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ 0,29, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 0,66, & \text{если } 1 < x \leq 2, \\ 0,87, & \text{если } 2 < x \leq 3, \\ 0,97, & \text{если } 3 < x \leq 4, \\ 0,98, & \text{если } 4 < x \leq 5, \\ 1,00, & \text{если } 5 < x. \end{cases}$$

(чертеж см. на следующей странице).

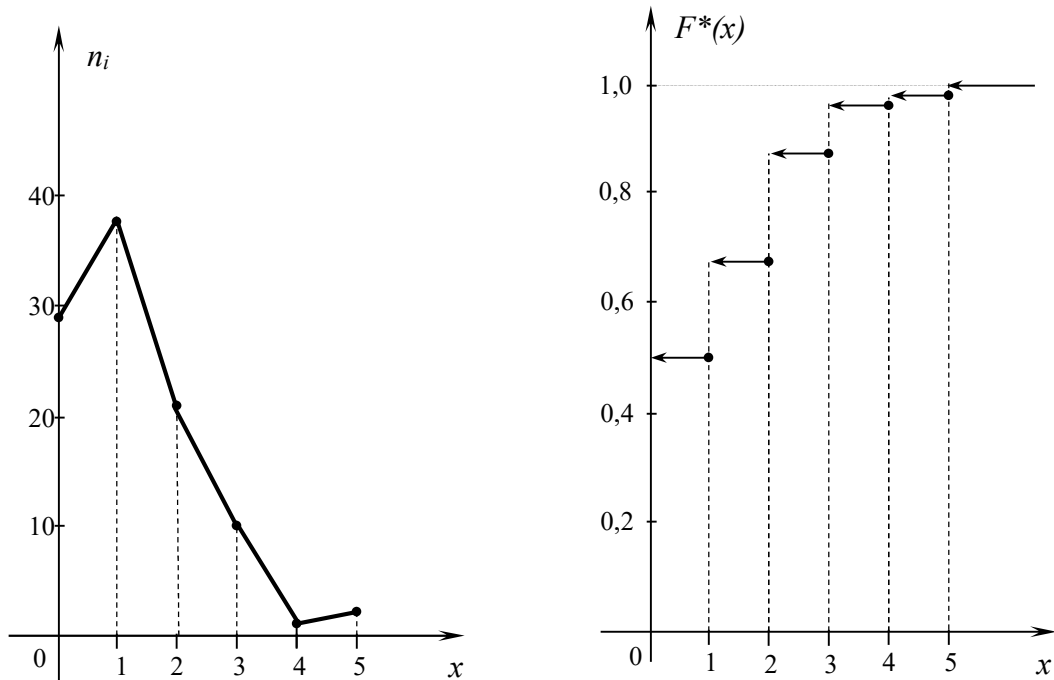
Вычислим выборочные оценки параметров распределения по формулам:

$$\text{выборочную среднюю } \bar{x}_g = \frac{\sum x_i n_i}{n},$$

$$\text{выборочную дисперсию } \sigma_g^2 = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_g)^2,$$

выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_g = \sqrt{\sigma_g^2}$.

Для этого заполняем графы 5 и 6. Получим: $\bar{x}_g = 123/100 = 1,23$;
 $\sigma_g^2 = 277/100 - 1,23^2 = 1,2571$; $\sigma_g = \sqrt{1,2571} = 1,12$.



По виду полигона, а также из того, что \bar{x}_g и σ_g^2 почти совпадают, что является признаком распределения Пуассона, выдвинем гипотезу о том, что рассматриваемый признак X распределен по закону Пуассона

$P_i = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$, ($i = 0, 1, 2, 3, \dots$), где λ — математическое ожидание и дисперсия распределения. Положим в нашем случае $\lambda = 1,23$. Тогда

$$P_i = \frac{1,23^i e^{-1,23}}{i!}.$$

Вычисляем теоретические вероятности P_i : $P_0 = \frac{1,23^0 e^{-1,23}}{0!} = 0,2923$;

$$P_1 = \frac{1,23^1 \cdot 0,2923}{1!} = 0,3595;$$

$$P_2 = \frac{1,23^2 \cdot 0,2923}{2!} = 0,2211;$$

$$P_3 = \frac{1,23^3 \cdot 0,2923}{3!} = 0,0906;$$

$$P_4 = \frac{1,23^4 \cdot 0,2923}{4!} = 0,0279;$$

$$P_5 = \frac{1,23^5 \cdot 0,2923}{5!} = 0,0069 \text{ (графа 8).}$$

Вопрос: почему сумма P_i отличается от единицы?

Сравнивая графы 4 и 8, еще раз убеждаемся, что распределение близко к пуассоновскому.

Согласно критерию согласия Пирсона вычисляется статистика

$$\chi_{набл}^2 = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i},$$

где $n'_i = nP_i$ – теоретические (выравнивающие) частоты. Для их вычисления элементы графы 8 умножаем на $n = 100$ (графа 9). В графу 11 вносим величины $\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$. При этом учитываем, что значения вариант, частоты которых меньше 5, надо объединить с соседними вариантами так, чтобы их общая сумма оказалась больше пяти. В нашем случае объединяем последние три варианта, считая при этом, что эмпирическая сумма вариант равна $n_i = 13$ (графа 10), а $n'_i = (0,0906 + 0,0279 + 0,0068) \cdot 100 = 12,53$. Соответственно, в графе 11 считаем общее для них значение $(13 - 12,53)^2 / 12,53 = 0,0176$. После этого $\chi_{набл}^2 = 0,1058^{(*)}$.

Для отыскания $\chi_{крит}^2$ находим число степеней свободы $\nu = k - r - 1$, где $k=4$ – число групп (учитывая объединение), $r=1$ – число параметров распределения (один расчетный параметр $\lambda = 1,23$). Итак, $\nu = 4 - 1 - 1 = 2$. По таблице « χ^2 – распределение» при уровне значимости $\alpha = 0,05$ находим $\chi_{крит}^2 = \chi^2(2; 0,05) = 5,991$. Как видим, $\chi_{набл}^2 < \chi_{крит}^2$. Следовательно, критерий Пирсона позволяет не отвергать гипотезу о распределении Пуассона

$$P_i = \frac{1,23^i e^{-1,23}}{i!}$$

для рассматриваемой статистической совокупности.

Замечание. Если наблюдаемое значение статистики окажется больше критического, следует усомниться в правильности выдвинутой гипотезы.

ЗАДАЧА 2.

