МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Задания, методические указания

Брест 2003

УДК 519.2.(076)

В первой части предлагаемой вашему вниманию работы содержится большое количество вариантов заданий по таким разделам математического программирования, как линейное программирование, включая транспортную задачу, и программирование на сетях и графах. Задания могут быть использованы преподавателями для составления аттестационных работ, а также контрольных работ для студентов всех форм обучения. Во второй части приводятся решения типовых задач с включением элементов теории. Авторы надеются, что они помогут студентам при выполнении контрольных заданий и усвоении материала этого раздела курса «Высшая математика».

Составители: Б. А. Годунов, доцент, к. ф.-м. н.
С. Т. Гусева, доцент
В. С. Рубанов, доцент, к. ф.-м. н.

Рецензент: В. М. Мадорский, канд. физ.-мат. наук, доцент, зав.кафедрой информатики и прикладной математики Брестского государственного университета им. А. С. Пушкина

Часть 1. ЗАДАНИЯ

1. Линейное программирование.

Дана задача линейного программирования.

1. Найти оптимальный план задачи симплекс-методом.
2. Решить задачу геометрически.
3. Составить двойственную задачу и найти ее оптимальный план. Проверить выполнение теорем двойственности.

ВАРИАНТ 1 а.

Найти $\max\ f(X) = 9x_1 + 16x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 46, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 87, \\ x_1 + x_2 \le 16, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 1 б.

Найти $\max\ f(X) = 13x_1 + 10x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 46, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 87, \\ x_1 + x_2 \ge 16, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 2 а.

Найти $\max\ f(X) = 15x_1 + 12x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 46, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 87, \\ x_1 + x_2 \le 16, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 2 б.

Найти $\min\ f(X) = 10x_1 + 18x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 46, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 87, \\ x_1 + x_2 \ge 16, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 3 а.

Найти $\max\ f(X) = 10x_1 + 14x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 45, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 81, \\ x_1 + x_2 \le 15, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 3 б.

Найти $\max\ f(X) = 12x_1 + 9x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 45, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 81, \\ x_1 + x_2 \ge 15, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 4 а.

Найти $\max\ f(X) = 14x_1 + 11x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 45, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 81, \\ x_1 + x_2 \le 15, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 4 б.

Найти $\min\ f(X) = 12x_1 + 7x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 45, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 81, \\ x_1 + x_2 \ge 15, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 5 а.

Найти $\max\ f(X) = 10x_1 + 12x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 48, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 78, \\ x_1 + x_2 \le 15, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 5 б.

Найти $\max\ f(X) = 8x_1 + 5x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 48, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 78, \\ x_1 + x_2 \ge 15, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 6 а.

Найти $\max\ f(X) = 11x_1 + 8x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 48, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 78, \\ x_1 + x_2 \le 15, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 6 б.

Найти $\min\ f(X) = 11x_1 + 6x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 48, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 78, \\ x_1 + x_2 \ge 15, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 7 а.

Найти $\max\ f(X) = 9x_1 + 7x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 65, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 87, \\ x_1 + x_2 \le 16, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 7 б.

Найти $\max\ f(X) = 5x_1 + 8x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 65, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 87, \\ x_1 + x_2 \ge 16, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 8 а.

Найти $\max\ f(X)=9x_1+14x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2\le 65,\\ 6x_1+3x_2\le 87,\\ x_1+x_2\le 16, \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 8 б.

Найти $\min\ f(X)=11x_1+7x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2\le 65,\\ 6x_1+3x_2\le 87,\\ x_1+x_2\ge 16, \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 9 а.

Найти $\max\ f(X)=7x_1+15x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+5x_2\le 47,\\ 4x_1+2x_2\le 44,\\ 5x_1+7x_2\le 73, \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 9 б.

Найти $\max\ f(X)=8x_1+5x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+5x_2\le 47,\\ 4x_1+2x_2\le 44,\\ 5x_1+7x_2\ge 73, \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 10 а.

Найти $\max\ f(X)=13x_1+11x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+5x_2\le 47,\\ 4x_1+2x_2\le 44,\\ 5x_1+7x_2\le 73, \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 10 б.

Найти $\min\ f(X)=6x_1+11x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+5x_2\le 47,\\ 4x_1+2x_2\le 44,\\ 5x_1+7x_2\ge 73, \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 11 а.

Найти $\max\ f(X)=3x_1+8x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+5x_2\le 49,\\ 4x_1+2x_2\le 52,\\ 5x_1+7x_2\le 83, \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 11 б.

Найти $\max\ f(X)=6x_1+5x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+5x_2\le 49,\\ 4x_1+2x_2\le 52,\\ 5x_1+7x_2\ge 83, \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 12 а.

Найти max $f(X)=7x_1+5x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+5x_2\le 49,\\ 4x_1+2x_2\le 52,\\ 5x_1+7x_2\le 83,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 12 б.

Найти min $f(X)=9x_1+5x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+5x_2\le 49,\\ 4x_1+2x_2\le 52,\\ 5x_1+7x_2\ge 83,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 13 а.

Найти max $f(X)=6x_1+5x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+5x_2\le 42,\\ 4x_1+2x_2\le 42,\\ 5x_1+7x_2\le 66,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 13 б.

Найти max $f(X)=4x_1+3x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+5x_2\le 42,\\ 4x_1+2x_2\le 42,\\ 5x_1+7x_2\ge 66,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 14 а.

Найти max $f(X)=6x_1+13x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+5x_2\le 42,\\ 4x_1+2x_2\le 42,\\ 5x_1+7x_2\le 66,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 14 б.

Найти min $f(X)=3x_1+7x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+5x_2\le 42,\\ 4x_1+2x_2\le 42,\\ 5x_1+7x_2\ge 66,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 15 а.

Найти max $f(X)=14x_1+13x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+5x_2\le 39,\\ 4x_1+2x_2\le 48,\\ 5x_1+7x_2\le 69,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 15 б.

Найти max $f(X)=11x_1+13x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+5x_2\le 39,\\ 4x_1+2x_2\le 48,\\ 5x_1+7x_2\ge 69,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 16 а.

Найти $\max\ f(X)=10x_1+19x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+5x_2\le 39,\\ 4x_1+2x_2\le 48,\\ 5x_1+7x_2\le 69,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 16 б.

Найти $\min\ f(X)=11x_1+10x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+5x_2\le 39,\\ 4x_1+2x_2\le 48,\\ 5x_1+7x_2\ge 69,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 17 а.

Найти $\max\ f(X)=7x_1+12x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1+8x_2\le 135,\\ 6x_1+2x_2\le 102,\\ 9x_1+10x_2\le 195,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 17 б.

Найти $\max\ f(X)=9x_1+14x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1+8x_2\le 135,\\ 6x_1+2x_2\le 102,\\ 9x_1+10x_2\ge 195,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 18 а.

Найти $\max\ f(X)=9x_1+8x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1+8x_2\le 135,\\ 6x_1+2x_2\le 102,\\ 9x_1+10x_2\le 195,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 18 б.

Найти $\min\ f(X)=7x_1+13x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1+8x_2\le 135,\\ 6x_1+2x_2\le 102,\\ 9x_1+10x_2\ge 195,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 19 а.

Найти $\max\ f(X)=14x_1+11x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1+8x_2\le 108,\\ 3x_1+x_2\le 45,\\ 9x_1+10x_2\le 156,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 19 б.

Найти $\max\ f(X)=9x_1+8x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1+8x_2\le 108,\\ 3x_1+x_2\le 45,\\ 9x_1+10x_2\ge 156,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 20 а.

Найти $\max\ f(X) = 7x_1 + 12x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \le 108, \\ 3x_1 + x_2 \le 45, \\ 9x_1 + 10x_2 \le 156, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

ВАРИАНТ 20 б.

Найти $\min\ f(X) = 9x_1 + 7x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \le 108, \\ 3x_1 + x_2 \le 45, \\ 9x_1 + 10x_2 \ge 156, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

ВАРИАНТ 21 а.

Найти $\max\ f(X) = 5x_1 + 8x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \le 105, \\ 3x_1 + x_2 \le 42, \\ 9x_1 + 10x_2 \le 147, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

ВАРИАНТ 21 б.

Найти $\max\ f(X) = 5x_1 + 7x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \le 105, \\ 3x_1 + x_2 \le 42, \\ 9x_1 + 10x_2 \ge 147, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

ВАРИАНТ 22 а.

Найти $\max\ f(X) = 7x_1 + 5x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \le 105, \\ 3x_1 + x_2 \le 42, \\ 9x_1 + 10x_2 \le 147, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

ВАРИАНТ 22 б.

Найти $\min\ f(X) = 3x_1 + 8x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \le 105, \\ 3x_1 + x_2 \le 42, \\ 9x_1 + 10x_2 \ge 147, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

ВАРИАНТ 23 а.

Найти $\max\ f(X) = 3x_1 + 5x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 51, \\ 4x_1 + x_2 \le 39, \\ x_1 + x_2 \le 12, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

ВАРИАНТ 23 б.

Найти $\max\ f(X) = 3x_1 + 5x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 51, \\ 4x_1 + x_2 \le 39, \\ x_1 + x_2 \ge 12, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

ВАРИАНТ 24 а.

Найти $\max\ f(X)=9x_1+7x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases}2x_1+5x_2\le 51,\\4x_1+x_2\le 39,\\x_1+x_2\le 12,\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 24 б.

Найти $\min\ f(X)=3x_1+7x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases}2x_1+5x_2\le 51,\\4x_1+x_2\le 39,\\x_1+x_2\ge 12,\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 25 а.

Найти $\max\ f(X)=5x_1+3x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases}2x_1+5x_2\le 39,\\4x_1+x_2\le 33,\\x_1+x_2\le 9,\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 25 б.

Найти $\max\ f(X)=3x_1+4x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases}2x_1+5x_2\le 39,\\4x_1+x_2\le 33,\\x_1+x_2\ge 9,\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 26 а.

Найти $\max\ f(X)=4x_1+5x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases}2x_1+5x_2\le 39,\\4x_1+x_2\le 33,\\x_1+x_2\le 9,\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 26 б.

Найти $\min\ f(X)=5x_1+3x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases}2x_1+5x_2\le 39,\\4x_1+x_2\le 33,\\x_1+x_2\ge 9,\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 27 а.

Найти $\max\ f(X)=11x_1+15x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases}2x_1+5x_2\le 51,\\5x_1+3x_2\le 61,\\7x_1+8x_2\le 93,\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 27 б.

Найти $\max\ f(X)=3x_1+2x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases}2x_1+5x_2\le 51,\\5x_1+3x_2\le 61,\\7x_1+8x_2\ge 93,\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ВАРИАНТ 28 а.

Найти $\max \; f(X) = 12\,x_1 + 13\,x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 51, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 61, \\ 7x_1 + 8x_2 \le 93, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 28 б.

Найти $\min \; f(X) = 15x_1 + 8x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 51, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 61, \\ 7x_1 + 8x_2 \ge 93, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 29 а.

Найти $\max \; f(X) = 5\,x_1 + 13\,x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \le 70, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 80, \\ 6x_1 + 9x_2 \le 123, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 29 б.

Найти $\max \; f(X) = 13\,x_1 + 12\,x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \le 70, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 80, \\ 6x_1 + 9x_2 \ge 123, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 30 а.

Найти $\max \; f(X) = 10\,x_1 + 10\,x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \le 70, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 80, \\ 6x_1 + 9x_2 \le 123, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0.$$

ВАРИАНТ 30 б.

Найти $\min \; f(X) = 5\,x_1 + 17\,x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \le 70, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 80, \\ 6x_1 + 9x_2 \ge 123, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0.$$

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

У поставщиков A_i имеется некоторый груз в количествах a_i, который требуется перевезти потребителям B_j в количествах b_j по ценам ден. ед. за перевозку единицы груза от A_i к B_j. Составить математическую модель задачи минимизации суммарных затрат на перевозки и найти оптимальный план ее.

Вариант 1 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	15	8	9	5	152
A_2	7	10	12	6	173
A_3	8	11	7	8	175
b_j	93	116	126	165	

Вариант 1 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	15	8	9	5	150
A_2	7	10	12	6	170
A_3	8	11	7	8	180
b_j	190	130	100	80	

Вариант 2 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12	10	13	6	141
A_2	5	9	11	4	177
A_3	10	6	8	9	182
b_j	81	102	174	143	

Вариант 2 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12	10	13	6	250
A_2	5	9	11	4	110
A_3	10	6	8	9	140
b_j	120	130	100	150	

Вариант 3 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	10	7	8	148
A_2	8	9	12	4	166
A_3	6	4	9	11	186
b_j	120	131	104	145	

Вариант 3 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	10	7	8	150
A_2	8	9	12	4	170
A_3	6	4	9	11	180
b_j	120	200	100	80	

Вариант 4 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14	9	8	6	134
A_2	10	5	7	4	179
A_3	9	7	9	5	187
b_j	143	91	102	164	

Вариант 4 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14	9	8	6	230
A_2	10	5	7	4	170
A_3	9	7	9	5	100
b_j	140	90	110	160	

Вариант 5 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	24	19	17	13	157
A_2	21	16	19	14	166
A_3	14	17	12	17	177
b_j	101	179	164	206	

Вариант 5 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	24	19	17	13	120
A_2	21	16	19	14	190
A_3	14	17	12	17	260
b_j	120	170	150	130	

Вариант 6 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	27	23	18	14	205
A_2	25	18	14	16	198
A_3	17	19	26	15	247
b_j	151	192	139	168	

Вариант 6 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	27	23	18	14	140
A_2	25	18	14	16	200
A_3	17	19	26	15	310
b_j	150	190	140	170	

Вариант 7 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	25	26	21	19	220
A_2	24	15	19	21	190
A_3	12	17	15	22	240
b_j	185	163	207	95	

Вариант 7 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	25	26	21	19	220
A_2	24	15	19	21	190
A_3	12	17	15	22	240
b_j	180	230	100	140	

Вариант 8 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	18	17	16	14	223
A_2	17	16	14	18	196
A_3	16	14	18	17	231
b_j	208	170	182	90	

Вариант 8 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	18	17	16	14	220
A_2	17	16	14	18	190
A_3	16	14	18	17	240
b_j	210	200	110	130	

Вариант 9 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	13	12	9	6	201
A_2	12	11	14	8	154
A_3	9	9	12	11	245
b_j	123	171	132	174	

Вариант 9 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	13	12	9	6	210
A_2	12	11	14	8	150
A_3	9	9	12	11	240
b_j	80	130	140	250	

Вариант 10 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	12	9	9	213
A_2	8	14	11	12	152
A_3	6	9	12	13	235
b_j	158	187	101	154	

Вариант 10 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	12	9	9	210
A_2	8	14	11	12	150
A_3	6	9	12	13	240
b_j	90	120	200	190	

Вариант 11 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	15	12	14	16	200
A_2	10	13	11	9	152
A_3	7	8	10	13	248
b_j	180	120	150	150	

Вариант 11 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	15	12	14	16	210
A_2	10	13	11	9	150
A_3	7	8	10	13	240
b_j	150	60	170	220	

Вариант 12 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	13	8	4	216
A_2	9	11	13	7	148
A_3	11	9	6	14	236
b_j	164	136	193	107	

Вариант 12 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	13	8	4	210
A_2	9	11	13	7	150
A_3	11	9	6	14	240
b_j	170	190	140	100	

Вариант 13 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	31	28	27	21	210
A_2	26	24	21	18	225
A_3	20	19	28	29	115
b_j	182	191	53	124	

Вариант 13 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	31	28	27	21	260
A_2	26	24	21	18	110
A_3	20	19	28	29	180
b_j	180	190	50	130	

Вариант 14 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	27	26	21	18	204
A_2	23	24	26	19	235
A_3	17	24	23	15	111
b_j	98	127	201	124	

Вариант 14 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	27	26	21	18	240
A_2	23	24	26	19	150
A_3	17	24	23	15	180
b_j	90	130	200	130	

Вариант 15 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	19	21	15	11	203
A_2	14	17	19	13	231
A_3	10	13	12	15	116
b_j	90	133	152	175	

Вариант 15 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	19	21	15	11	100
A_2	14	17	19	13	120
A_3	10	13	12	15	330
b_j	100	130	150	170	

Вариант 16 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10	8	5	3	208
A_2	8	9	4	6	226
A_3	6	7	5	8	116
b_j	182	177	127	64	

Вариант 16 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10	8	5	3	130
A_2	8	9	4	6	150
A_3	6	7	5	8	270
b_j	280	70	130	70	

Вариант 17 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	40	35	29	25	158
A_2	18	19	20	19	191
A_3	35	37	41	43	151
b_j	127	117	112	144	

Вариант 17 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	40	35	29	25	250
A_2	18	19	20	19	90
A_3	35	37	41	43	160
b_j	130	120	110	140	

Вариант 18 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	43	41	37	35	168
A_2	37	39	33	29	188
A_3	25	29	30	33	144
b_j	96	121	176	107	

Вариант 18 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	43	41	37	35	100
A_2	37	39	33	29	290
A_3	25	29	30	33	110
b_j	90	120	180	110	

Вариант 19 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14	15	11	8	163
A_2	10	12	13	10	193
A_3	7	10	15	16	144
b_j	143	172	102	83	

Вариант 19 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14	15	11	8	160
A_2	10	12	13	10	190
A_3	7	10	15	16	150
b_j	70	90	180	160	