Имеются данные выборочного наблюдения над признаком X :

61,0	64,8	51,8	52,8	68,9	70,2	95,6	52,8	87,3	68,1	20,8	31,8	55,8
32,3	56,8	54,8	53,3	65,8	59,6	59,5	85,8	73,8	26,1	65,8	57,7	57,7
73,6	89,3	71,8	45,3	60,7	59,6	60,5	79,8	40,8	40,8	33,2	62,8	81,2
67,8	34,6	60,8	82,0	33,7	58,6	58,6	61,1	89,1	37,8	67,5	62,1	69,4
39,2	53,2	65,2	65,2	59,6	68,3	60,2	58,2	44,3	60,8	37,8	55,0	68,3
68,3	29,2	64,4	39,2	48,4	60,3	37,5	64,8	79,4	40,1	40,1	42,0	54,6
54,8	79,9	57,1	87,5	47,9	80,0	50,1	50,1	53,8	56,9	100,8	73,8	40,8
54,6	75,6	31,8	49,6	49,6	75,6	51,6	28,6	40,8				

Судя по тому, что повторяющихся значений, как это было в задаче 1, практически нет, этот признак следует отнести к непрерывным. Следовательно, требуется построить для него интервальное распределение,

(*) Дополнительные подробности смотрите ниже в задаче 3.

для чего, подсчитав количество данных, определяем объем выборки $n = 100$. Затем находим наименьшую и наибольшую варианты: $x_{\min}=20,8$ и $x_{\max}=100,8$ и по формуле Стерджеса находим длину интервала *варьирования*

$$h \cong \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,322 \cdot \lg n} = \frac{100,8 - 20,8}{1 + 3,322 \cdot \lg 100} = \frac{80}{7,644} \cong 10,45.$$

Начало первого интервала определяем по формуле $a_0 = x_{\min} - \frac{h}{2} = 20,8 - \frac{10,45}{2} = 15,58$. Далее, последовательно прибавляя h , получаем границы интервалов: $a_1 = 26,03$; $a_2 = 36,48$; $a_3 = 46,93$; $a_4 = 57,38$; $a_5 = 67,83$; $a_6 = 78,28$; $a_7 = 88,73$; $a_8 = 99,18$; $a_9 = 109,63$. Последний интервал должен "накрывать" $x_{\max} = 100,8$.^(*)

Теперь подсчитаем *интервальные частоты* – количества вариантов, попавших в каждый интервал. Это удобно делать с помощью приводимой ниже таблицы.

Таблица 2.

№ интервала	Интервалы	Подсчет частот	Частоты n_i
1	(15,58; 26,03)	└	2
2	(26,03; 36,48)	▣ □	8
3	(36,48; 46,93)	▣ ▣ □	14
4	(46,93; 57,38)	▣ ▣ ▣ ▣ └	22
5	(57,38; 67,83)	▣ ▣ ▣ ▣ ▣ □	28
6	(67,83; 78,28)	▣ ▣ □	13
7	(78,28; 88,73)	▣ □	9
8	(88,73; 99,18)	□	3
9	(99,18; 109,63)		1
Объем выборки			$n = 100$

Последовательно просматривая данные, каждое значение отмечаем чертой в строке соответствующего интервала, формируя квадратики с диагональю, что соответствует пяти вариантам, попавшим в интервал, и удобно при подсчете частот n_i .

Результаты дальнейшей обработки данных вносятся в таблицу, аналогичную таблице 3.

^(*) Возможен другой способ построения, при котором сначала определяется целое число интервалов $k \cong 1 + 3,322 \cdot \lg n$, а затем длина шага $h = \frac{R}{k}$, где $R = x_{\max} - x_{\min}$ и называется *размахом вариации* признака. При этом первый интервал откладывается от минимального значения x_{\min} .

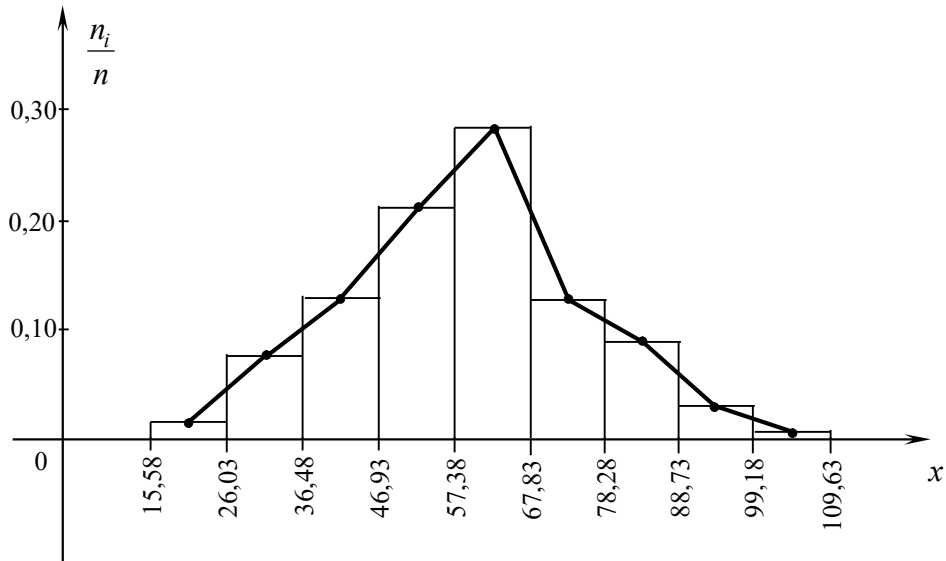
Таблица 3.

i	$(a_{i-1}; a_i)$	x_i	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$	$\frac{a_{i-1} - \bar{x}_e}{\bar{s}}$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	(15,58; 26,03)	20,80	2	0,02	41,60	865,28	- 2,55
2	(26,03; 36,48)	31,25	8	0,08	250,00	7812,50	- 1,93
3	(36,48; 46,93)	41,70	14	0,14	583,80	24344,46	- 1,31
4	(46,93; 57,38)	52,15	22	0,22	1147,30	59831,70	- 0,69
5	(57,38; 67,83)	62,60	28	0,28	1752,80	109725,28	- 0,07
6	(67,83; 78,28)	73,05	13	0,13	949,65	69371,93	0,54
7	(78,28; 88,73)	83,50	9	0,09	751,50	62750,25	1,16
8	(88,73; 99,18)	93,95	3	0,03	281,85	26479,81	1,78
9	(99,18; 109,63)	104,40	1	0,01	104,40	10899,36	2,40
10	109,63						3,02
Всего			100	1,00	5862,90	372080,57	