Вариант 20 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	18	16	17	13	168
A_2	14	15	19	10	185
A_3	9	12	13	17	147
b_j	162	202	65	71	

Вариант 20 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	18	16	17	13	160
A_2	14	15	19	10	190
A_3	9	12	13	17	150
b_j	120	230	20	130	

Вариант 21 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12	14	10	8	145
A_2	10	13	15	9	276
A_3	7	6	9	11	279
b_j	233	191	148	128	

Вариант 21 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12	14	10	8	140
A_2	10	13	15	9	270
A_3	7	6	9	11	290
b_j	90	50	300	260	

Вариант 22 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	9	6	7	140
A_2	9	15	13	10	270
A_3	8	10	14	12	290
b_j	201	149	187	163	

Вариант 22 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	9	6	7	140
A_2	9	15	13	10	270
A_3	8	10	14	12	290
b_j	200	210	190	100	

Вариант 23 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	15	14	17	10	145
A_2	12	14	15	11	273
A_3	9	10	12	14	282
b_j	160	146	216	178	

Вариант 23 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	15	14	17	10	140
A_2	12	14	15	11	270
A_3	9	10	12	14	290
b_j	180	230	170	120	

Вариант 24 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14	12	10	9	147
A_2	11	15	14	12	267
A_3	10	17	14	15	286
b_j	161	191	118	230	

Вариант 24 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14	12	10	9	140
A_2	11	15	14	12	270
A_3	10	17	14	15	290
b_j	110	120	180	290	

Вариант 25 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	19	16	13	10	215
A_2	13	10	19	16	181
A_3	10	19	13	16	154
b_j	162	164	107	117	

Вариант 25 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	19	16	13	10	320
A_2	13	10	19	16	160
A_3	10	19	13	16	70
b_j	180	140	110	120	

Вариант 26 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	16	13	19	10	206
A_2	16	19	10	13	183
A_3	10	13	16	19	161
b_j	174	141	113	122	

Вариант 26 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	16	13	19	10	170
A_2	16	19	10	13	150
A_3	10	13	16	19	230
b_j	180	140	110	120	

Вариант 27 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	21	23	17	14	202
A_2	15	18	17	12	185
A_3	14	15	19	22	163
b_j	154	148	104	144	

Вариант 27 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	21	23	17	14	310
A_2	15	18	17	12	70
A_3	14	15	19	22	170
b_j	160	150	100	140	

Вариант 28 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	22	19	15	14	217
A_2	12	17	18	15	176
A_3	14	17	23	21	157
b_j	159	155	121	115	

Вариант 28 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	22	19	15	14	130
A_2	12	17	18	15	80
A_3	14	17	23	21	160
b_j	110	100	100	60	

Вариант 29 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	28	26	22	18	193
A_2	24	27	29	21	175
A_3	18	15	22	23	232
b_j	205	113	176	106	

Вариант 29 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	28	26	22	18	200
A_2	24	27	29	21	170
A_3	18	15	22	23	230
b_j	110	90	220	180	

Вариант 30 а.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	23	22	15	18	211
A_2	21	29	27	24	163
A_3	18	22	26	28	226
b_j	121	170	159	150	

Вариант 30 б.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	23	22	15	18	200
A_2	21	29	27	24	170
A_3	18	22	26	28	230
b_j	130	240	100	130	

Вариант 1 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	15	8	9	5	152
A_2	7	10	12	6	173
A_3	8	11	7	8	175
b_j	93	166	126	165	

Вариант 2 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	15	8	9	5	150
A_2	7	10	12	6	180
A_3	8	11	7	8	200
b_j	190	130	100	80	

Вариант 3 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12	10	13	6	141
A_2	5	9	11	4	177
A_3	10	6	8	9	182
b_j	81	162	174	143	

Вариант 4 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12	10	13	6	270
A_2	5	9	11	4	150
A_3	10	6	8	9	140
b_j	120	130	100	150	

Вариант 5 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	10	7	8	148
A_2	8	9	12	4	166
A_3	6	4	9	11	186
b_j	120	131	154	145	

Вариант 6 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	10	7	8	150
A_2	8	9	12	4	190
A_3	6	4	9	11	210
b_j	120	200	100	80	

Вариант 7 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14	9	8	6	134
A_2	10	5	7	4	179
A_3	9	7	9	5	187
b_j	183	91	102	164	

Вариант 8 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14	9	8	6	250
A_2	10	5	7	4	190
A_3	9	7	9	5	100
b_j	140	90	110	160	

Вариант 9 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	24	19	17	13	157
A_2	21	16	19	14	166
A_3	14	17	12	17	177
b_j	101	179	164	206	

Вариант 10 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	24	19	17	13	120
A_2	21	16	19	14	190
A_3	14	17	12	17	260
b_j	120	170	150	130	

Вариант 11 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	27	23	18	14	205
A_2	25	18	14	16	198
A_3	17	19	26	15	247
b_j	151	192	189	168	

Вариант 12 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	27	23	18	14	140
A_2	25	18	14	16	210
A_3	17	19	26	15	350
b_j	150	190	140	170	

Вариант 13 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	25	26	21	19	220
A_2	24	15	19	21	190
A_3	12	17	15	22	240
b_j	185	163	227	95	

Вариант 14 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	25	26	21	19	250
A_2	24	15	19	21	190
A_3	12	17	15	22	270
b_j	180	230	100	140	

Вариант 15 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	18	17	16	14	223
A_2	17	16	14	18	196
A_3	16	14	18	17	231
b_j	248	170	182	90	

Вариант 16 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	18	17	16	14	230
A_2	17	16	14	18	190
A_3	16	14	18	17	280
b_j	210	200	110	130	

Вариант 17 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	13	12	9	6	201
A_2	12	11	14	8	154
A_3	9	9	12	11	245
b_j	123	171	172	174	

Вариант 18 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	13	12	9	6	250
A_2	12	11	14	8	160
A_3	9	9	12	11	240
b_j	80	130	140	250	

Вариант 19 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	12	9	9	213
A_2	8	14	11	12	152
A_3	6	9	12	13	235
b_j	158	187	151	154	

Вариант 20 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	12	9	9	240
A_2	8	14	11	12	170
A_3	6	9	12	13	240
b_j	90	120	200	190	

Вариант 21 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	15	12	14	16	200
A_2	10	13	11	9	152
A_3	7	8	10	13	248
b_j	180	120	190	150	

Вариант 22 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	15	12	14	16	240
A_2	10	13	11	9	180
A_3	7	8	10	13	240
b_j	150	60	170	220	

Вариант 23 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	13	8	4	216
A_2	9	11	13	7	148
A_3	11	9	6	14	236
b_j	164	136	193	167	

Вариант 24 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	13	8	4	210
A_2	9	11	13	7	170
A_3	11	9	6	14	280
b_j	170	190	140	100	

Вариант 25 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	31	28	27	21	210
A_2	26	24	21	18	225
A_3	20	19	28	29	115
b_j	182	191	53	124	

Вариант 26 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	31	28	27	21	290
A_2	26	24	21	18	170
A_3	20	19	28	29	180
b_j	180	190	50	130	

Вариант 27 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	27	26	21	18	204
A_2	23	24	26	19	235
A_3	17	24	23	15	111
b_j	98	127	241	124	

Вариант 28 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	27	26	21	18	280
A_2	23	24	26	19	180
A_3	17	24	23	15	180
b_j	90	130	200	130	

Вариант 29 в.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	19	21	15	11	203
A_2	14	17	19	13	231
A_3	10	13	12	15	116
b_j	90	183	152	175	

Вариант 30 в.

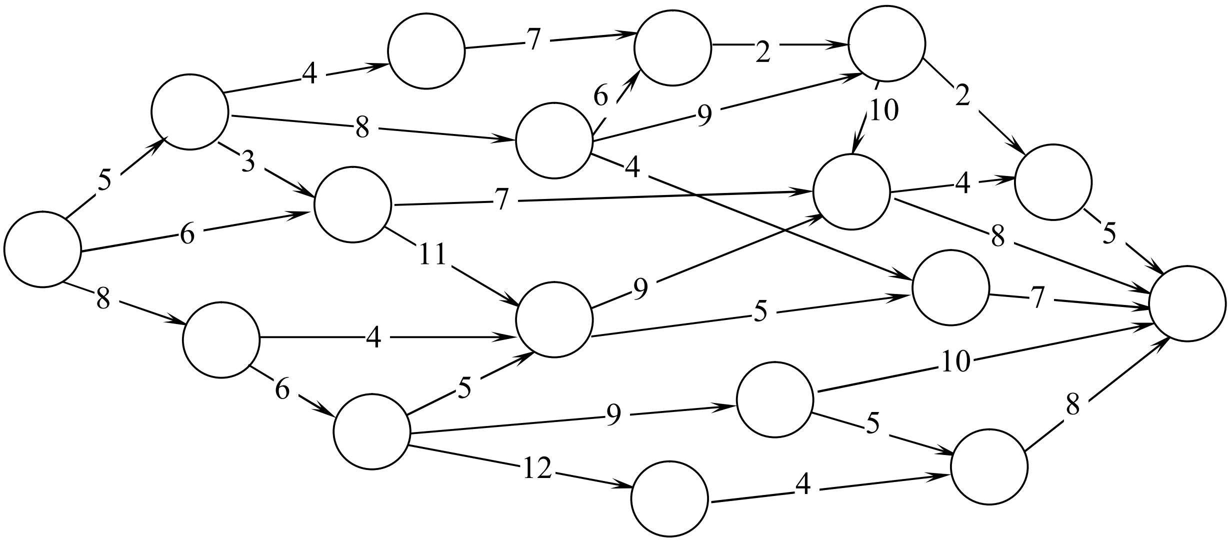
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	19	21	15	11	140
A_2	14	17	19	13	150
A_3	10	13	12	15	330
b_j	100	130	150	170	

3. Расчет сетевого графика.

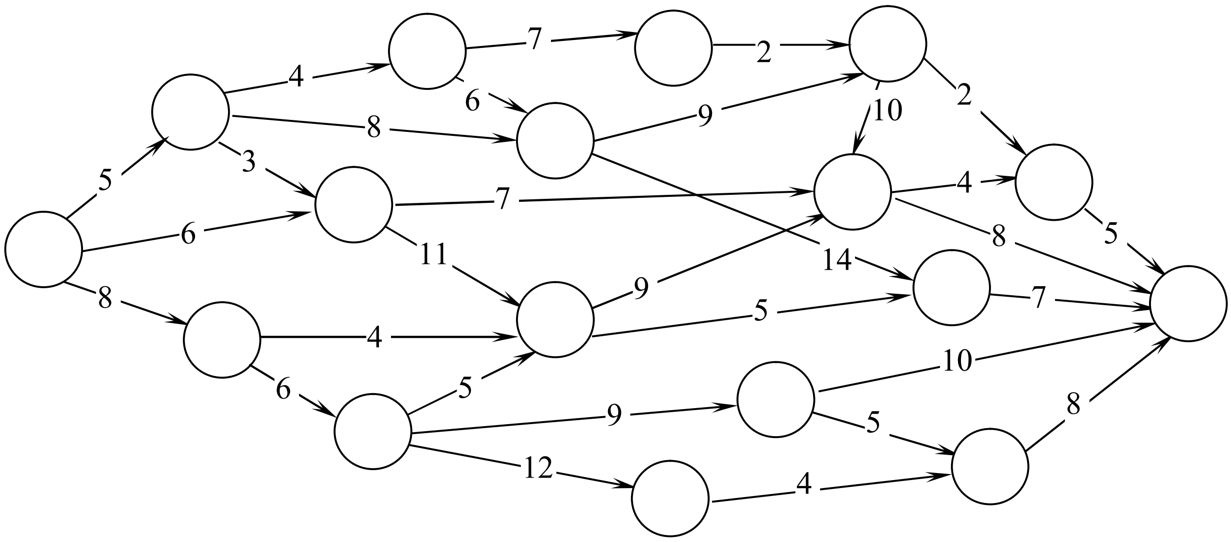
Задан сетевой график выполнения некоторого комплекса работ и продолжительности выполнения работ. Требуется определить:

1. Исходное событие I и завершающее событие S.
2. Номера вершин в натуральном порядке.
3. Ранние и поздние сроки свершения событий.
4. Критический путь и критическое время.
5. Резервы времени событий и интервалы свободы.
6. Ранние и поздние сроки начала и окончания всех работ.
7. Полный и свободный резервы времени выполнения работ.

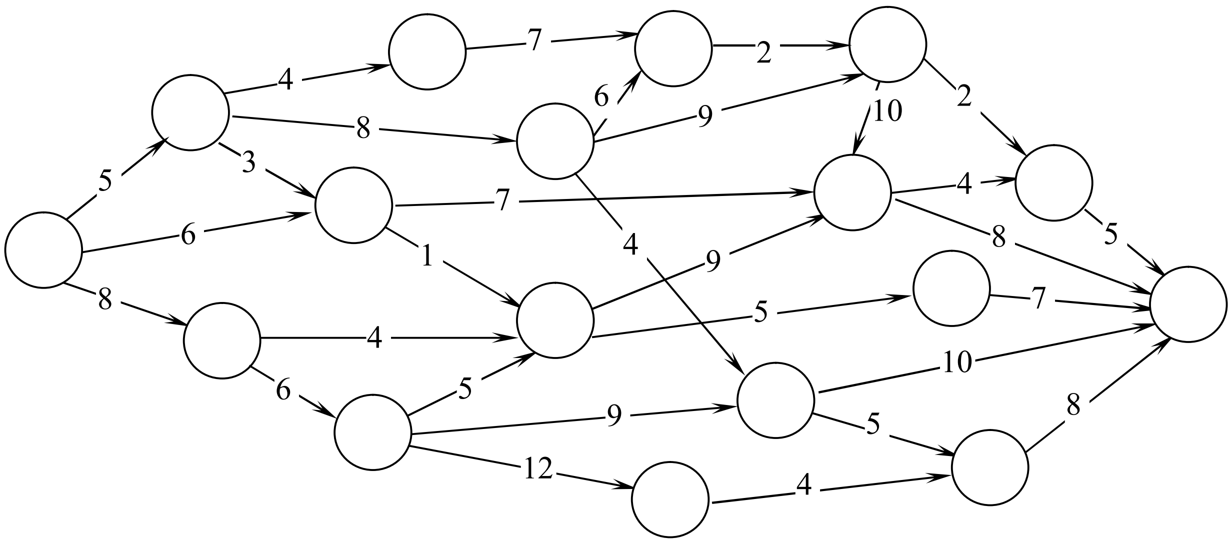
Вариант 1.



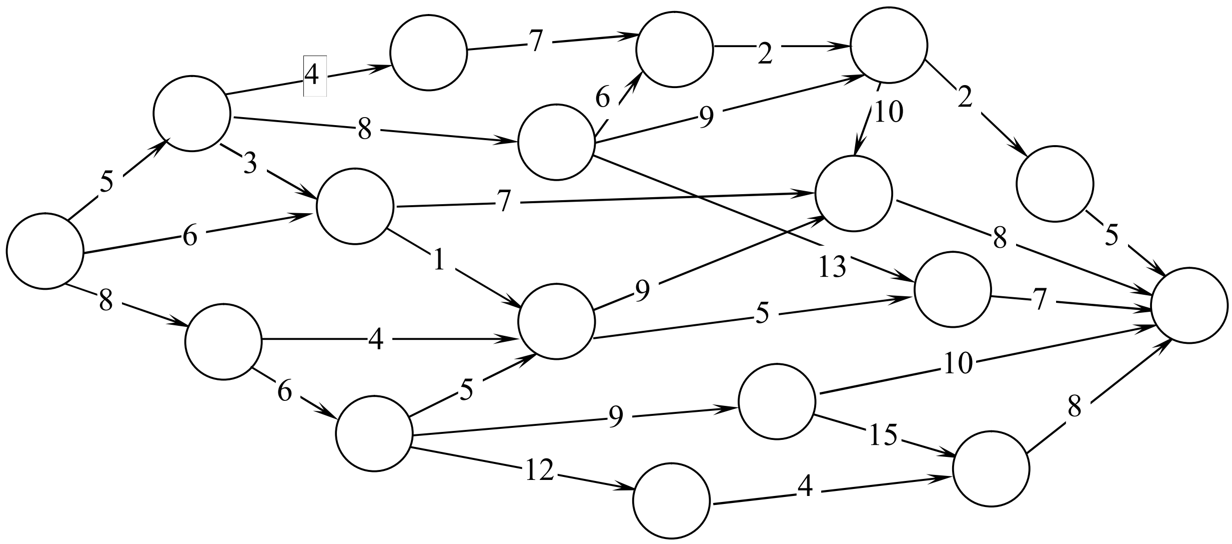
Вариант 2.