Продолжение таблицы 3.

i	$\Phi\left(\frac{a_{i-1} - \bar{x}_e}{\bar{s}}\right)$	P_i	$n'_i = n P_i$	n_i	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
-	9	10	11	12	13
1	- 0,4946	0,0214	2,14 } = 8,97 6,83 }	2 } = 10 8 }	0,1183
2	- 0,4732	0,0683			
3	- 0,4049	0,1500	15,00	14	0,0667
4	- 0,2549	0,2270	22,70	22	0,0216
5	- 0,0279	0,2333	23,33	28	0,9348
6	0,2054	0,1716	17,16	13	1,0085
7	0,3770	0,0855	8,55 } = 12,17 2,93 } 0,69 }	9 } = 13 3 } 1 }	0,0566
8	0,4625	0,0293			
9	0,4918	0,0069			
10	0,4987				
Всего		0,9936	99,33	100	2,2065

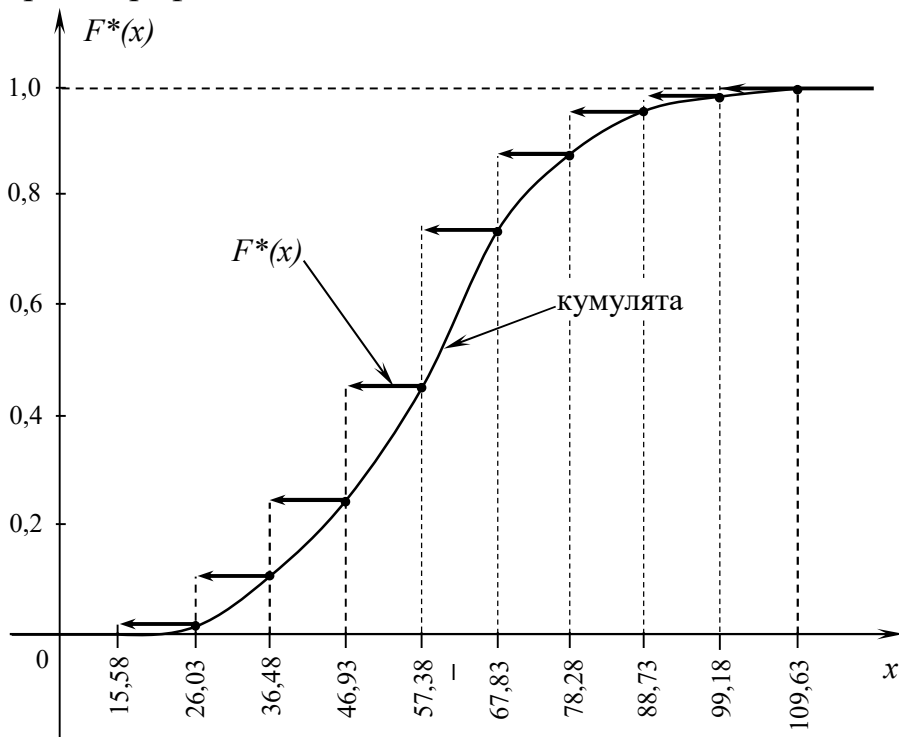
Введем в рассмотрение x_i – середины интервалов и, приписав им соответствующие интервальные частоты n_i , получим, как и в задаче 1, вариационный ряд (графы 3 и 4). Исходная совокупность граф 2 и 5 называется *интервальным распределением*. На их данных строится *гистограмма относительных частот*: прямоугольники с основаниями – интервалами вариации и высотами, равными соответствующим интервальным относительным частотам. Если же последовательно соединить середины верхних оснований прямоугольников отрезками прямых, то получим *полигон относительных частот*.



Эмпирическая функция распределения строится поинтервально, исходя из данных столбцов 2 и 5 по правилу накопления частот.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 15,58; \\ 0,02 & \text{при } 15,58 < x \leq 26,03; \\ 0,10 & \text{при } 26,03 < x \leq 36,48; \\ 0,24 & \text{при } 36,48 < x \leq 46,93; \\ 0,46 & \text{при } 46,93 < x \leq 57,38; \\ 0,74 & \text{при } 57,38 < x \leq 67,83; \\ 0,87 & \text{при } 67,83 < x \leq 78,28; \\ 0,96 & \text{при } 78,28 < x \leq 88,73; \\ 0,99 & \text{при } 88,73 < x \leq 99,18; \\ 1,00 & \text{при } 99,18 < x \leq 109,63; \\ 1,00 & \text{при } x > 109,63. \end{cases}$$

Строим график.



Плавная кривая (или ломаная), "окаймляющая" снизу график $F^*(x)$, называется *кумулятой* (см. чертеж).

Для выдвижения гипотезы о виде распределения вычислим основные числовые оценки признака X :

$$\text{средняя выборочная } \bar{x}_g = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{5862,90}{100} = 58,629 \cong 58,63;$$

$$\text{выборочная дисперсия } D_g(x) = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_g)^2 = \frac{372080,57}{100} - (58,63)^2 = 283,32;$$

$$\begin{aligned} \text{выборочное среднеквадратическое отклонение } \sigma_g(X) &= \sqrt{D_g(X)} = \\ &= \sqrt{283,32} = 16,83 \text{ и исправленное } \bar{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \sigma_g(X) = \sqrt{\frac{100}{99}} 16,83 = 16,91. \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались итоговыми данными 6 и 7 граф.

В пользу того, что X имеет нормальное распределение, говорят следующие факты:

- а) полигон относительных частот напоминает кривую Гаусса;
- б) оценивая теоретическое математическое ожидание a величиной $\bar{x}_g = 58,63$, а теоретическое среднеквадратическое отклонение σ величиной $\sigma_g(X) = 16,83$, получим $(a - 3\sigma; a + 3\sigma) \cong (\bar{x}_g - 3\sigma_g(X); \bar{x}_g + 3\sigma_g(X)) = (58,63 - 3 \cdot 16,83; 58,63 + 3 \cdot 16,83) = (8,14; 109,12)$. Как видим, исходные данные попадают в этот интервал, что согласуется с "правилом 3σ ".

В силу этого при уровне значимости $\alpha = 0,01$ выдвинем и проверим гипотезу о том, что рассматриваемый признак X имеет нормальное распределение с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{16,91\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-58,63)^2}{571,90}}$$

с $a = \bar{x}_g = 58,63$ и $\sigma = \bar{s} = 16,91$. Для этого вычислим выравнивающие частоты $n'_i = nP_i$, где P_i – вероятность попадания X в i -й вариационный интервал определяется по формуле

$$P_i = P(a_{i-1} \leq X \leq a_i) = \Phi\left(\frac{a_i - \bar{x}_g}{\bar{s}}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - \bar{x}_g}{\bar{s}}\right),$$

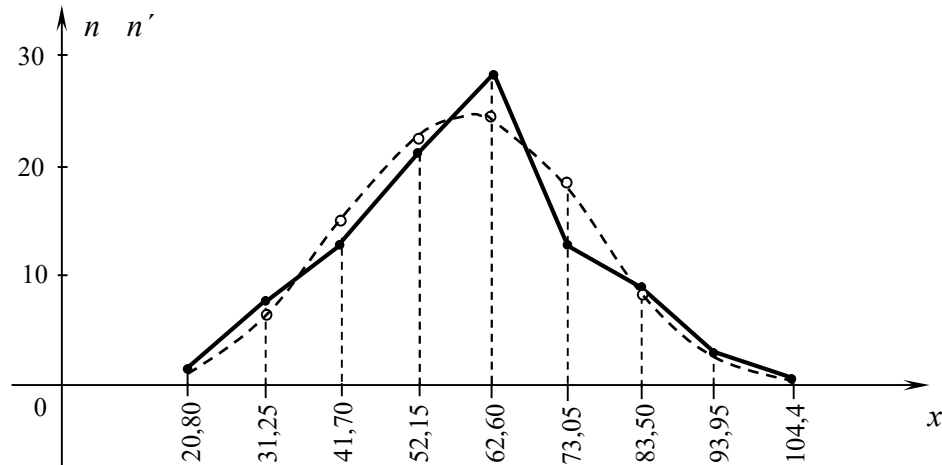
a_i – концы интервалов, а значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ найдем по

таблицам (приложение 2). В 8 и 9 графах *таблицы 3* сделаны вычисления для начал интервалов, и только в 10-й строке – для конца последнего интервала.

Как видим, выравнивающие частоты в основном близки к эмпирическим частотам (графы 4 и 11), что еще раз подтверждает

правильность выдвинутой гипотезы о нормальном распределении признака.

На графике совместим n_i и n'_i , приняв их за частоты x_i – середин интервалов.



Пунктирная линия соединяет точки $(x_i; n'_i)$ и является графиком гипотетической функции плотности. Близость этих линий еще раз говорит в пользу выдвигаемой гипотезы.

Гипотезу о виде распределения проверим, применяя *критерий согласия Пирсона*, в котором вычисляется статистика

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}.$$

При этом интервалы, имеющие частоты, меньшие пяти, объединяются с соседними (графы 11 и 12). В итоге получено $\chi^2_{набл.} = 2,2065$.

Далее определим число степеней свободы $\nu = k - r - 1$, где $k = 6$ – число интервалов с учетом их объединения, а $r = 2$ – число параметров распределения, вычисленных по выборке (a и σ^2). У нас получится $\nu = 3$. Тогда при уровне значимости $\alpha = 0,01$ и $\nu = 3$ по таблице "Критические точки распределения χ^2 " находим $\chi^2_{крит.} = \chi^2(3; 0,01) = 11,3$. Так как $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{крит.}$, то с 99%-ой уверенностью можно утверждать, что признак X распределен нормально и его функция плотности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{16,91\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-58,63)^2}{571,90}}$$

с $a = 58,63$ и $\sigma = 16,91$.

Теперь для отыскания вероятности попадания признака X в интервал $(58,63 - 5; 58,63 + 3) = (53,63; 61,63)$ воспользуемся формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

У нас

$$P(53,63 < X < 61,63) = \Phi\left(\frac{61,63 - 58,63}{16,91}\right) - \Phi\left(\frac{53,63 - 58,63}{16,91}\right) = \Phi(0,18) + \Phi(0,30) = 0,0714 + 0,1179 = 0,1893.$$

ЗАДАЧА 3.

Имеем выборочные данные:

31	701	49	32	3	400	1630	420	1108	332	543	753
921	417	35	35	85	1799	0	524	1654	16	445	448
646	23	275	2004	0	24	820	901	921	515	990	964
80	1610	1121	24	1560	439	800	749	41	163	2009	950
420	25	700	1196	8	283	1294	800	67	511	631	241
26	1113	813	85	24	120	1110	700	7	25	625	3
140	1021	49	68	432	3	468	125	703	381	120	24
84	100	0	420	414	551	442	18	1600	8		

Определяем объем выборки $n = 94$, а также $x_{\min} = 0$ и $x_{\max} = 2009$. Определим число интервалов $k = 1 + 3,322 \cdot \lg 94 \cong 7,555$, а так как k – целое число, то положим $k = 8$. Тогда $h = (2009 - 0) : 8 = 252^{(*)}$. Интервалы будем откладывать от минимального значения признака (который, судя по данным, не принимает отрицательных значений). Подсчитаем интервальные частоты.

Таблица 4.

№ интервала	Интервалы	Подсчет частот	Частоты n_i
1	(0 – 252)	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐	39
2	(252 – 504)	☐ ☐ ☐	16
3	(504 – 756)	☐ ☐ ☐	13
4	(756 – 1008)	☐ ☐	11
5	(1008 – 1260)	☐	6
6	(1260 – 1512)		1
7	(1512 – 1764)	☐	5
8	(1764 – 2016)	☐	3
Объем выборки			$n = 94$

Дальнейшие расчеты будем вносить в таблицу 5.

(*) Точное значение 251,125 и по правилам округления следует положить $h = 251$. Однако, в этом случае восьмой интервал не "накроет" единственное значение 2009, из-за чего придется ввести еще один интервал, почти целиком лежащий вне интервала вариации. Поэтому в ситуации, когда вначале определяется целое число интервалов, длину шага округляют с избытком.