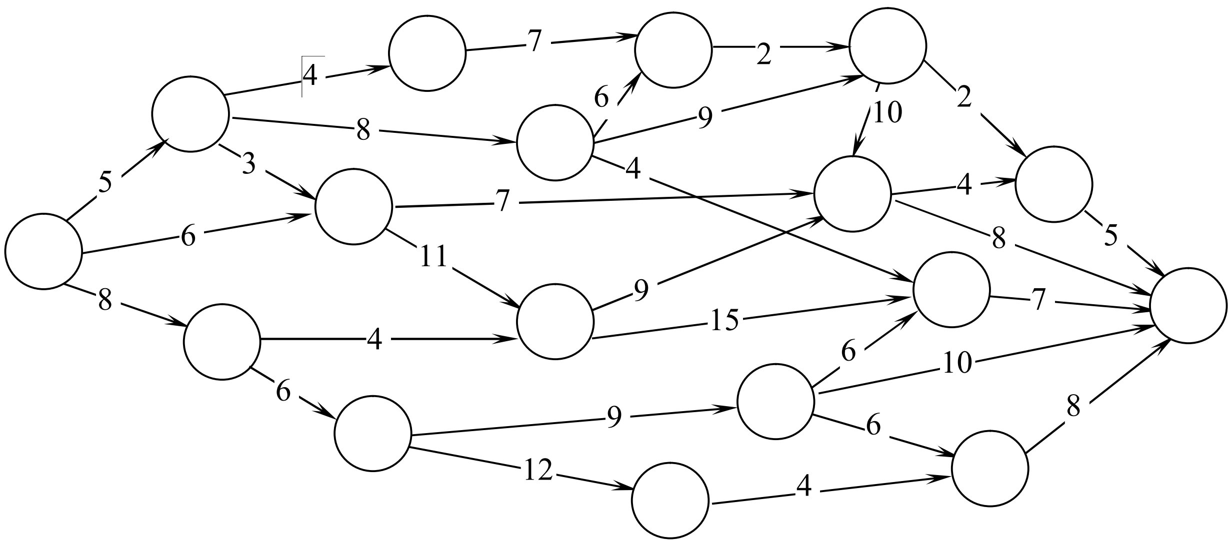
Вариант 3.



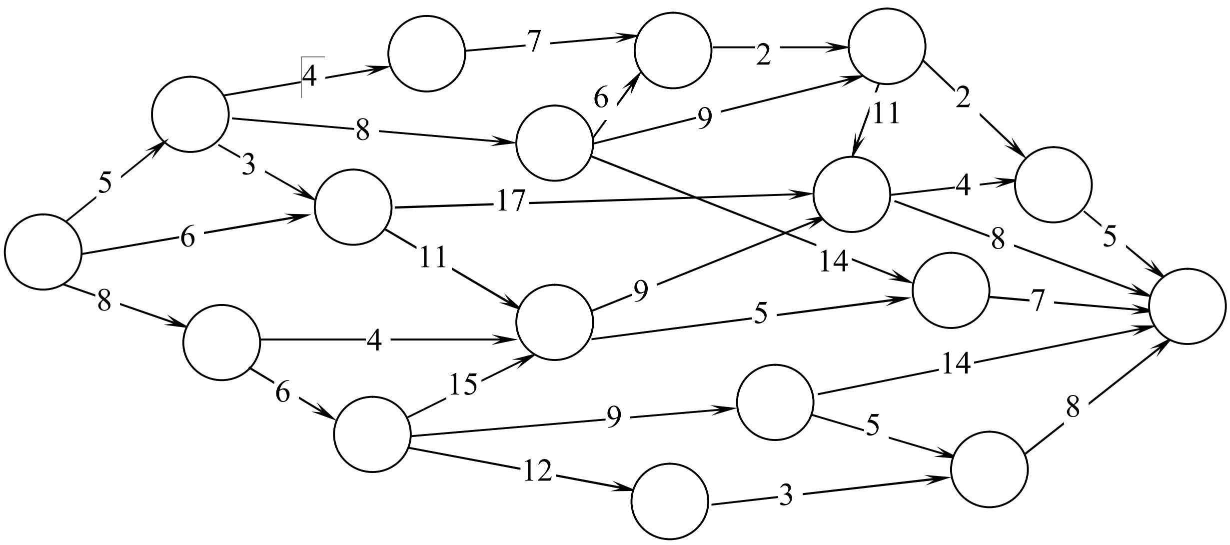
Вариант 4.



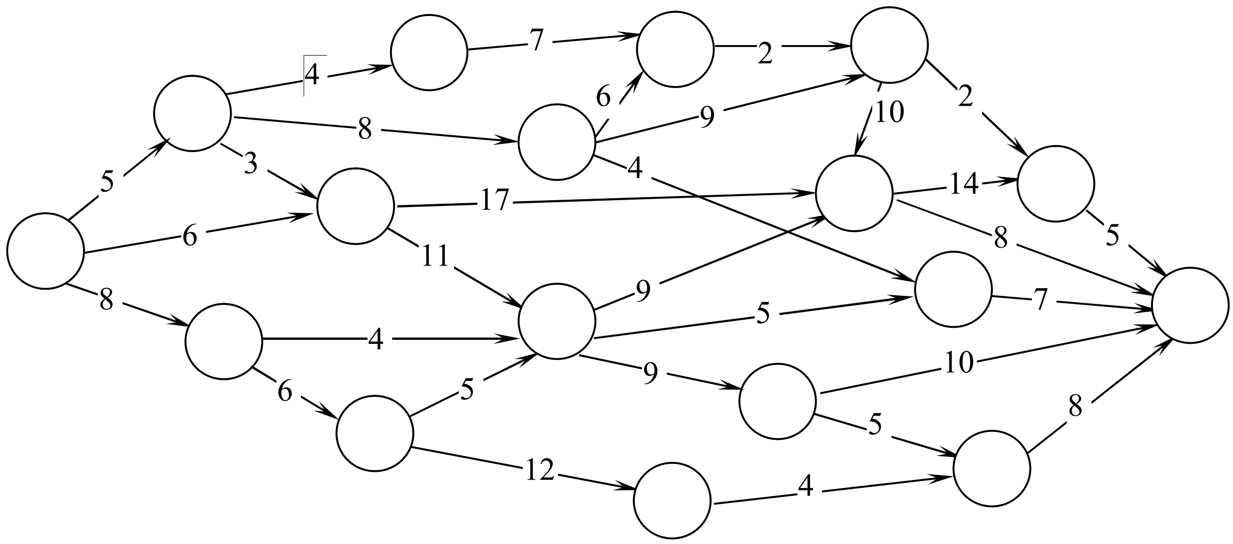
Вариант 5.



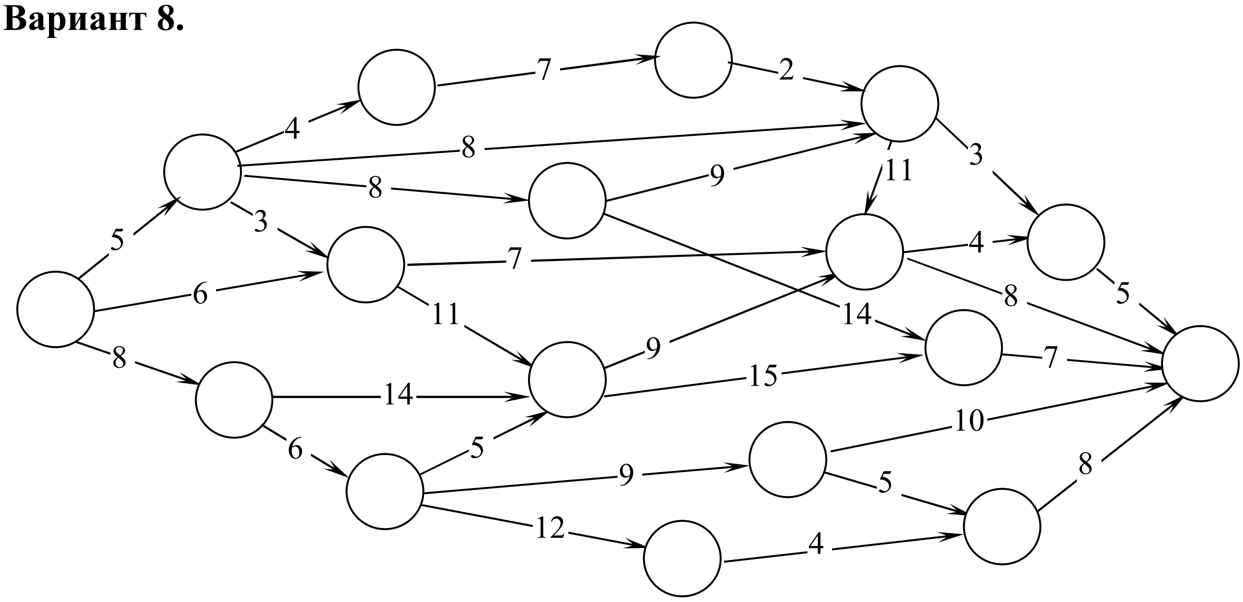
Вариант 6.



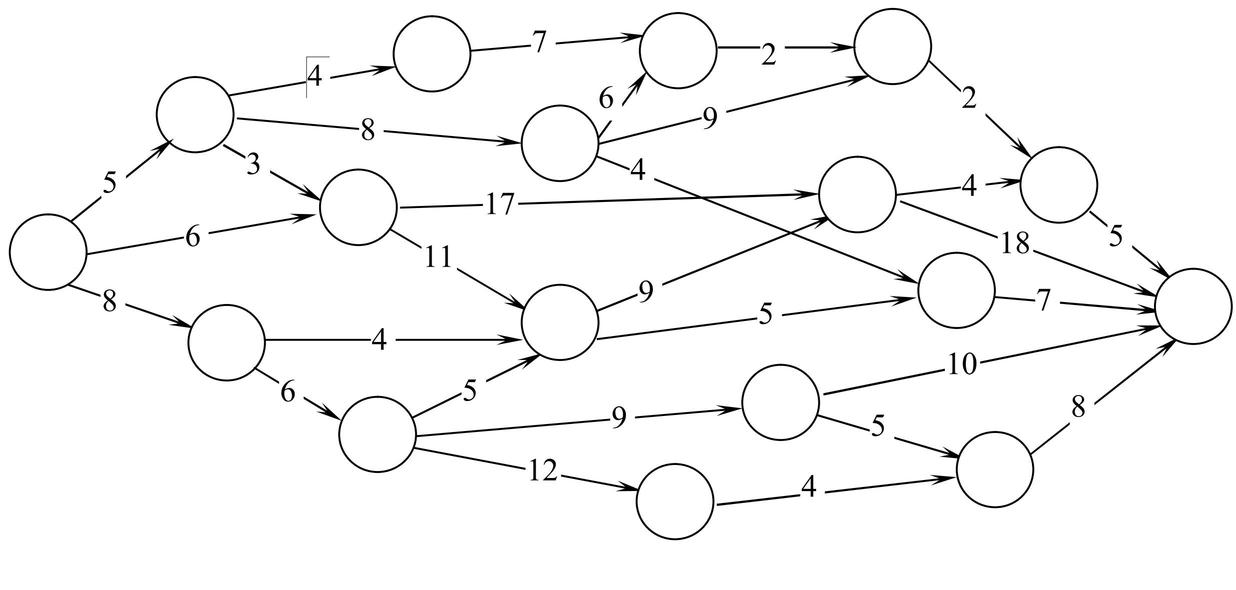
Вариант 7.



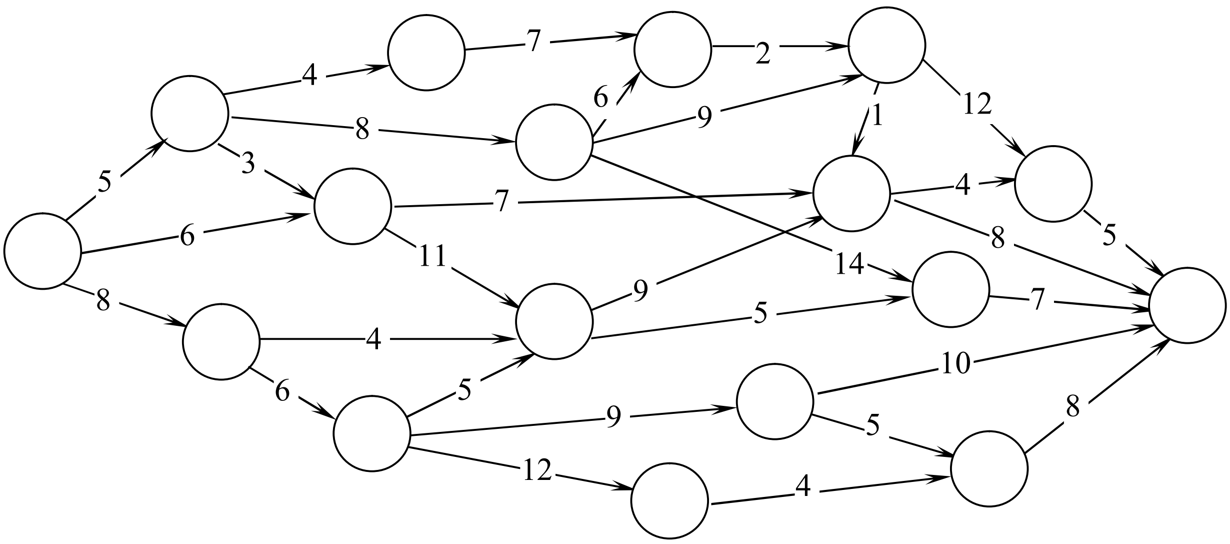
Вариант 8.



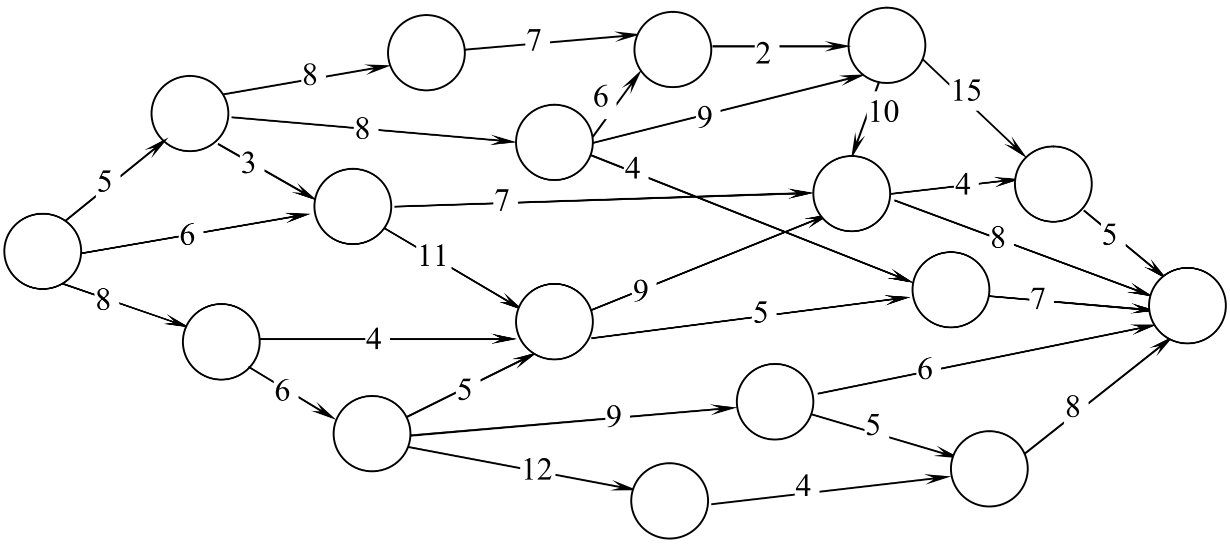
Вариант 9.



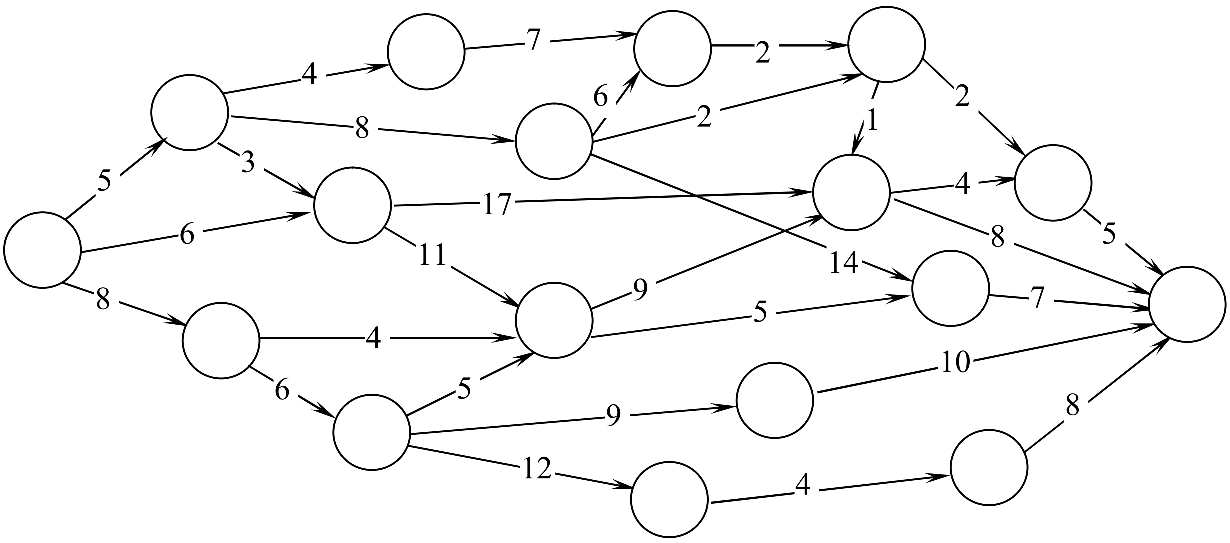
Вариант 10.



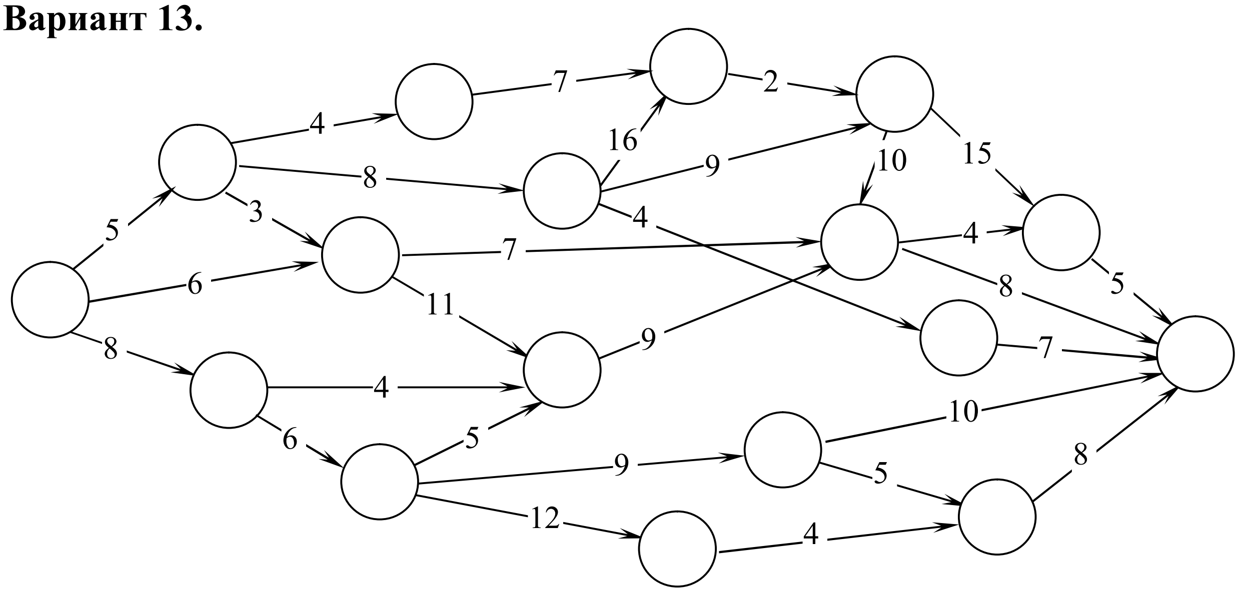
Вариант 11.



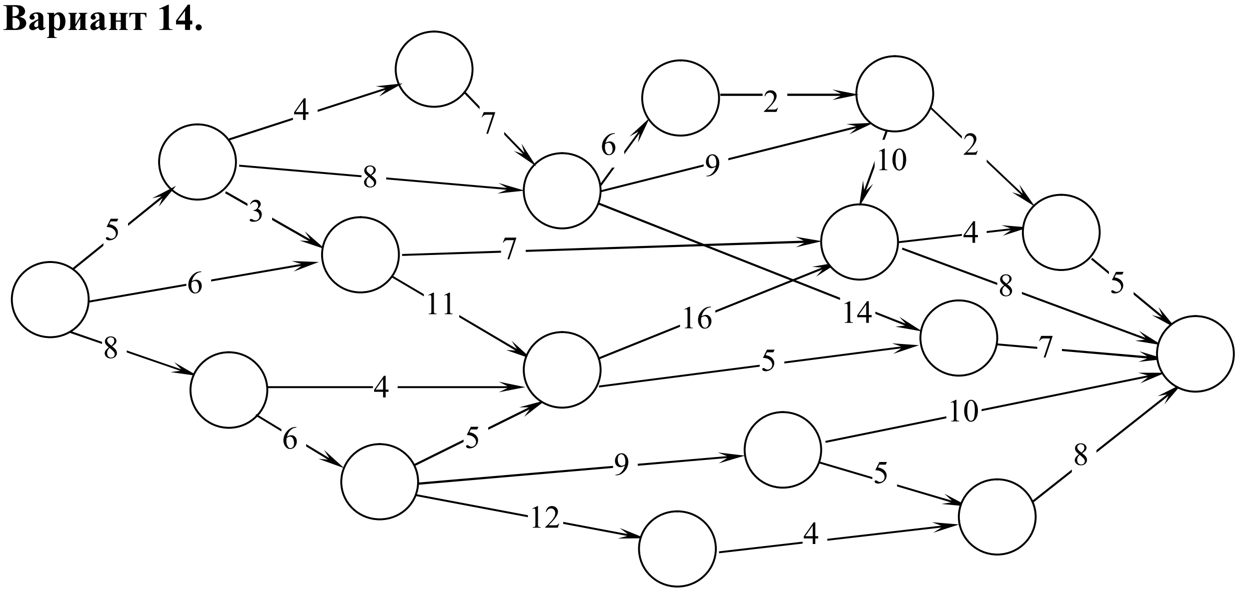
Вариант 12.



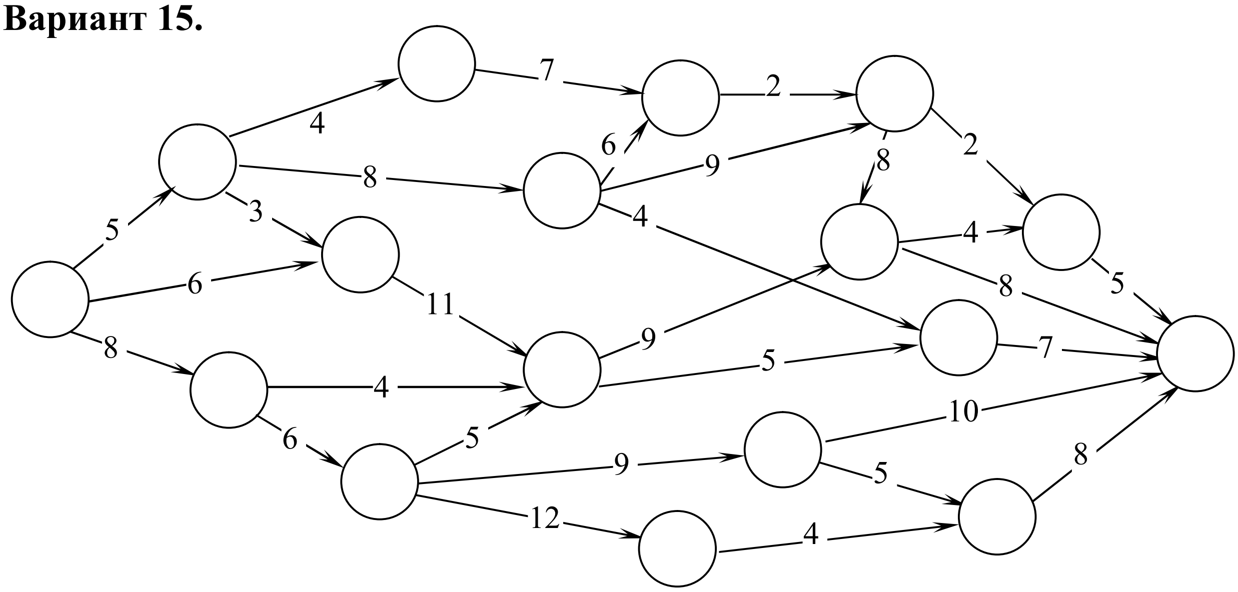
Вариант 13.



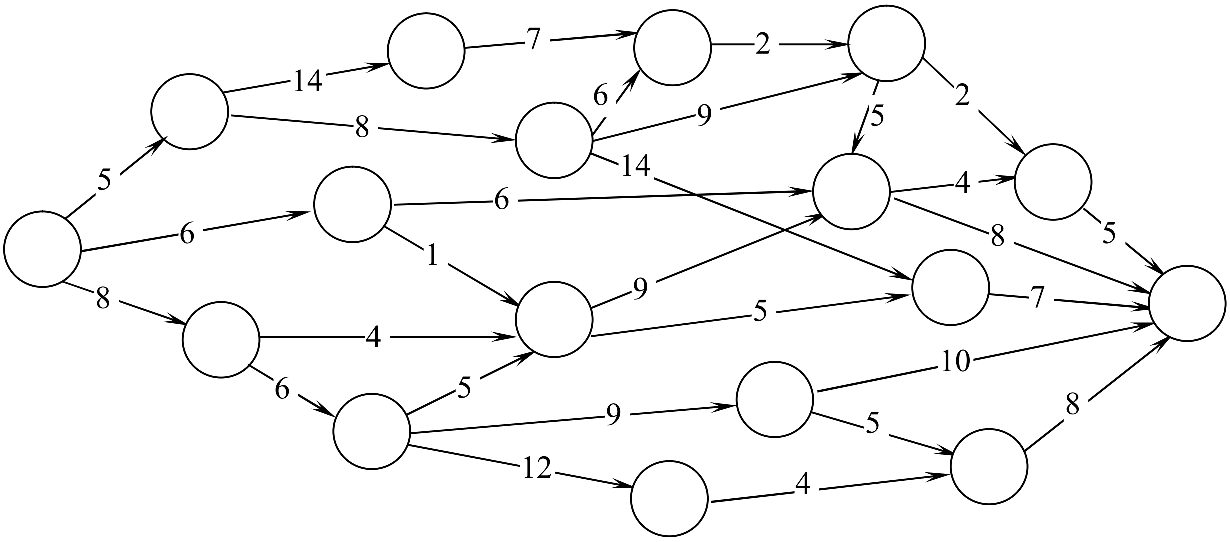
Вариант 14.



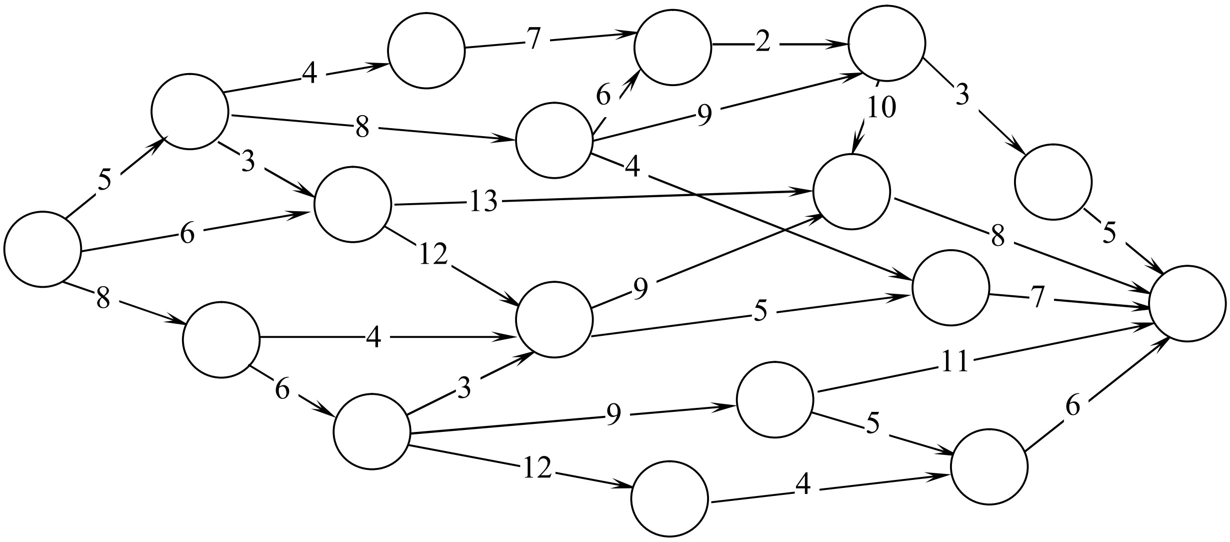
Вариант 15.



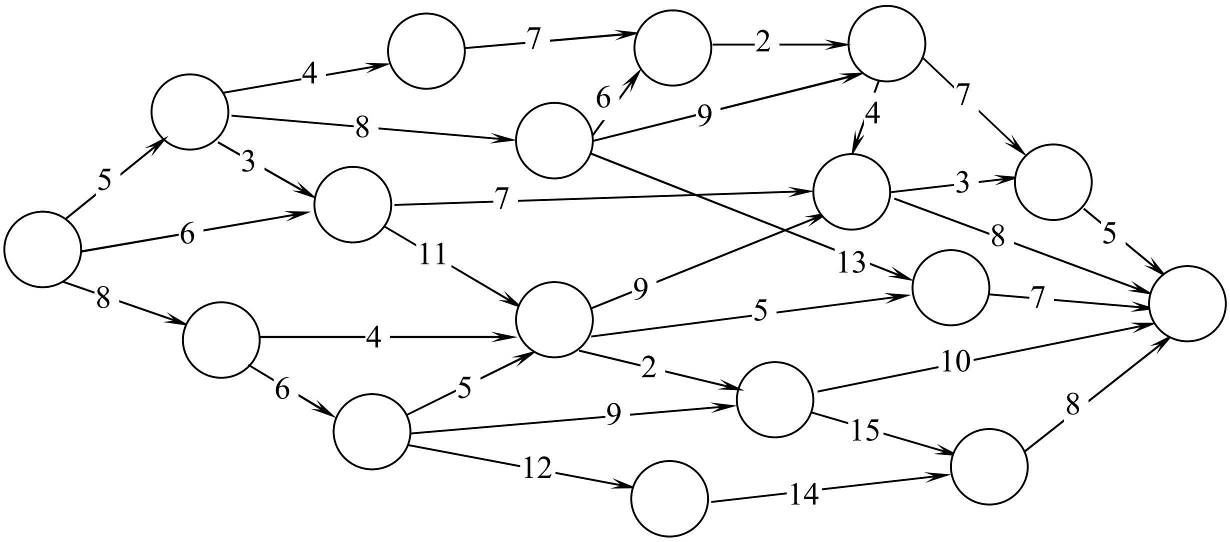
Вариант 16.



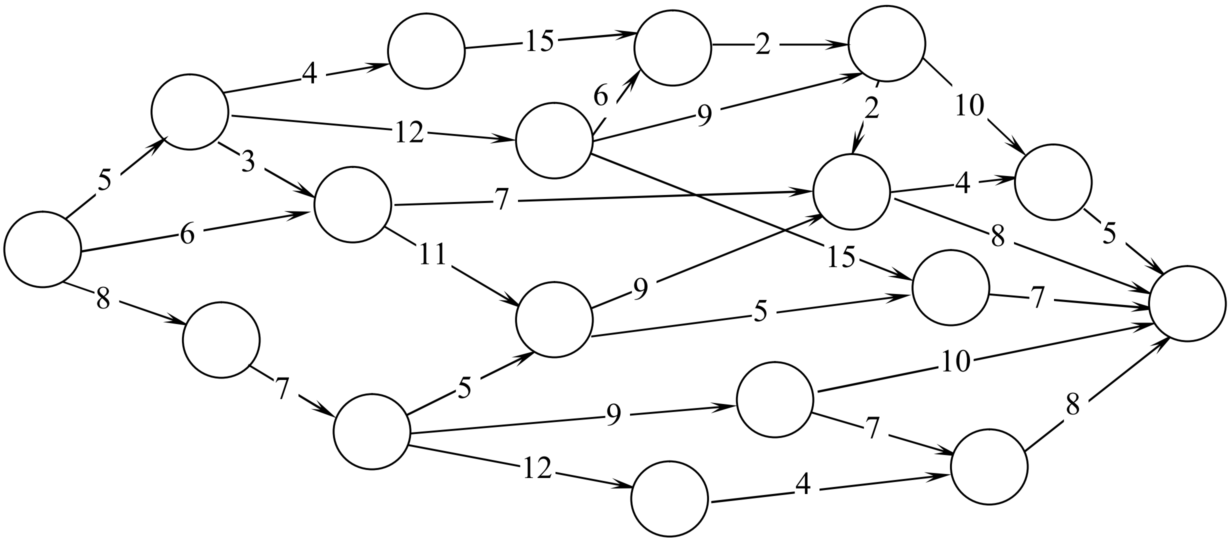
Вариант 17.



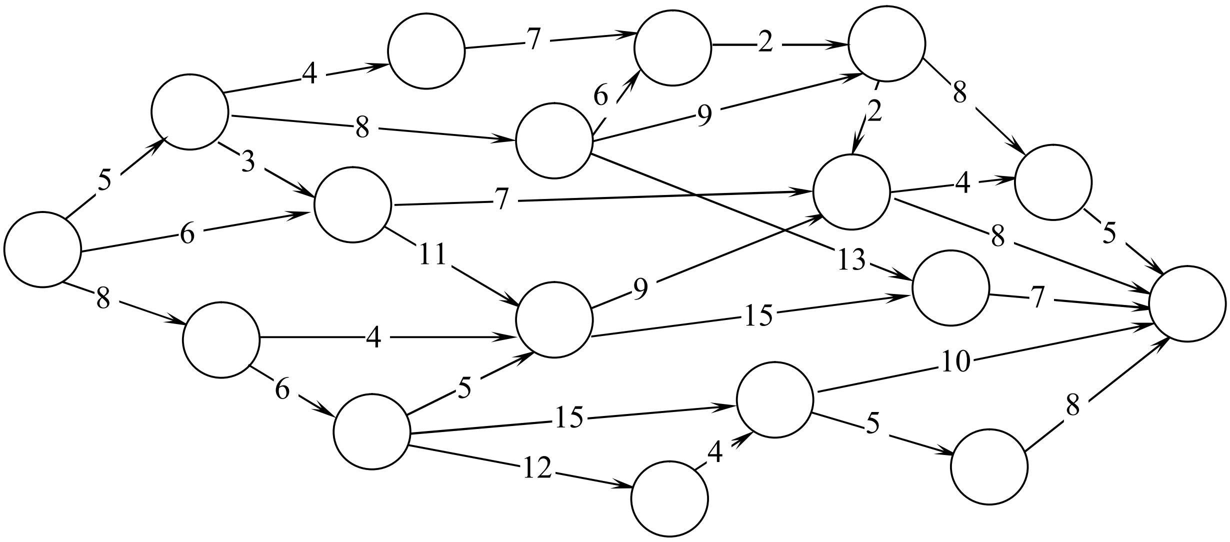
Вариант 18.