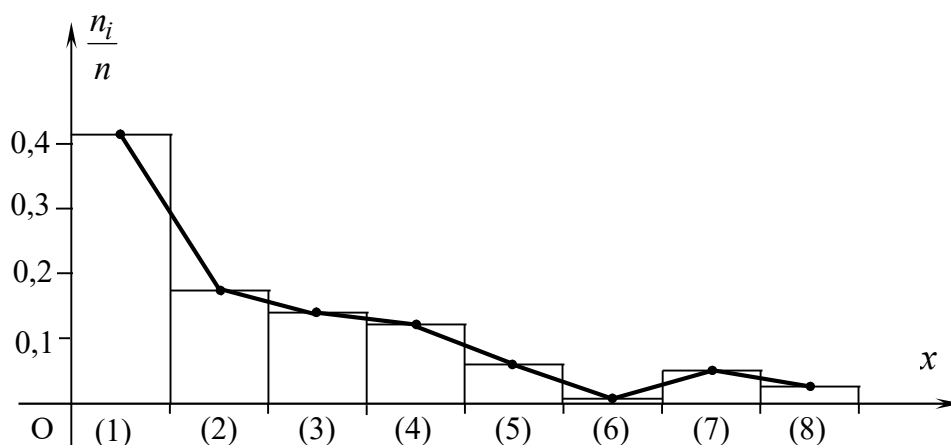
Таблица 5.

i	$(a_{i-1}; a_i)$	x_i	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$u_i = \frac{x_i - 882}{252}$	$u_i n_i$	$u_i^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	(0 – 252)	126	39	0,42	–3	–117	351
2	(252 – 504)	378	16	0,17	–2	–22	44
3	(504 – 756)	630	13	0,14	–1	–13	13
4	(756 – 1008)	882	11	0,12	0	0	0
5	(1008 – 1260)	1134	6	0,06	1	6	6
6	(1260 – 1512)	1386	1	0,01	2	2	4
7	(1512 – 1764)	1638	5	0,05	3	15	45
8	(1764 – 2016)	1890	3	0,03	4	12	48
9	2016						
В с е г о			94	1,00		–117	511

Продолжение таблицы 5.

i	$-\lambda \cdot a_{i-1}$	$e^{-\lambda \cdot a_{i-1}}$	P_i	$n'_i = n P_i$	n_i	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
–	9	10	11	12	13	14
1	0	1	0,3484	32,75	39	1,0016
2	–0,4284	0,6516	0,2271	21,35	16	1,3406
3	–0,8568	0,4245	0,1479	13,90	13	0,0583
4	–1,2852	0,2766	0,0964	9,06	11	0,4154
5	–1,7136	0,1802	0,0628	5,90	6	0,0017
6	–2,1420	0,1174	0,0409	3,84 2,51 1,62 } = 7,97	1 5 3 } = 9	0,1331
7	–2,5704	0,0765	0,0267			
8	–2,9988	0,0498	0,0173			
9	–3,4272	0,0325				
В с е г о			0,9675	90,93	94	2,9507

Построим гистограмму относительных частот (на оси Ox в скобках указаны номера интервалов).



Полученная картина позволяет выдвинуть гипотезу о показательном распределении рассматриваемого признака.

Далее вычислим \bar{x}_g и $\sigma_g(x)$. Учитывая, что значения x_i весьма большие, для упрощения вычислений введем условные варианты $u_i = \frac{x_i - 882}{252}$ (6 графа). Рассчитаем графы 7 и 8 и, используя итоговые значения их найдем $\bar{u} = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{-117}{94} = -1,245$ и $\sigma^2(u) = \frac{\sum u_i^2 n_i}{n} - (\bar{u})^2 = \frac{511}{94} - (-1,245)^2 = 3,886$ и $\sigma(u) = 1,971$. Тогда $\bar{x}_g = h \cdot \bar{u} + C = 252 \cdot (-1,245) + 882 = 568,26$ и $\sigma_g(x) = h \cdot \sigma(u) = 252 \cdot 1,971 = 496,69$. Как видим, они достаточно близки^(*), что еще раз позволяет говорить о показательном распределении этого признака с параметром $\lambda = \frac{1}{\bar{x}_g} = \frac{1}{568,26} = 0,0017$ и функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 0,0017 \cdot e^{-0,0017x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Для проверки гипотезы по критерию согласия Пирсона вычислим вероятности P_i попадания признака в интервалы разбиения (графа 11), которые в этом случае вычисляются по формуле

$$P_i = P(a_{i-1} \leq x \leq a_i) = e^{-\lambda a_{i-1}} - e^{-\lambda a_i}.$$

Предварительные вычисления проведены в графах 9 и 10. После вычисления теоретических частот (графа 12) группы 6 – 8 объединяются как содержащие малое число вариантов (графы 12, 13), и с учетом этого объединения вычисляем статистику Пирсона

$$\chi_{набл.}^2 = \frac{(32,75 - 39)^2}{32,75} + \frac{(21,35 - 16)^2}{21,35} + \frac{(13,90 - 13)^2}{13,90} + \frac{(9,06 - 11)^2}{9,06} + \frac{(5,90 - 6)^2}{5,90} + \frac{(7,97 - 9)^2}{7,97} = 2,9507 \text{ (значения всех дробей внесены в графу 14).}$$

Подсчитаем число степеней свободы $k = 6 - 1 - 1 = 4$. Здесь после объединения получилось 6 групп, а расчетный параметр один – λ . Теперь при уровне значимости $\alpha = 0,05$ по таблице " χ^2 – распределение" находим критическое значение статистики $\chi_{крит.}^2 = \chi^2(4; 0,05) = 9,5$. То есть $\chi_{набл.}^2 < \chi_{крит.}^2$, а означает, что с 95%-ой уверенностью следует принять гипотезу о показательном распределении изучаемого признака с функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 0,0017 \cdot e^{-0,0017x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

^(*) Разница между ними составляет всего $\frac{496,69 - 385,31}{2009} \cdot 100\% = 3,6\%$ от размаха вариации.

Задача 4.

Предварительные вычисления в "расширенную" таблицу:

$x \backslash y$	10	15	20	25	30	m_x	$x m_x$	$x^2 m_x$	\bar{Y}_x
2	3	4				7	14	28	12,86
5		10	9	3		22	110	550	18,41
8		6	40	5		51	408	3264	19,90
11			4	8	3	15	165	1815	24,67
14				2	3	5	70	980	28,00
m_y	3	20	53	18	6	$n=100$	767	6637	
ym_y	30	300	1060	450	180	2020			
$y^2 m_y$	300	4500	21200	11250	5400	42650			
\bar{X}_y	2	5,30	7,72	9,50	12,50				

Сначала подсчитываются частоты составляющих признаков m_x и m_y суммированием совместных частот по строкам и столбцам соответственно.