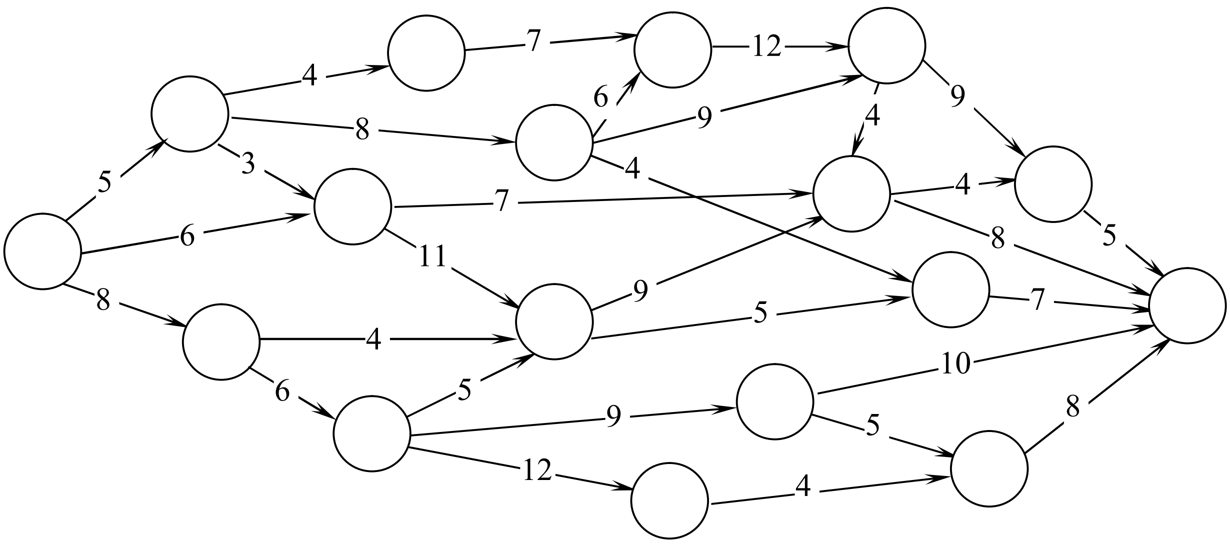
Вариант 19.



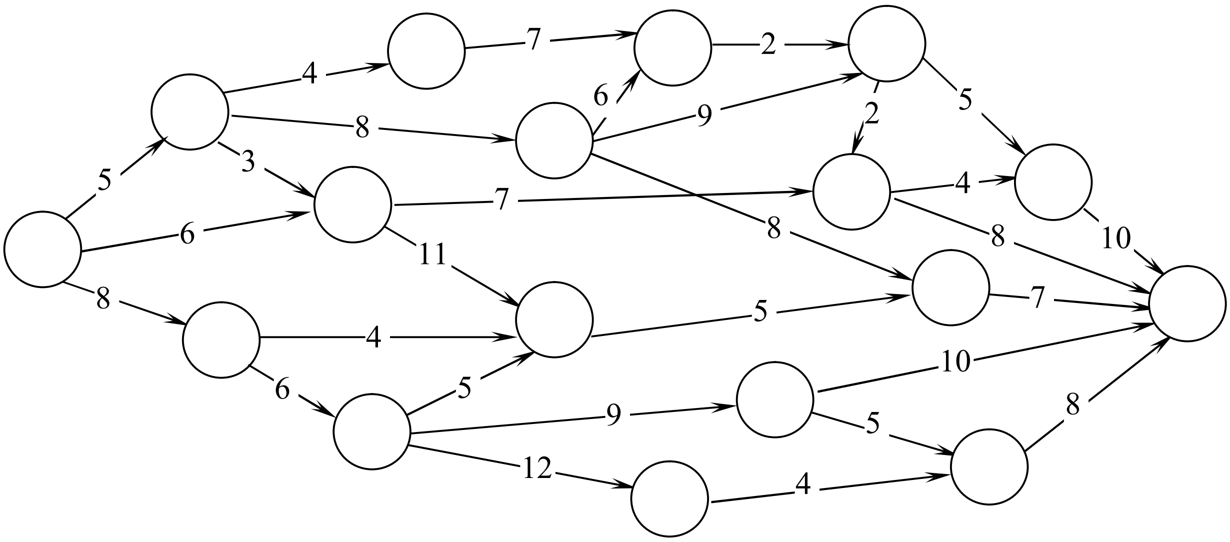
Вариант 20.



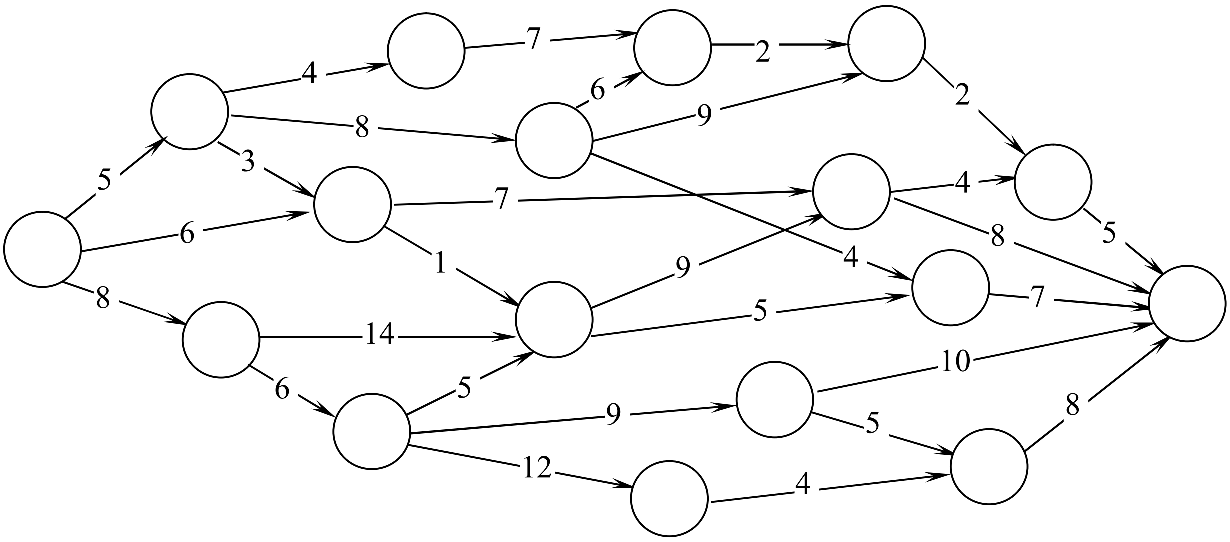
Вариант 21.



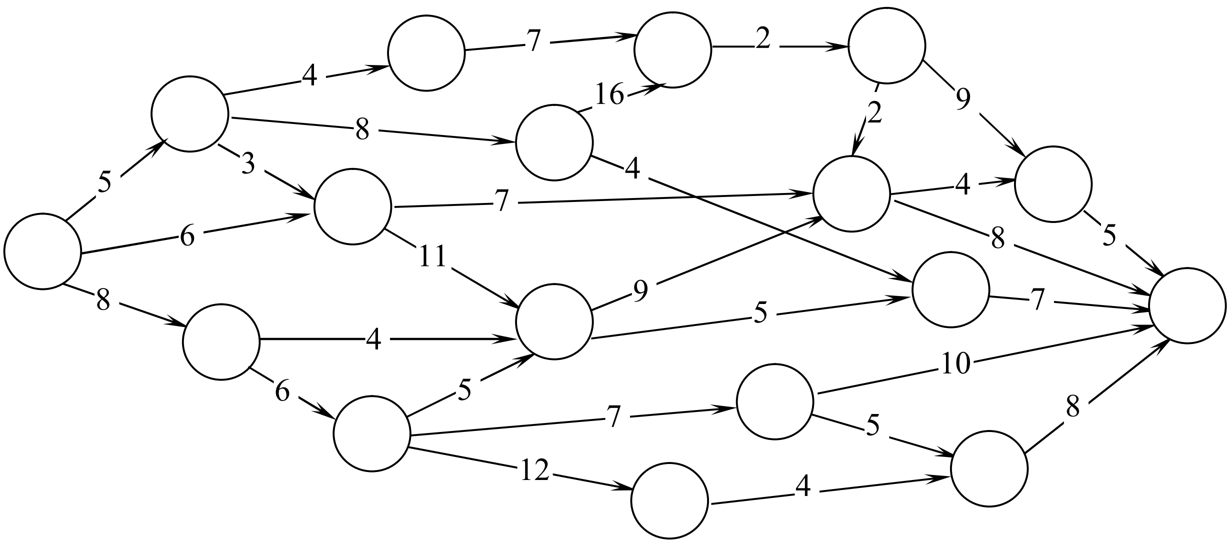
Вариант 22.



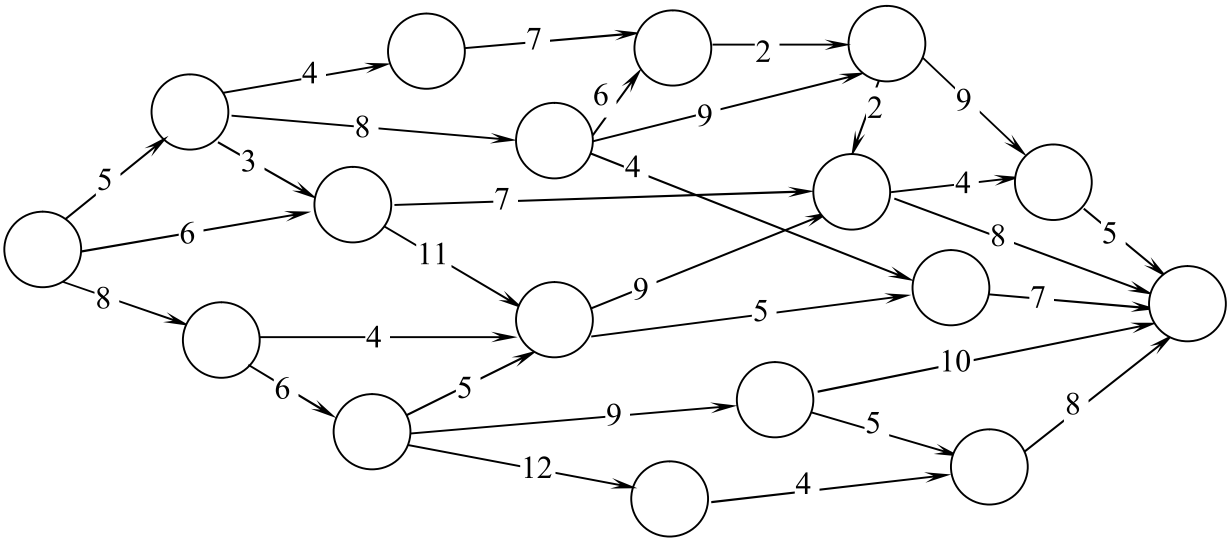
Вариант 23.



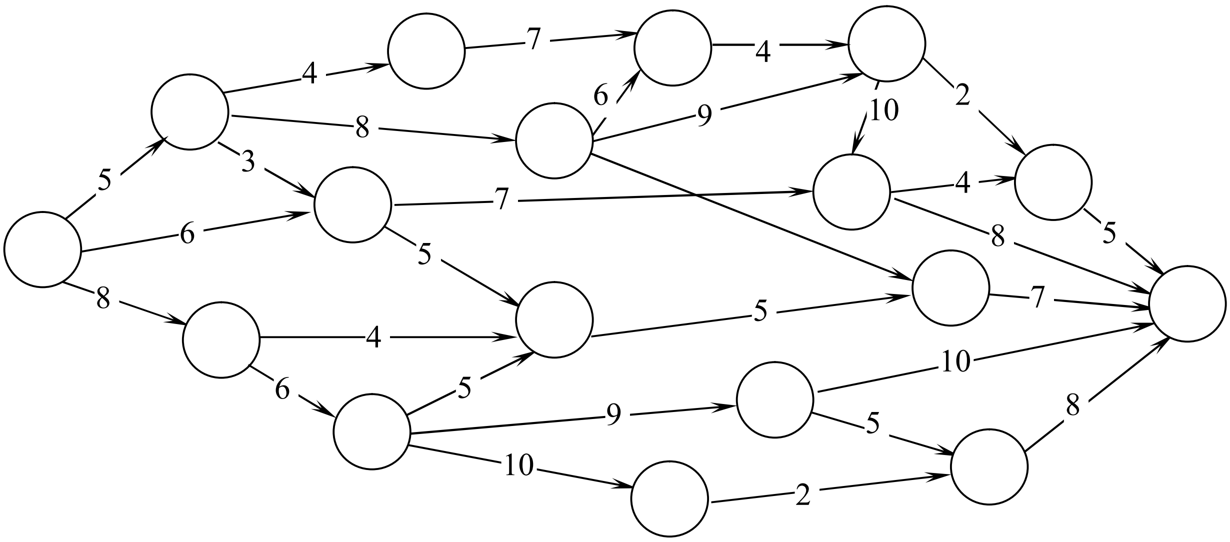
Вариант 24.



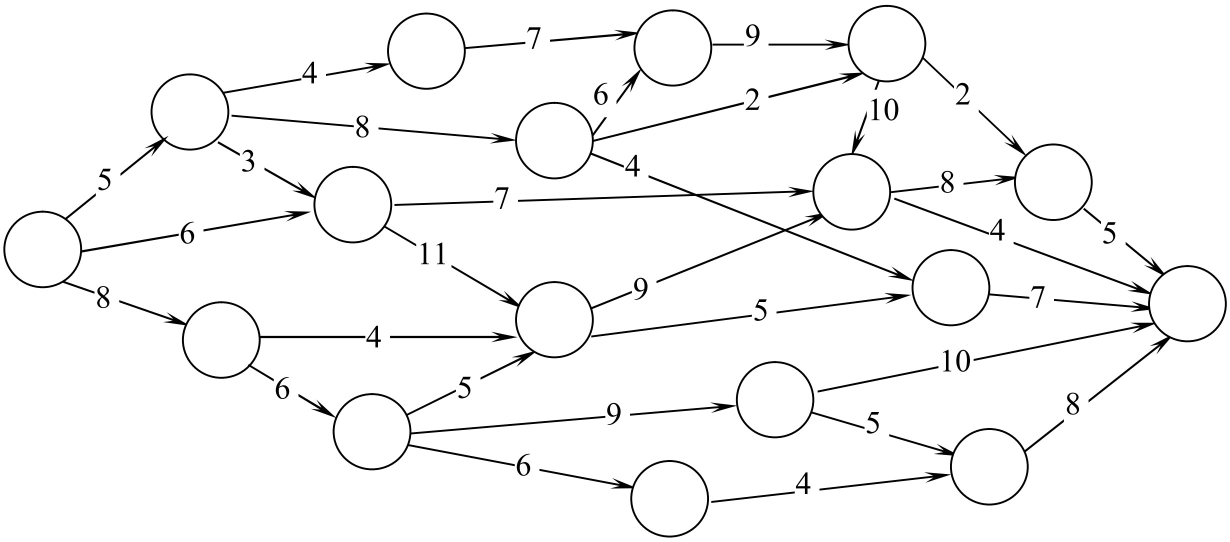
Вариант 25.



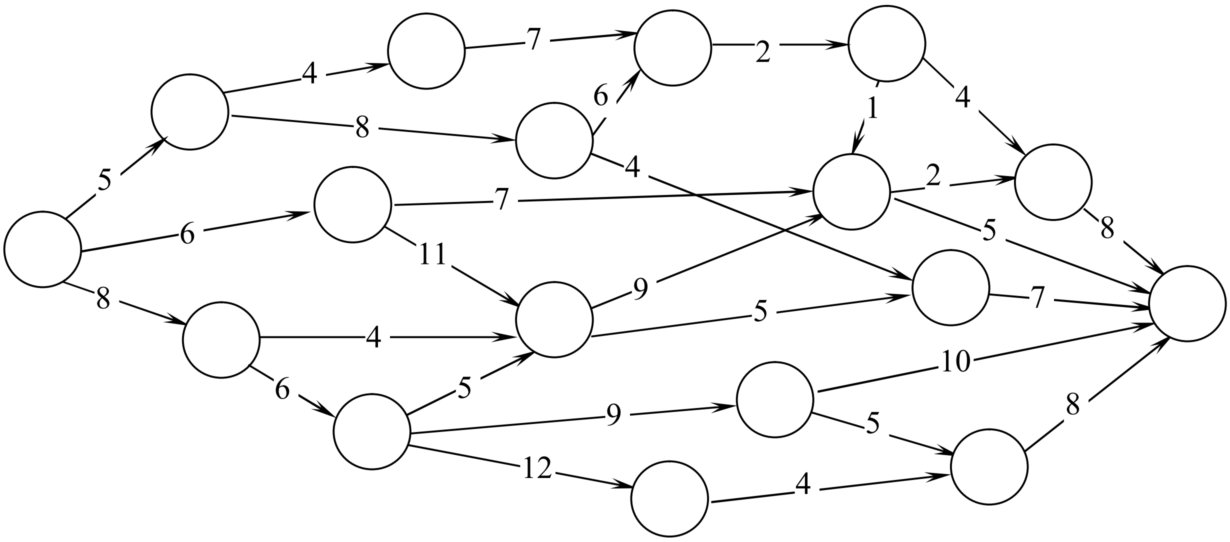
Вариант 26.