Числа в столбцах m_x , $x m_x$, $x^2 m_x$, стоящие под двойной чертой, и строках m_y , ym_y , $y^2 m_y$, стоящие справа от двойной черты, получены суммированием и равны n , $\sum x m_x$, $\sum x^2 m_x$ и соответственно n , $\sum y m_y$, $\sum y^2 m_y$. Находим числовые характеристики составляющих признаков X и Y :

$$\bar{x} = \frac{\sum x m_x}{n} = \frac{767}{100} = 7.67,$$

$$D(x) = \frac{\sum x^2 m_x}{n} - \bar{x}^2 = \frac{6637}{100} - 7.67^2 = 7.54, \quad \sigma_x = \sqrt{7.54} = 2.75,$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y m_y}{n} = \frac{2020}{100} = 20.2,$$

$$D(y) = \frac{\sum y^2 m_y}{n} - \bar{y}^2 = \frac{42650}{100} - 20.2^2 = 16.46, \quad \sigma_y = \sqrt{16.46} = 4.06.$$

Далее,

$$\sum x y m_{xy} = 2(10 \cdot 3 + 15 \cdot 4) + 5(15 \cdot 10 + 20 \cdot 9 + 25 \cdot 3) + 8(15 \cdot 6 + 20 \cdot 40 + 25 \cdot 5) + 11(20 \cdot 4 + 25 \cdot 8 + 30 \cdot 3) + 14(25 \cdot 2 + 30 \cdot 3) = 16355.$$

Находим выборочный коэффициент корреляции по формуле:

$$r_g = \frac{\sum x y n_{xy} - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{n \sigma_x \sigma_y} = \frac{16355 - 100 \cdot 7,67 \cdot 20,2}{100 \cdot 2,75 \cdot 4,06} = 0,772. (*)$$

Близость r_g к единице говорит о достаточно тесной связи признаков X и Y . Для оценки существенности этой связи на уровне значимости α , равном 0,01 или 0,05 вычислим статистику $t_{набл.} = \frac{|r_g|}{\sigma_r}$, где среднеквадратическая ошибка коэффициента корреляции вычисляется по формуле $\sigma_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0,772^2}{100-2}} = 0,064$. Отсюда $t_{набл.} = \frac{0,772}{0,064} = 12,06$. Далее, принимая уровень значимости $\alpha = 0,01$, при числе степеней свободы $\nu = n - 2 = 100 - 2 = 98$ по таблице распределения Стьюдента находим $t_{крит.} = 2,626$. Так как $t_{набл.} > t_{крит.}$, то с 99%-ой уверенностью можно говорить о существенности тесной связи между признаками Y и X .

Теперь находим уравнения прямых регрессии по формулам:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_g \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \bar{x}); \quad \bar{x}_y - \bar{x} = r_g \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot (y - \bar{y}),$$

$$\bar{y}_x - 20,2 = 0,772 \cdot \frac{4,06}{2,75} \cdot (x - 7,67), \quad \bar{x}_y - 7,67 = 0,772 \cdot \frac{2,75}{4,06} \cdot (y - 20,2).$$

После преобразований получим $\bar{y}_x = 1,14x + 11,46$, $\bar{x}_y = 0,52y - 10,56$.

Для сравнения вычислим эмпирические условные средние \bar{Y}_x (последний столбец) и \bar{X}_y таблицы: $\bar{Y}_2 = (10 \cdot 3 + 15 \cdot 4) / 7 = 12,86$, $\bar{Y}_5 = (15 \cdot 10 + 20 \cdot 9 + 25 \cdot 3) / 22 = 18,41$ и т.д.. Значения \bar{X}_y находим аналогично (последняя строка): $\bar{X}_{10} = 2 \cdot 3 / 3 = 2$, $\bar{X}_{15} = (2 \cdot 4 + 5 \cdot 10 + 8 \cdot 6) / 20 = 5,30$ и т.д..

Построим графики полученных прямых, совмещая их с полигонами условных средних соответствующих составляющих признаков (на следующей странице на чертежах ломаные линии).

Найдем теоретические значения условных средних:

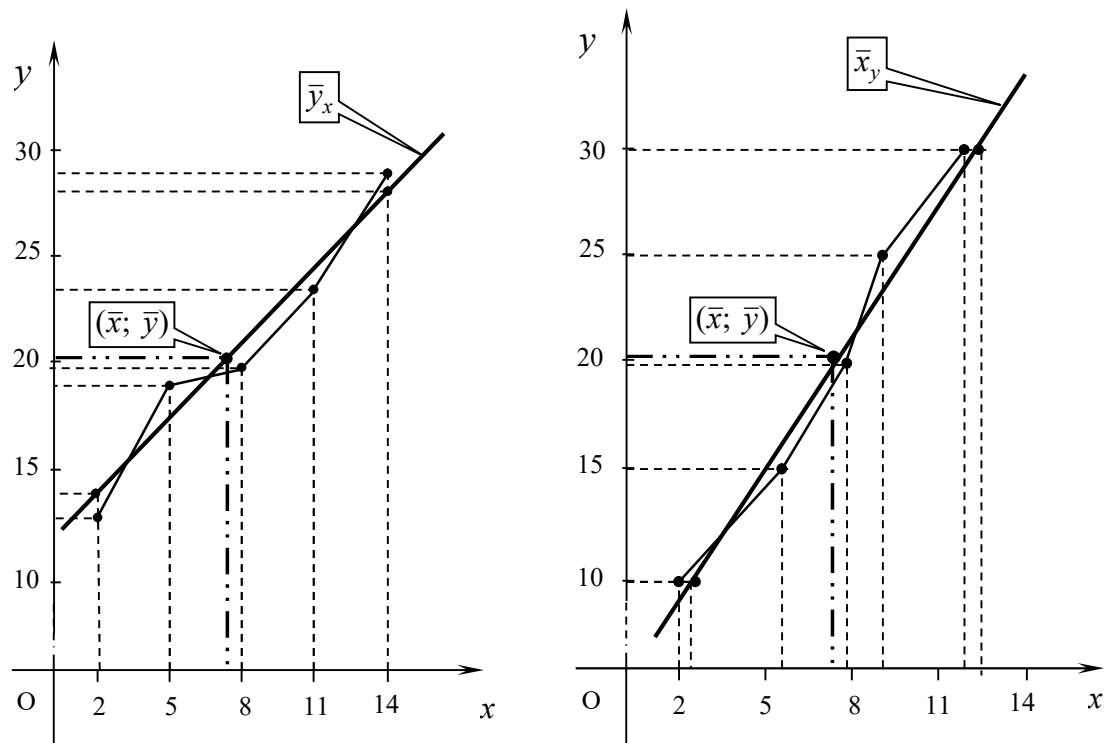
$$\bar{y}_x(2) = 13,74; \quad \bar{y}_x(5) = 17,16; \quad \bar{y}_x(8) = 20,58; \quad \bar{y}_x(11) = 24,00; \quad \bar{y}_x(14) = 27,42.$$

$$\bar{x}_y(10) = 2,31; \quad \bar{x}_y(15) = 4,91; \quad \bar{x}_y(20) = 7,51; \quad \bar{x}_y(25) = 10,11; \quad \bar{x}_y(30) = 12,71.$$