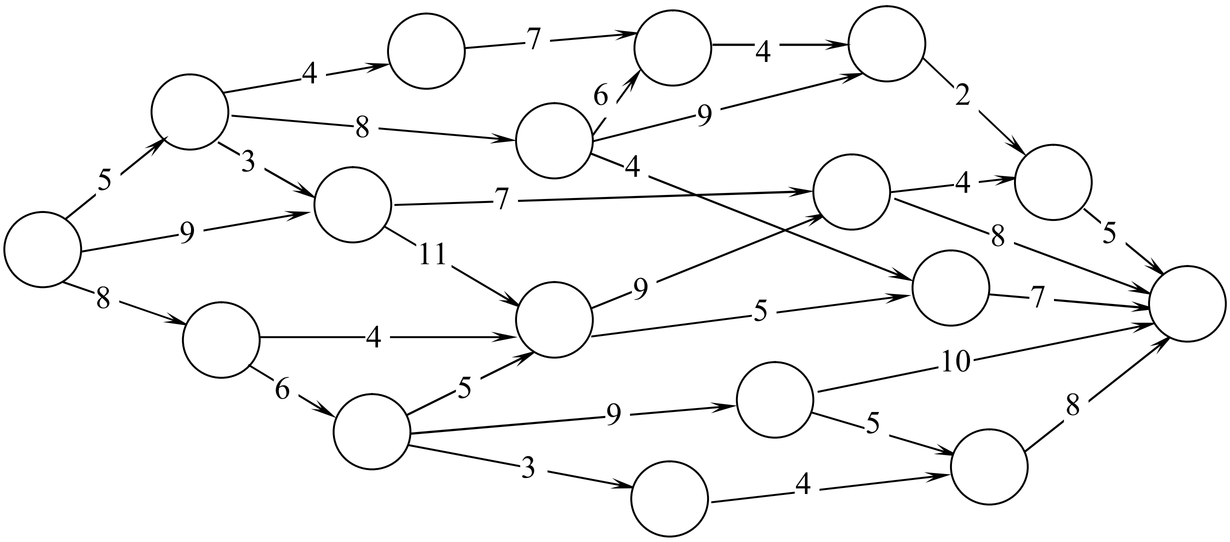
Вариант 27.



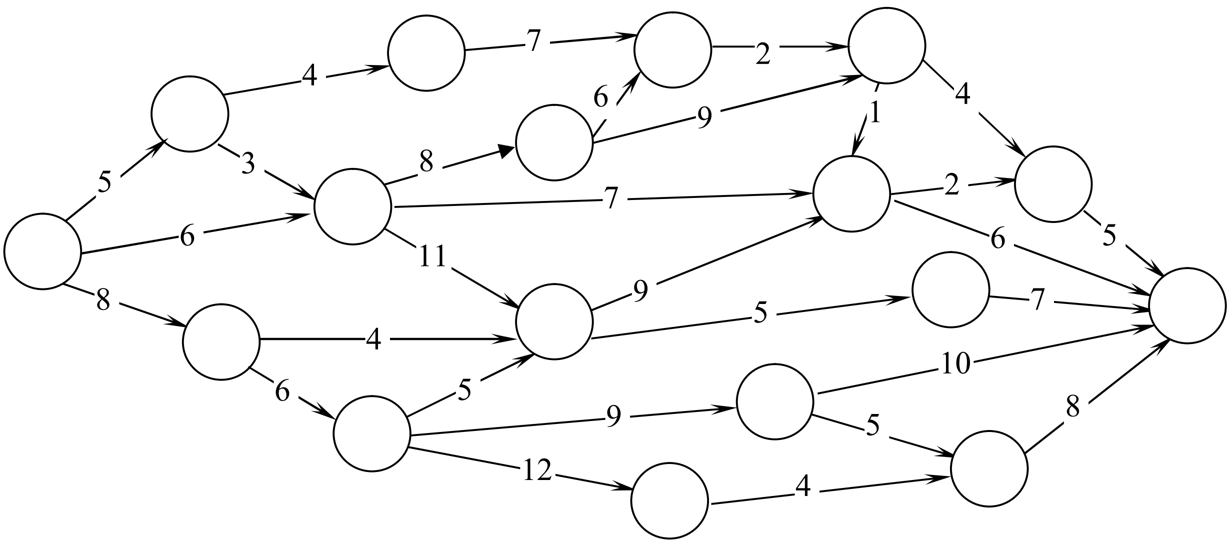
Вариант 28.



Вариант 29.

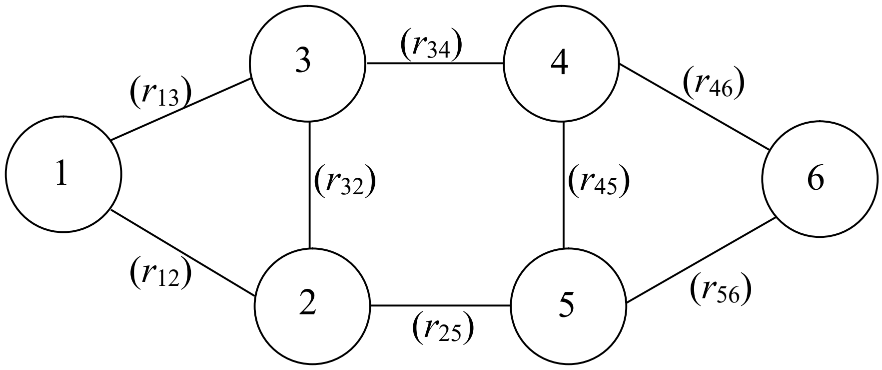


Вариант 30.



4. Максимальный поток на сети.

Задача. На сети, изображенной ниже, сформировать поток максимальной мощности, направленный из истока I в сток S при условии, что пропускные способности всех ребер в обоих направлениях одинаковы. Выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности. Ниже приводятся варианты пропускных способностей ребер:



Вариант	r_{13}	r_{12}	r_{23}	r_{34}	r_{25}	r_{45}	r_{46}	r_{56}
1	5	4	4	3	4	5	2	7
2	1	6	2	3	3	1	2	5
3	2	5	1	4	3	2	6	5
4	5	4	4	6	3	3	4	4
5	3	7	6	4	3	7	5	4
6	5	6	3	5	5	2	6	3
7	6	5	5	4	5	6	3	8
8	2	7	3	4	4	2	3	6
9	3	6	2	5	4	3	7	6
10	6	5	5	7	4	4	5	5
11	4	8	7	5	4	8	6	5
12	6	7	4	6	6	3	7	4
13	8	7	7	6	7	8	5	10
14	4	9	5	6	6	4	5	8
15	5	8	4	7	6	5	9	8
16	8	7	7	9	6	6	7	7
17	6	10	9	7	6	10	8	7
18	8	9	6	8	8	5	9	6
19	7	6	6	5	6	7	4	9
20	3	8	4	5	5	3	4	7
21	4	7	3	6	5	4	8	7
22	7	6	6	8	5	5	6	6
23	5	9	8	6	5	9	7	6
24	7	8	5	7	7	4	8	5
25	9	8	8	7	8	9	6	11
26	5	10	6	7	7	5	6	9
27	6	9	5	8	7	6	10	9
28	9	8	8	10	7	7	8	8
29	7	11	10	8	7	11	9	8
30	9	10	7	9	9	6	10	7

Часть 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Линейное программирование.

Задание а). Рассмотрим задачу линейного программирования:

Найти $\max\ f(X) = 7x_1 + 15x_2$ *при ограничениях*

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \le 44, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 52, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 34, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1). Алгоритм решения, называемый *симплекс-методом* или *методом последовательного улучшения плана* (планом называется любой набор *неотрицательных* переменных, удовлетворяющий ограничениям задачи), применяется к задаче, записанной в *канонической форме*, в которой *основные ограничения* (в фигурной скобке) даны в виде равенств. Для этого в левую часть каждого неравенства вида «меньше-равно» добавляется *дополнительная неотрицательная* переменная (в каждое неравенство своя). Получим задачу:

Найти $\max\ f(X) = 7x_1 + 15x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 = 44, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 52, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 = 34, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

Заметим, что максимум достигается на одном из *опорных* планов, у которых число строго положительных переменных равно числу уравнений в системе. Этим переменным соответствуют единичные столбцы коэффициентов с единицами в разных уравнениях системы. Легко увидеть начальный *опорный* план нашей задачи X_0=(0; 0; 44; 52; 34), для которого $f(X_0) = 0$. Положительные переменные опорного плана называются *базисными,* а остальные *свободными*. Алгоритм заключается в том, что одна из свободных переменных вводится в число базисных, а некоторая базисная переменная переходит в число свободных. Если при этом увеличилось значение *целевой функции* $f(X)$, то говорят, что план улучшился. Для этого в число базисных вводят переменную x_j, для которой $z_j - c_j = \sum_i x_{ij} c_i - c_j < 0$, где x_{ij} – коэффициенты при x_j в системе, c_i– коэффициенты целевой функции базисных переменных. Если таких переменных несколько, то в базис вводят ту, у которой наименьшее $z_j - c_j < 0$. Если для некоторого опорного плана все $z_j - c_j \ge 0$, то он *оптимален*, то есть на нем достигается $\max f(x)$ – задача решена. Для базисных переменных всегда $z_j - c_j = 0$!

Решать задачу удобно в табличном виде, где оперируют только с коэффициентами системы или ее преобразованных вариантов.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ шага	Базис	c_i	План X_i	7	15	0	0	0	θ
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	44	1	**6**	1	0	0	**22 / 3**
	x_4	0	52	5	2	0	1	0	26
	x_5	0	34	3	4	0	0	1	17 / 2
	$z_j - c_j$		$f_0 = 0$	– 7	**– 15**	0	0	0	
1	x_2	15	22 / 3	1 / 6	1	1 / 6	0	0	44
	x_4	0	112 / 3	14 / 3	0	– 1 / 3	1	0	8
	x_5	0	14 / 3	**7 / 3**	0	– 2 / 3	0	1	**2**
	$z_j - c_j$		$f_1 = 110$	**– 9 / 2**	0	5 / 2	0	0	
2	x_2	15	7	0	1	3 / 14	0	– 1 / 14	
	x_4	0	28	0	0	1	1	– 2	
	x_1	7	2	1	0	– 2 / 7	0	3 / 7	
	$z_j - c_j$		$f_2 = 119$	0	0	17 / 14	0	27 / 14	
Двойственные переменные				y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	
				дополнительные		основные			

Пояснения к работе с таблицей. В столбцах 5 – 9 в строке над переменными задачи записываются c_j – коэффициенты функции цели, а в строках под ними их коэффициенты из системы, а правые части записаны в столбце 4. В последней строке подсчитываются $z_j - c_j$ для каждой переменной. Для этого вычисляется сумма произведений элементов столбца на соответствующие c_i столбца 3 и вычитается c_j, стоящее вверху. Например, для переменной x_1: $z_1 - c_1 = 1 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 7 = -7$, для переменной x_2: $z_2 - c_2 = 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 15 = -15$, а для остальных (базисных) переменных аналогично получим нули. Значение функции цели получается аналогичным перемножением столбцов 3 и 4. Так как среди $z_j - c_j$ есть отрицательные, то начальный план не является оптимальным. Выбираем наименьшее из них – 15 (в таблице выделено жирным шрифтом и подчеркнуто, а этот столбец назовем *ведущим*) и переменную x_2 будем вводить в базис *вместо* одной из базисных переменных начального плана. Для определения выводимой из базиса переменной в столбце 10 подсчитаем числа θ, равные отношению координат плана (столбец 4) к положительным элементам ведущего столбца: 44 : 6 = 22/3; 52 : 2 = 26; 34 : 4= = 17/2. Минимальное значение из них 22/3 определяет *ведущую* первую строку и переменную x_3 , которую надо вывести из базиса.

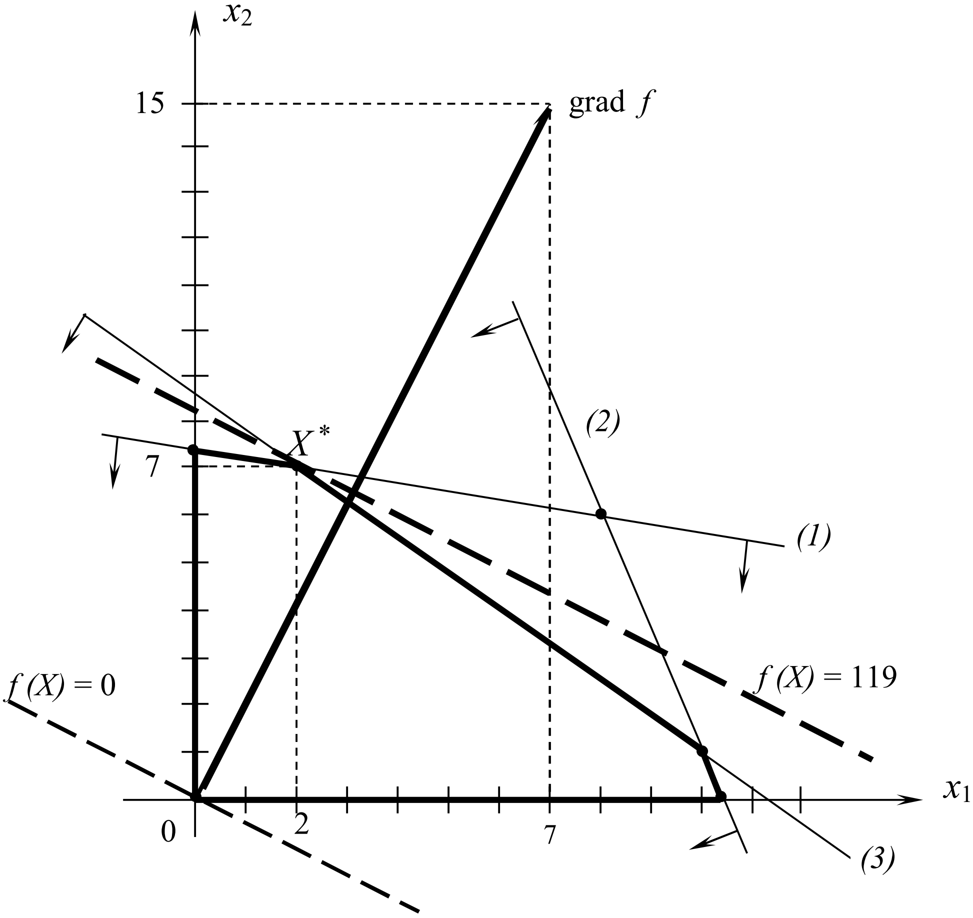
Выделенное число **6** , стоящее на пересечении ведущего столбца и ведущей строки, называют *ведущим элементом*.

Далее начинается работа на шаге 1. В столбце 2 вместо x_3 записывается новая базисная переменная x_2, а в столбце 3 ее коэффициент 15. Остальные данные в этих столбцах не меняются.

Преобразование остальной части данных шага 1 (столбцы 4 – 9) соответствует элементарным преобразованиям системы с целью сделать ведущий столбец таким, каким был столбец выводимого из базиса столбца 7 коэффициентов при x_3 (напомним, что к таким преобразованиям относят деление уравнения на число, отличное от нуля, и прибавление любого уравнения, умноженного на некоторое число, к любому другому уравнению, а при работе с таблицей в этом замечании следует заменить слово «уравнение» на слово «строка»). Для этого ведущую строку разделим на ведущий элемент **6** и результаты запишем в первой строке шага 1. Далее, чтобы получить 0 во второй строке ведущего столбца, прибавим к ней *преобразованную* ведущую строку, умноженную на – 2. Конкретно: $52+\frac{22}{3}\cdot(-2)=\frac{112}{3}$; $5+\frac{1}{6}\cdot(-2)=\frac{14}{3}$; $2+1\cdot(-2)=0$; $0+\frac{1}{6}\cdot(-2)=-\frac{1}{3}$. Добавление нулей в оставшихся базисных столбцах, очевидно, не изменит их. Аналогично получаем 0 в третьей строке ведущего столбца, умножая преобразованную ведущую строку на – 4. Ноль в последней строке шага 1 можно получить также, умножая при этом на 15. Для контроля все числа дополнительной строки можно вычислить также, как и на шаге 0. Например, в столбце 5 с одной стороны имеем $-7+\frac{1}{6}\cdot(15)=-\frac{9}{2}$, а с другой $z_1-c_1=\frac{1}{6}\cdot 15+\frac{14}{3}\cdot 0+\frac{7}{3}\cdot 0-7=-\frac{9}{2}$.

Так как в строке z_j-c_j есть отрицательное число, то полученный нами план $X_1=\left(0;\frac{22}{3};0;\frac{112}{3};\frac{14}{3}\right)$ с $f(X_1)=110$ не является оптимальным. Поэтому аналогично переходим к шагу 2, вводя в базис переменную x_1. Как видим, на шаге 2 все z_j-c_j неотрицательны, следовательно, получен оптимальный план $X_2=(2;7;0;28;0)$, а $\max f(X)=f(X_2)=119$. Оптимальный план исходной задачи $X^*=(2;\ 7\ )$ и $\max f(X)=f(X^*)=119$.