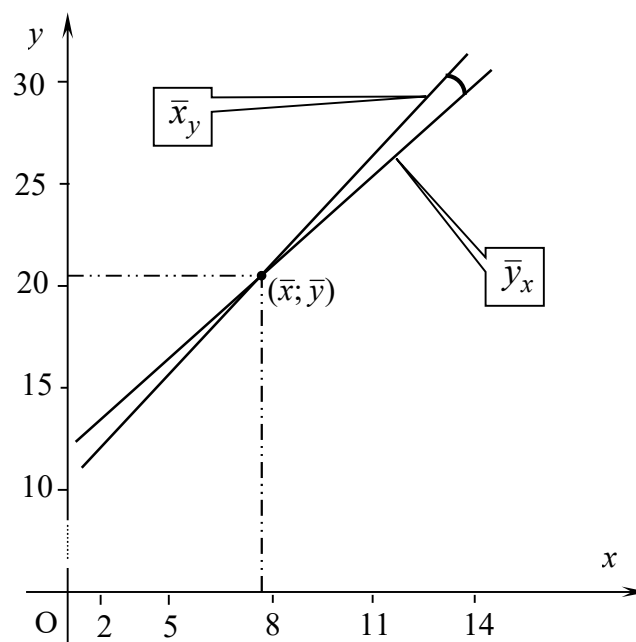
Сравнение \bar{Y}_x и \bar{y}_x показывает, что их значения достаточно близки. Отклонения между теоретическими значениями \bar{y}_x и экспериментальными \bar{Y}_x составляют: 0,88; -1,25; 0,68; -0,67; -0,53, малые значения которых говорят в пользу корректности полученного уравнения регрессии.

(*) Значение выборочного коэффициента корреляции может быть отрицательным, что говорит об обратной связи между признаками: при возрастании одной из них другая убывает. Внимание! Всегда $|r_g| \leq 1$.

Аналогично имеет место и для \bar{x}_y и \bar{X}_y , отклонения между которыми равны соответственно: 0,31; -0,39; -0,21; 0,61; 0,21.*)



Если изобразить обе прямые на одном чертеже, то, чем ближе к нулю острый угол между ними (отмечен дугой), тем теснее связь между признаками. Если же этот угол близок к 90° , то это говорит о слабой связи или об отсутствии таковой вообще.



*) Обращаем внимание на то, что обе прямые регрессии проходят через точку (\bar{x}, \bar{y}) .

5. Статистические таблицы.

1. Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

x	С о т ы е д о л и									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2331	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001	0001

При $x > 4$ принимают $\varphi(x) = 0$.

2. Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.45	0.1736	0.90	0.3159	1.35	0.4115	1.80	0.4641	2.50	0.4938
0.01	0.0040	0.46	0.1772	0.91	0.3186	1.36	0.4131	1.81	0.4649	2.52	0.4941
0.02	0.0080	0.47	0.1808	0.92	0.3212	1.37	0.4147	1.82	0.4656	2.54	0.4945
0.03	0.0120	0.48	0.1844	0.93	0.3238	1.38	0.4162	1.83	0.4664	2.56	0.4948
0.04	0.0160	0.49	0.1879	0.94	0.3264	1.39	0.4177	1.84	0.4671	2.58	0.4951
0.05	0.0199	0.50	0.1915	0.95	0.3289	1.40	0.4192	1.85	0.4678	2.60	0.4953
0.06	0.0239	0.51	0.1950	0.96	0.3315	1.41	0.4207	1.86	0.4686	2.62	0.4956
0.07	0.0279	0.52	0.1985	0.97	0.3340	1.42	0.4222	1.87	0.4693	2.64	0.4959
0.08	0.0319	0.53	0.2019	0.98	0.3365	1.43	0.4236	1.88	0.4699	2.66	0.4961
0.09	0.0359	0.54	0.2054	0.99	0.3389	1.44	0.4251	1.89	0.4706	2.68	0.4963
0.10	0.0398	0.55	0.2088	1.00	0.3413	1.45	0.4265	1.90	0.4713	2.70	0.4965
0.11	0.0438	0.56	0.2123	1.01	0.3438	1.46	0.4279	1.91	0.4719	2.72	0.4967
0.12	0.0478	0.57	0.2157	1.02	0.3461	1.47	0.4292	1.92	0.4726	2.74	0.4969
0.13	0.0517	0.58	0.2190	1.03	0.3485	1.48	0.4306	1.93	0.4732	2.76	0.4971
0.14	0.0557	0.59	0.2224	1.04	0.3508	1.49	0.4319	1.94	0.4738	2.78	0.4973
0.15	0.0596	0.60	0.2257	1.05	0.3531	1.50	0.4332	1.95	0.4744	2.80	0.4974
0.16	0.0636	0.61	0.2291	1.06	0.3554	1.51	0.4345	1.96	0.4750	2.82	0.4976
0.17	0.0675	0.62	0.2324	1.07	0.3577	1.52	0.4357	1.97	0.4756	2.84	0.4977
0.18	0.0714	0.63	0.2357	1.08	0.3599	1.53	0.4370	1.98	0.4761	2.86	0.4979
0.19	0.0753	0.64	0.2389	1.09	0.3621	1.54	0.4382	1.99	0.4767	2.88	0.4980
0.20	0.0793	0.65	0.2422	1.10	0.3643	1.55	0.4394	2.00	0.4772	2.90	0.4981
0.21	0.0832	0.66	0.2454	1.11	0.3665	1.56	0.4406	2.02	0.4783	2.92	0.4982
0.22	0.0871	0.67	0.2486	1.12	0.3686	1.57	0.4418	2.04	0.4793	2.94	0.4984
0.23	0.0910	0.68	0.2517	1.13	0.3708	1.58	0.4429	2.06	0.4803	2.96	0.4985
0.24	0.0948	0.69	0.2549	1.14	0.3729	1.59	0.4441	2.08	0.4812	2.98	0.4986
0.25	0.0987	0.70	0.2580	1.15	0.3749	1.60	0.4452	2.10	0.4821	3.00	0.4987
0.26	0.1026	0.71	0.2611	1.16	0.3770	1.61	0.4463	2.12	0.4830	3.20	0.4993
0.27	0.1064	0.72	0.2642	1.17	0.3790	1.62	0.4474	2.14	0.4838	3.40	0.4997
0.28	0.1103	0.73	0.2673	1.18	0.3810	1.63	0.4484	2.16	0.4846	3.60	0.4998
0.29	0.1141	0.74	0.2703	1.19	0.3830	1.64	0.4495	2.18	0.4854	3.80	0.4999
0.30	0.1179	0.75	0.2734	1.20	0.3849	1.65	0.4515	2.20	0.4861	4.00	0.4999
0.31	0.1217	0.76	0.2764	1.21	0.3869	1.66	0.4505	2.22	0.4868	4.50	0.5000
0.32	0.1255	0.77	0.2794	1.22	0.3883	1.67	0.4525	2.24	0.4875	5.00	0.5000
0.33	0.1293	0.78	0.2823	1.23	0.3907	1.68	0.4535	2.26	0.4881		
0.34	0.1331	0.79	0.2852	1.24	0.3925	1.69	0.4545	2.28	0.4887	↓	↓
0.35	0.1368	0.80	0.2881	1.25	0.3944	1.70	0.4554	2.30	0.4893	+∞	0.5
0.36	0.1406	0.81	0.2910	1.26	0.3962	1.71	0.4564	2.32	0.4898		
0.37	0.1443	0.82	0.2939	1.27	0.3980	1.72	0.4573	2.34	0.4904		
0.38	0.1480	0.83	0.2967	1.28	0.3997	1.73	0.4582	2.36	0.4909		
0.39	0.1517	0.84	0.2995	1.29	0.4015	1.74	0.4591	2.38	0.4913		
0.40	0.1554	0.85	0.3023	1.30	0.4032	1.75	0.4599	2.40	0.4918		
0.41	0.1591	0.86	0.3051	1.31	0.4049	1.76	0.4608	2.42	0.4922		
0.42	0.1628	0.87	0.3078	1.32	0.4066	1.77	0.4616	2.44	0.4927		
0.43	0.1654	0.88	0.3106	1.33	0.4082	1.78	0.4625	2.46	0.4931		
0.44	0.1700	0.89	0.3133	1.34	0.4099	1.79	0.4633	2.48	0.4934		