2). Для геометрического решения исходной задачи в прямоугольной системе координат построим множество допустимых решений, для чего строим прямые $x_1+6x_2=44;\ 5x_1+2x_2=52;\ 3x_1+4x_2=34$ и для каждой из них определяем полуплоскости, в которых выполняются соответствующие неравенства (на чертеже указаны стрелками). Их общая часть определяет в положительном квадранте (так как $x_1\ge 0$; $x_2\ge 0$) область допустимых решений, которая в нашем случае представляет собой многоугольник, выделенный жирными линиями.



Далее строим вектор grad $f(X) = (7;\ 15)$ и перпендикулярно ему линию уровня (например, через начало координат) и сдвигаем ее в направлении вектора-градиента до тех пор, пока она имеет общие точки с областью допустимых решений. Крайнее положение определит точку максимума, координаты которой находим решением системы уравнений прямых, проходящих через эту точку:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 = 44, \\ 3x_1 + 4x_2 = 34. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 7. \end{cases}$$

Отсюда $f_{\max} = 7 \cdot 2 + 15 \cdot 7 = 119.$

3). Для построения *двойственной задачи к исходной*, заданной в стандартной форме, каждому неравенству основной системы ставятся в соответствие неотрицательные переменные y_1 , y_2 , y_3, относительно которых составляется задача линейного программирования в симметричной форме так, что коэффициенты функции цели и правые части основной системы исходной задачи поменяются ролями в двойственной задаче, а коэффициенты-столбцы перейдут в коэффициенты-строки. К тому же изменятся цель (отыскивается минимум) и смысл неравенств («больше-равно). Исходная и двойственная задачи в таком виде называется *симметричной парой взаимно двойственных задач*.

Найти $\min\ g(Y) = 44y_1 + 52y_2 + 34y_3$ *при ограничениях*

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 + 3y_3 \ge 7, \\ 6y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ge 15, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

Для приведения этой задачи к каноническому виду в левые части основной системы добавляют неотрицательные переменные со знаком «минус» и получают

Найти $\min\ g(Y) = 44y_1 + 52y_2 + 34y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5$

при ограничениях

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 + 3y_3 - y_4 = 7, \\ 6y_1 + 2y_2 + 4y_3 - y_5 = 15, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0,\ y_5 \ge 0.$$

Симплекс-методом можно найти решение этой задачи. Однако, если решена одна из двойственных задач, то оценки последнего шага ее являются координатами оптимального плана другой. При этом основным переменным одной задачи соответствуют дополнительные другой и наоборот. Из таблицы выше выписываем оптимальный план $Y^* = \left(\frac{17}{14};\ 0;\ \frac{27}{14};\ 0;\ 0\right)$ при этом $\min\ g(Y) = g(Y^*) = 44 \cdot \frac{17}{14} + 52 \cdot 0 + 34 \cdot \frac{27}{14} = 119$. Значит, выполнено утверждение *первой теоремы двойственности*: максимум в исходной задаче и минимум в двойственной совпадают $f(X^*) = g(Y^*)$.

Рассмотрим соответствие между условиями симметричной пары двойственных задач:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \le 44, & \leftrightarrow \\ 5x_1 + 2x_2 \le 52, & \leftrightarrow \\ 3x_1 + 4x_2 \le 34. & \leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} y_1 \ge 0, \\ y_2 \ge 0, \\ y_3 \ge 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_1 + 5y_2 + 3y_3 \ge 7, & \leftrightarrow \\ 6y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ge 15. & \leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Подставляя соответствующие оптимальные планы, получим:

$$\begin{cases} 2+6\cdot 7=44, \leftrightarrow \\ 5\cdot 2+2\cdot 7<52, \leftrightarrow \\ 3\cdot 2+4\cdot 7=34. \leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} 17/14>0, \\ 0=0, \\ 27/14>0. \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 17/14+5\cdot 0+3\cdot 27/14=7, \leftrightarrow \\ 6\cdot 17/14+2\cdot 0+4\cdot 27/14=15. \leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} 2>0, \\ 7>0. \end{cases}$$

Таким образом, выполняется *вторая теорема двойственности*: для оптимальных планов взаимно двойственных задач в каждой паре двойственных условий одно выполняется как строгое неравенство, а другое как равенство.

Задание б. Рассмотрим задачу:

$$\textit{Найти } \max f(X)=6x_1+7x_2 \textit{ при ограничениях}$$

$$\begin{cases} x_1+6x_2\le 44, \\ 5x_1+2x_2\le 52, \\ 3x_1+4x_2\ge 34. \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

Перейдем к канонической форме. При этом заметим, что в третье неравенство системы вида «больше-равно» дополнительная переменная добавляется со знаком «минус». Получим:

$$\textit{Найти } \max f(X)=6x_1+7x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5 \textit{ при ограничениях}$$

$$\begin{cases} x_1+6x_2+x_3=44, \\ 5x_1+2x_2+x_4=52, \\ 3x_1+4x_2-x_5=34. \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,\ x_5\ge 0.$$

В этом случае набор дополнительных переменных <u>не может</u> быть взят в качестве базисных, так как при $x_1=0,\ x_2=0$ получится $x_5=-34<0$, что не допустимо для плана. В этой ситуации в третье уравнение системы прибавляют *искусственную* переменную $x_6\ge 0$, которая в функции цели входит с коэффициентом $-\omega$, где ω – сколь угодно большое по величине число. При этом, если исходная задача имеет планы, то сиплекс-метод на некотором шаге выводит искусственные переменные из базиса и тем самым получают некоторый опорный план (не обязательно оптимальный) исходной задачи, после чего решение продолжается, как в предыдущем случае. Если же эти переменные не выводятся из базиса, то это означает, что условия исходной задачи несовместны, т. е. планов нет. Рассмотрим задачу:

Найти $\max f(X) = 6x_1 + 7x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - \omega \cdot x_6$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 = 44, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 52, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_5 + x_6 = 34. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0.$$

Теперь в качестве базисных переменных выберем x_3, x_4, x_6. При этом начальный план $X_0 = (0; 0; 44; 52; 0; 34)$, а $f(X_0) = 0 - 34\omega$. Кстати, величины $z_j - c_j$ так же будут зависеть от ω. Поэтому вместо одной введем две дополнительных строки. В первую из них будем записывать свободные члены, а во вторую – коэффициенты при ω. При этом, пока в базисе есть хоть одна искусственная переменная, при выборе переменной, вводимой в базис, руководствуются второй дополнительной строкой. И не рассматривают ее, как только получится базис без искусственных переменных.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
№ шага	Базис	c_j	План X_i	6	7	0	0	0	$-\omega$	θ
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	0	44	1	**6**	1	0	0	0	**22/3**
	x_4	0	52	5	2	0	1	0	0	26
	x_6	$-\omega$	34	3	4	0	0	–1	1	17/2
	$z_j - c_j$		0	– 6	– 7	0	0	0	0	
			– 34	– 3	**– 4**	0	0	1	0	
1	x_2	7	22 / 3	1 / 6	1	1 / 6	0	0	0	44
	x_4	0	112 / 3	14 / 3	0	–1 / 3	1	0	0	8
	x_6	$-\omega$	14 / 3	**7 / 3**	0	–2 / 3	0	–1	1	**2**
	$z_j - c_j$		154 / 3	–2	0	7 / 6	0	0	0	
			– 14 / 3	**–7 / 3**	0	2 / 3	0	**1**	0	
2	x_2	7	7	0	1	3 /14	0	1 /14		98
	x_4	0	28	0	0	1	1	**2**		**14**
	x_1	6	2	1	0	–2 / 7	0	–3 / 7		
	$z_j - c_j$		61	0	0	–3/14	0	**–29/28**		
3	x_2	7	6	0	1	5 / 28	–1 / 28	0		
	x_5	0	14	0	0	1 / 2	1 / 2	1		
	x_1	6	8	1	0	–1 / 14	3 / 14	0		
	$z_j - c_j$		90	0	0	23 / 28	29 / 28	0		
Двойственные переменные				y_4	y_5	y_1	y_2	y_3		
				дополнит - е		основные				

Так как на третьем шаге все $z_j - c_j \ge 0$, то план $X_3 = (8; 6; 0; 0; 14)$ оптимальный и $\max f(X) = f(X_3) = 90$. Для исходной задачи соответственно $X^* = (8; 6)$ и $\max f(X) = f(X^*) = 90$.

Геометрическое решение проводится аналогично.

Выпишем теперь пару двойственных задач в симметричной форме. Для этого предварительно умножим третье неравенство в исходной задаче на – 1, чтобы сделать его вида «меньше-равно».

Исходная задача.

Найти $\max f(X) = 6x_1 + 7x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \le 44, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 52, \\ -3x_1 - 4x_2 \le -34. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$$

Двойственная задача.

Найти $\min g(Y) = 44y_1 + 52y_2 - 34y_3$

при ограничениях

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 - 3y_3 \ge 6, \\ 6y_1 + 2y_2 - 4y_3 \ge 7, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, \ y_2 \ge 0, \ y_3 \ge 0.$$

Из последней строки симплекс-таблицы выпишем оптимальный план двойственной задачи $Y^* = \left(\frac{23}{28}; \frac{29}{28}; 0\right)$. Подставив его в функцию цели, получим $\min g(Y) = g(Y^*) = 44 \cdot \frac{23}{28} + 52 \cdot \frac{29}{28} - 3 \cdot 0 = 90$. То есть $f(X^*) = g(Y^*)$ и, следовательно, выполняется первая теорема двойственности.

Рассмотрим соответствие между условиями симметричной пары двойственных задач:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \le 44, & \leftrightarrow \\ 5x_1 + 2x_2 \le 52, & \leftrightarrow \\ -3x_1 - 4x_2 \le -34. & \leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} y_1 \ge 0, \\ y_2 \ge 0, \\ y_3 \ge 0. \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 + 5y_2 - 3y_3 \ge 6, & \leftrightarrow \\ 6y_1 + 2y_2 - 4y_3 \ge 7. & \leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Подставляя соответствующие оптимальные планы, получим:

$$\begin{cases} 8 + 6 \cdot 6 = 44, & \leftrightarrow \\ 5 \cdot 8 + 2 \cdot 6 = 52, & \leftrightarrow \\ -3 \cdot 8 - 4 \cdot 6 < -34. & \leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} 23/28 > 0, \\ 29/28 > 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 23/28 + 5 \cdot 29/28 - 3 \cdot 0 = 6, & \leftrightarrow \\ 6 \cdot 23/28 + 2 \cdot 29/28 - 4 \cdot 0 = 7. & \leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} 8 > 0, \\ 6 > 0. \end{cases}$$

Как видим, выполняется и вторая теорема двойственности.

2. Транспортная задача.

Вариант а). *Краткие пояснения к условию задачи.*

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12	10	13	6	146
A_2	5	9	11	4	172
A_3	10	6	8	9	182
b_j	85	105	170	140	500 \ 500

В первом столбце таблицы указаны $n = 3$ поставщиков некоторого груза (A_1, A_2, A_3), имеющегося у них соответственно в количествах a_i (см. последний столбец), а $m = 4$ потребителям (B_1, B_2, B_3, B_4) этот груз требуется в количествах b_j (см. последнюю строку). На пересечении строк A_i и столбцов B_j стоят стоимости c_{ij} перевозки единицы груза от i-того поставщика к j-тому потребителю. В конце последней строки и последнего столбца подсчитаны соответственно общие потребности $\sum b_j$ и общие запасы груза $\sum a_i$. В нашем случае они совпадают, а это значит, что все заказы будут выполнены, а от поставщиков весь груз будет вывезен. То есть мы имеем *закрытую* модель транспортной задачи/

1). Для *составления математической модели* задачи обозначим через x_{ij} количество груза, перевозимого от A_i к B_j. Требуется распределить перевозки груза так, чтобы общие затраты на них были минимальны:

$$\text{найти } \min \ f(X) = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot x_{ij}$$

при ограничениях: а) по потребителям: (каждый заказ будет выполнен)

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 85, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 105, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 170, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 140, \end{cases}$$

б) по поставщикам: (все грузы будут вывезены)

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 146, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 172, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 182, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = 1,2,3, \ j = 1,2,3,4.$$

Последнее условие означает, что перевозки осуществляются только от поставщиков к потребителям (обратных перевозок нет).

2). *Составление первоначального опорного плана.*

Опорный план транспортной задачи имеет n + m – 1 = 3 + 4 – 1 = 6 базисных переменных, которые записывают в соответствующие внутренние клетки таблицы. Остальные клетки свободных переменных, равных нулю, оставляют пустыми. Рассмотрим метод северо-западного угла, согласно которому вначале определяем $x_{11} = \min(a_1, b_1) = \min(146, 85) = 85$. При этом уменьшаем на 85 единиц запас первого поставщика и вычеркиваем потребность первого потребителя (остальные клетки перевозок к нему будут свободными). Получим таблицу. В верхних углах внутренних клеток мелким шрифтом записаны стоимости c_{ij}:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12 **85**	10	13	6	~~146~~ 61
A_2	5	9	11	4	172
A_3	10	6	8	9	182
b_j	~~85~~ 0	105	170	140	

В оставшейся части таблицы «северо-западная» клетка расположена в первой строке и во втором столбце. Аналогично находим соответствующий ей минимум потребности и оставшегося запаса $x_{12} = \min(a_1', b_1) = \min(61, 105) = 61$. Значит, запасы первого поставщика исчерпаны, и остальные клетки первой строки будут свободными. Теперь получим:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12 **85**	10 **61**	13	6	~~146~~ ~~61~~ 0
A_2	5	9	11	4	172
A_3	10	6	8	9	182
b_j	~~85~~ 0	~~105~~ 44	170	140	

Следующая «северо-западная» клетка расположена во второй строке и втором столбце. Продолжая аналогично, получим таблицу перевозок с первоначальным планом. Последней будет заполнена «юго-восточная» клетка.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12 **85**	10 **61**	13	6	~~146~~ ~~61~~ 0
A_2	5	9 **44**	11 **128**	4	~~172~~ ~~128~~ 0
A_3	10	6	8 **42**	9 **140**	~~182~~ ~~140~~ 0
b_j	~~85~~ 0	~~105~~ ~~44~~ 0	~~170~~ ~~42~~ 0	~~140~~ 0	

По этому плану X_0 осуществляются следующие перевозки: от A_1 к B_1 – 85 единиц и к B_2 – 61 единицу груза, от A_2 к B_2 – 44 единицы и к B_3 – 128 единиц, от A_3 к B_3 – 42 единицы и к B_4 – 140 единиц груза. Общая стоимость их будет равна $f(X_0) = 12 \cdot 85 + 10 \cdot 61 + 9 \cdot 44 + 11 \cdot 128 + 8 \cdot 42 +$ $+ 9 \cdot 140 = 5030$ денежных единиц.

3). Для *проверки на оптимальность* полученного опорного плана применим так называемый *метод потенциалов* (иначе, *модифицированный распределительный метод – МОДИ*). Каждому поставщику A_i и каждому потребителю B_j приписываются соответственно числа u_i и v_j, называемые их *потенциалами*.

X_0	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	12 **85**	10 **61**	13	6	$u_1 = 0$
A_2	5	9 **44**	11 **128**	4	$u_2 = -1$
A_3	10	6	8 **42**	9 **140**	$u_3 = -4$
v_j	v_1=12	v_2=10	v_3=12	v_4=13	

Для базисных перевозок рассматриваемого опорного плана должны выполняться равенства $u_i + v_j = c_{ij}$. В нашем случае получим систему:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 12, \\ u_1 + v_2 = 10, \\ u_2 + v_2 = 9, \\ u_2 + v_3 = 11, \\ u_3 + v_3 = 8, \\ u_3 + v_4 = 9. \end{cases}$$

Так как число потенциалов на единицу меньше, чем число уравнений полученной системы, то один из них выбирают произвольно. Например, $u_1 = 0$. Тогда из системы легко получим: $v_1 = 12,\ v_2 = 10,\ u_2 = -1,\ v_3 = 12,\ u_3 = -4,\ v_4 = 13$. После этого для всех свободных клеток подсчитаем оценки $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. *Если все* $\Delta_{ij} \le 0$*, то опорный план оптимален, если нет, то можно перейти к новому опорному плану с меньшим значением функции цели.*

В нашем случае

$$
\begin{aligned}
\Delta_{13} &= \ \ 0 + 12 - 13 = -1,\\
\Delta_{14} &= \ \ 0 + 13 - \ \ 6 = \ \ 7,\\
\Delta_{21} &= -1 + 12 - \ \ 5 = \ \ 6,\\
\Delta_{24} &= -1 + 13 - \ \ 4 = \ \ 8, \ (\max)\\
\Delta_{31} &= -4 + 12 - 10 = -2,\\
\Delta_{32} &= -4 + 10 - \ \ 6 = \ \ 0.
\end{aligned}
$$

План X_0 не оптимален.