3. Распределение Стьюдента (двусторонняя критическая область)

α - уровень значимости, $\gamma = 1 - \alpha$ - доверительная вероятность,
 ν - число степеней свободы, $n = \nu + 1$ - объем выборки.

α	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
γ	0,90	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999
$\nu \downarrow$						
1	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,365	5,032	5,893	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,562	3,850
21	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
300	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

4. χ^2 – распределение.

ν - число степеней свободы, α - уровень значимости.

$\nu \backslash \alpha$	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,237	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,795	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	24,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,783	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	32,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,678	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,566	42,314	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

**5. Критические значения коэффициентов корреляции
для уровней значимости 0,05 и 0,01.**

d. f.	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$	d. f.	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
1	0,996717	0,9998766	17	0,4555	0,5751
2	0,995000	0,990000	18	0,4438	0,5614
3	0,8783	0,95873	19	0,4329	0,5487
4	0,8114	0,91720	20	0,4227	0,5368
5	0,7545	0,8745	25	0,3809	0,4869
6	0,7067	0,8343	30	0,3494	0,4487
7	0,6664	0,7977	35	0,3246	0,4182
8	0,6319	0,7646	40	0,3044	0,3932
9	0,6021	0,7348	45	0,2875	0,3721
10	0,5760	0,7079	50	0,2732	0,3541
11	0,5529	0,6835	60	0,2500	0,3248
12	0,5324	0,6614	70	0,2919	0,3017
13	0,5139	0,6411	80	0,2172	0,2830
14	0,4973	0,6226	90	0,2050	0,2673
15	0,4821	0,6055	100	0,1946	0,2540
16	0,4683	0,5897			

Число степеней свободы d. f. = $n - 2$ для парной корреляции, и d.f. = $n - 2 - k$ для множественной. n – объем выборки совокупности, k – число исключаемых переменных.

6. Таблица значений $q = q(\gamma, n)$.

$(1 - q) s < \sigma < (1 + q) s$, если $q < 1$, $0 < \sigma < (1 + q) s$, если $q > 1$.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Литература

1. Мацкевич И. П., Свирид Г. П. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика. Мн.: Выш. шк., 1993.
2. Лихолетов И. И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. Мн.: Выш. шк., 1976.
3. Булдык Г. М. Теория вероятностей и математическая статистика. Мн.: Выш. шк., 1989.
4. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1991.
5. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1977.
6. Герасимович А. И. Математическая статистика. М.: Высш. шк., 1983.
7. Лихолетов И. И., Мацкевич И. П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Мн.: Выш. шк., 1976.
8. Годунов Б. А., Рубанов В. С. Методические указания к выполнению курсовой работы по курсу «Высшая математика». Брест.: БрПИ., 1997.

Содержание

<i>1. Организационно-методические указания.....</i>	<i>3</i>
<i>2. Вопросы для самопроверки.....</i>	<i>3</i>
<i>3. Контрольные задания.....</i>	<i>5</i>
<i>4. Методические указания к решению контрольных заданий.....</i>	<i>36</i>
<i>5. Статистические таблицы.....</i>	<i>52</i>
<i>Литература.....</i>	<i>58</i>

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Годунов Борис Алексеевич
Рубанов Владимир Степанович
Тузик Татьяна Александровна

Математическая статистика
Задания, методические указания, статистические таблицы

Ответственный за выпуск: Б. А. Годунов

Редактор: Т. В. Строкач

Корректор: Е. В. Никитчик

Подписано к печати 23.05.2002 г. Бумага «Чайка». Формат 60×84/16. Усл. п. л. 3,5. Уч. изд. л. 3,75. Заказ № 572. Тираж 200 экз. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул. Московская, 267.