4). *Переход к новому опорному плану* связан с введением перевозки с наибольшим $\Delta_{24} = 8$ в число базисных перевозок. Построим *цикл пересчета* свободной клетки (2; 4). Он представляет собой замкнутую ломаную линию, одна вершина которой лежит в выбранной клетке, а остальные в базисных клетках. При этом вершинам цикла поочередно приписываются знаки «плюс» или «минус», начиная со знака «плюс» у выбранной свободной клетки. Если в клетках со знаком «плюс» добавить, а со знаком «минус» отнять одно и тоже число, сохраняя неотрицательность переменных, то получим допустимый план перевозок. Чтобы план был опорным, это должна быть минимальная из перевозок, стоящих в клетках со знаком «минус».Минимум в отрицательных клетках равен 128. Проводим

X_0	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	12 **85**	10 **61**	13	6	0
A_2	5	9 **44**	11 **128** –	4 +	–1
A_3	10	6	8 **42** +	9 **140** –	– 4
v_j	12	10	12	13	

изменения вдоль цикла на эту величину. Получим новый опорный план X_1, в котором клетка (2; 3) станет свободной (см. ниже). Вычислим общую стоимость $f(X_1) = 12 \cdot 85 + 10 \cdot 61 + 9 \cdot 44 + 4 \cdot 128 + 8 \cdot 170 + 9 \cdot 12 = 4006$. Обратите внимание на то, что изменение общей стоимости равно 5030 – 4006 = =1024 = $\Delta_{24} \cdot 128 = 8 \cdot 128$.

Аналогично проверим на оптимальность план X_1 .

X_1	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	12 **85**	10 **61**	13	6	0
A_2	5	9 − **44**	11	4 + **128**	−1
A_3	10	6 +	8 **170**	9 **12** −	4
v_j	12	10	4	5	

$$\begin{cases} u_1+v_1=12, \\ u_1+v_2=10, \\ u_2+v_2=9, \\ u_2+v_4=4, \\ u_3+v_3=8, \\ u_3+v_4=9. \end{cases}$$

Положив $u_1 = 0$, находим остальные потенциалы. Далее :

$$\Delta_{13} = 0+4-13=-9,$$
$$\Delta_{14} = 0+5-6=-1,$$
$$\Delta_{21} = -1+12-5=6,$$
$$\Delta_{23} = -1+4-11=-8,$$
$$\Delta_{31} = 4+12-10=6,$$
$$\Delta_{32} = 4+10-6=8. \ (\max)$$

План X_1 не оптимален. Вводим в базисные клетку (3; 2). Аналогично получим опорный план X_2 , для которого $f(X_2)=12\cdot 85+10\cdot 61+9\cdot 32+4\cdot 140+6\cdot 12+8\cdot 170=3910$. Составление системы для потенциалов и их вычисление представляем читателю сделать самостоятельно. После этого вычисляем оценки:

X_2	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	12 − **85**	10 + **61**	13	6	0
A_2	5 +	9 **32** −	11	4 **140**	−1
A_3	10	6 **12**	8 **170**	9	−4
v_j	12	10	12	5	

$$\Delta_{13} = 0+12-13=-1,$$
$$\Delta_{14} = 0+5-6=-1,$$
$$\Delta_{21} = -1+12-5=6, \ (\max)$$
$$\Delta_{23} = -1+12-11=0,$$
$$\Delta_{31} = -4+12-10=-2,$$
$$\Delta_{34} = -4+5-9=-8.$$

Минимум по отрицательным клеткам равен 32. После пересчета по циклу получим новый опорный план X_3, для которого $f(X_3)=12\cdot 53+10\cdot 93+5\cdot 32+4\cdot 140+6\cdot 12+8\cdot 170= \ =3718$ (см. таблицу на следующей странице). Вычислим оценки :

$$\Delta_{13} = 0+10-10=0, \qquad \Delta_{23} = -7+12-11=-6,$$
$$\Delta_{14} = 0+11-6=5, \ (\max) \qquad \Delta_{31} = -4+12-10=-2,$$
$$\Delta_{22} = -7+10-9=-6, \qquad \Delta_{34} = -4+11-9=-2.$$

Строим цикл для клетки (1; 4) и переходим к новому опорному плану.

X_3	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	12 − **53**	10 **93**	13	6 +	0
A_2	5 **32** +	9	11	4 **140** −	−7
A_3	10	6 **12**	8 **170**	9	−4
v_j	12	10	12	11	

Делаем сдвиг по циклу на 53 ед.. Подсчитываем потенциалы и оценки для плана X_4 .

$$\Delta_{11} = \ \ 0+7-12=-5,$$
$$\Delta_{13} = \ \ 0+12-13=-1,$$
$$\Delta_{22} = -2+10-\ 9=-1,$$
$$\Delta_{23} = -2+12-11=-1,$$
$$\Delta_{31} = -4+\ 7-10=-7,$$
$$\Delta_{34} = -4+\ \ 6-\ 9=-7.$$

X_4	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	12	10 **93**	13	6 **53**	0
A_2	5 **85**	9	11	4 **87**	−2
A_3	10	6 **12**	8 **170**	9	−4
v_j	7	10	12	6	

Так как все $\Delta_{ij} \le 0$, то план X_4 оптимален и $f_{\min} = f(X_4) =$ $=10\cdot 93+6\cdot 53+5\cdot 85+4\cdot 87+$ $+6\cdot 12+8\cdot 170=3453$. По этому плану следует перевезти от A_1 к B_2 93 ед. и к B_4 53 ед., от A_2 к B_1 85 ед. и B_4 87 ед., от A_3 к B_2 12 ед. и к B_3 170 единиц груза.

Вариант б). Рассмотрим задачу:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14	8	9	5	100
A_2	7	10	13	6	160
A_3	6	11	7	9	200
b_j	140	120	110	90	460 \ 460

Составим первоначальный опорный план методом северо-западного угла. Через три шага этого метода мы придем к следующей таблице:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14 **100**	8	9	5	~~100~~ 0
A_2	7 **40**	10 **120**	13	6	~~160~~ ~~120~~ 0
A_3	6	11	7	9	200
b_j	~~140~~ ~~40~~ 0	~~120~~ 0	110	90	

Мы столкнулись с ситуацией, когда одновременно закончились запасы поставщика A_2 и удовлетворены потребности B_2. Далее, согласно методу, остается распределить 200 единиц груза между B_3 и B_4. И мы получим план, содержащий пять (!) вместо шести базисных клеток. Чтобы избежать этого, в такой ситуации (у нас после заполнения клетки (2; 2)) в следующую правую или нижнюю клетку записывают перевозку, равную нулю (логичнее выбрать клетку с меньшей стоимостью). Далее процесс продолжается как обычно. В итоге получим:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14 **100**	8	9	5	~~100~~ 0
A_2	7 **40**	10 **120**	13	6	~~160~~ ~~120~~ 0
A_3	6	11 **0**	7 **110**	9 **90**	200
b_j	~~140~~ ~~40~~ 0	~~120~~ 0	110	90	

Опорный план, содержащий нулевые базисные перевозки, называется *вырожденным*. В дальнейшем при переходе к новым опорным планам эта нулевая перевозка может перемещаться в другие клетки или стать ненулевой. Рассмотрим систему уравнений для потенциалов:

X_0	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	14 – **100**	8	9	5 +	0
A_2	7 + **40**	10 – **120**	13	6	–7
A_3	6	11 **0** +	7 **110**	9 – **90**	–6
v_j	14	17	13	15	

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 14, \\ u_2 + v_1 = 7, \\ u_2 + v_2 = 10, \\ u_3 + v_2 = 11, \quad (!) \\ u_3 + v_3 = 7, \\ u_3 + v_4 = 9. \end{cases}$$

Далее имеем:

$\Delta_{12} = 0 + 17 - 8 = 9$, $\Delta_{13} = 0 + 13 - 9 = 4$, $\Delta_{14} = 0 + 15 - 5 = 10$ $(\max)$,

$\Delta_{23} = -7 + 13 - 13 = -7$, $\Delta_{24} = -7 + 15 - 6 = 2$, $\Delta_{31} = -6 + 14 - 6 = 2$.

После сдвига по циклу для свободной клетки (1; 4) получим уже невырожденный план. Предлагаем читателю проверить это и продолжить решение задачи самостоятельно. Заметим, может случиться так, что при переходе к новому опорному плану в нескольких отрицательных клетках перевозки одновременно обращаются в ноль. В этом случае только одну из них делают свободной, а остальные оставляют как нулевые базисные.

Вариант в). Рассмотрим две транспортные задачи:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	12	9	9	213
A_2	8	14	11	12	152
A_3	6	9	12	13	235
b_j	158	187	151	154	600 / 650

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	12	9	9	250
A_2	8	14	11	12	170
A_3	6	9	12	13	240
b_j	90	120	200	190	660 / 600

В первой $\sum_i a_i = 600 < 650 = \sum_j b_j$, во второй $\sum_i a_i = 660 > 600 = \sum_j b_j$. В этих случаях транспортная задача называется *открытой*. Чтобы сделать их закрытыми, в первой вводят в рассмотрение *фиктивного поставщика* с запасами груза $a_4 = \sum_j b_j - \sum_i a_i = 50$, а во второй – *фиктивного потребителя* с потребностью $b_5 = \sum_i a_i - \sum_j b_j = 60$, с ценами перевозок, равными 0.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	12	9	9	213
A_2	8	14	11	12	152
A_3	6	9	12	13	235
A_4	0	0	0	0	50
b_j	158	187	151	154	

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	11	12	9	9	0	250
A_2	8	14	11	12	0	170
A_3	6	9	12	13	0	240
b_j	90	120	200	190	60	

Решая их по алгоритму, описанному выше, получим оптимальные планы:

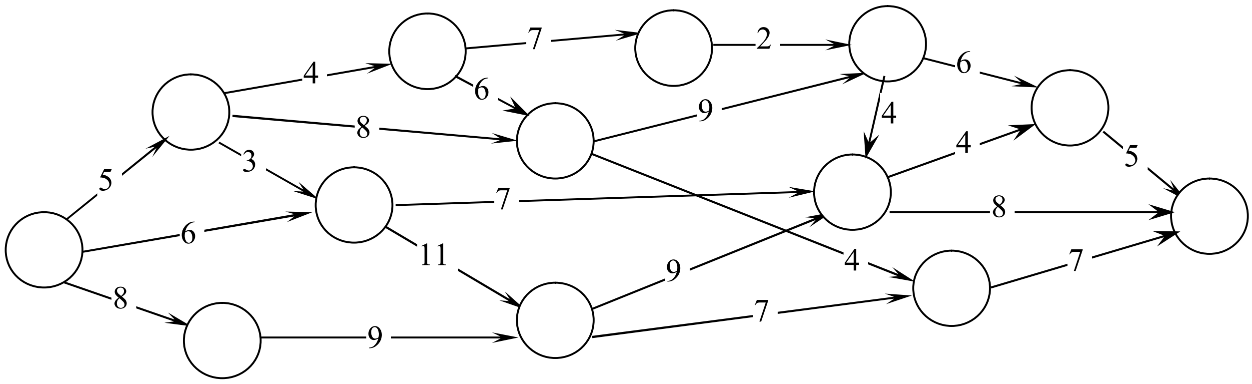
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	12	9 / 59	9 / 154	213
A_2	8 / 60	14	11 / 92	12	152
A_3	6 / 98	9 / 137	12	13	235
A_4	0	0 / 50	0	0	50
b_j	158	187	151	154	

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	11	12	9 / 60	9 / 190	0	250
A_2	8	14	11 / 140	12	0 / 30	170
A_3	6 / 90	9 / 120	12	13	0 / 30	240
b_j	90	120	200	190	60	

В первом случае в условиях нехватки запасов недостающие у поставщиков 50 единиц груза недополучит потребитель B_2 , а потребности остальных будут удовлетворены полностью. В втором случае при избытке груза лишние 60 единиц груза останутся у поставщиков A_2 и A_3 (по 30 единиц у каждого), то есть они останутся на этих складах. От поставщика A_1 все будет вывезено. При этом минимум общих затрат на перевозки в первом случае составит 5230 ден. ед., а во втором – 5410 ден. ед..

3. Расчет сетевого графика.

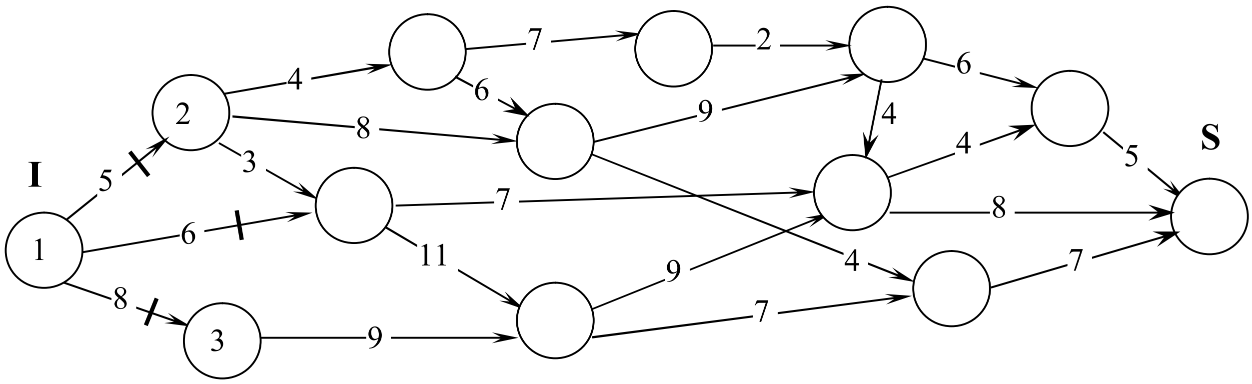
Рассмотрим сетевой график:



1). Исходным событием I является первое слева событие как не имеющее предшествующих вершин, а завершающим событием S является последнее правое как не имеющее последующих вершин.

2). Нумерация вершин начинается с присвоения номера 1 исходному событию I. На первом шаге зачеркнем все работы, начинающиеся в этой вершине (одной чертой) и будем считать, что они выполнены. Продолжим нумерацию тех вершин, которые после этого не имеют предшествующих работ. Это будут вершины 2 и 3. Назовем их *вершинами первого уровня*.

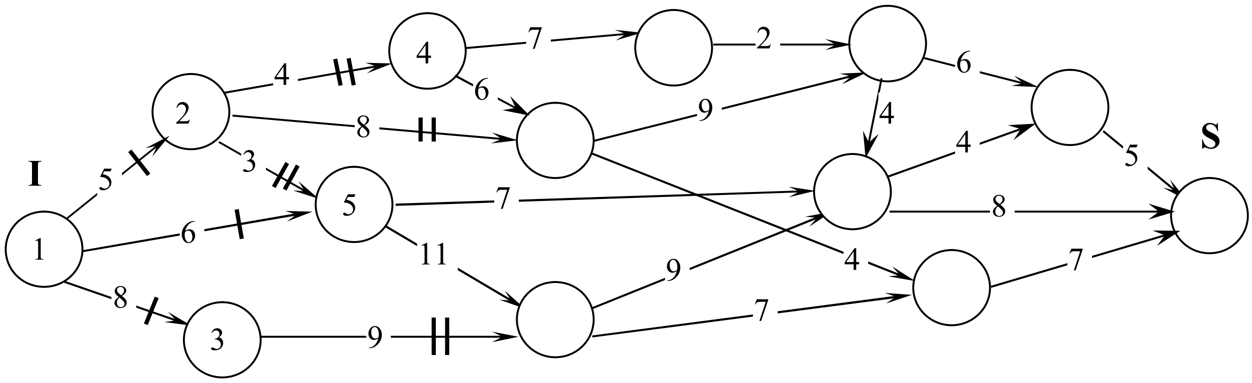
Первый этап нумерации вершин.



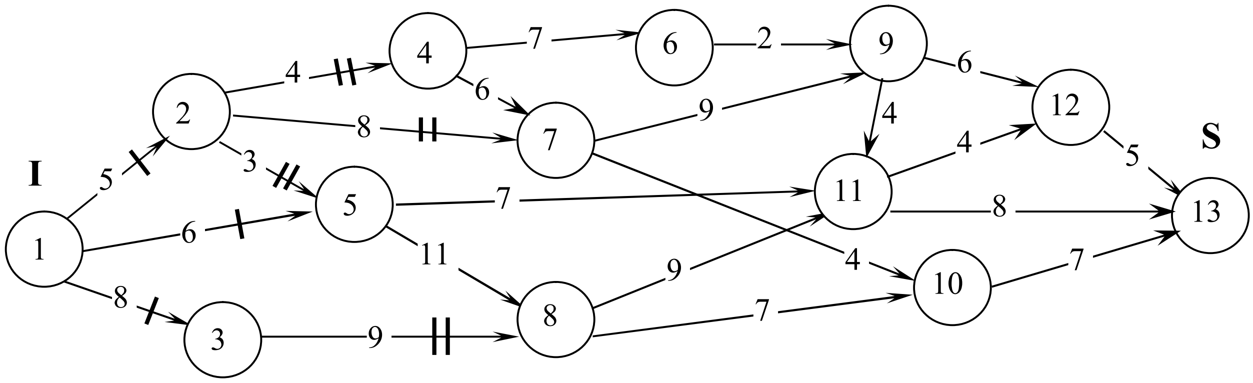
На втором шаге зачеркиваем двумя чертами работы, начинающиеся в вершинах первого уровня, и аналогично продолжаем нумерацию вершин, которые после этого не имеют предшествующих работ (опять же считая выполненными все вычеркнутые работы). Это будут вершины 4 и 5 – *вершины второго уровня*.

Продолжая аналогично, получим нумерацию вершин в натуральном порядке. Номер вершины начала любой из работ меньше номера вершины ее окончания.

Второй этап нумерации вершин смотрите на следующей странице.

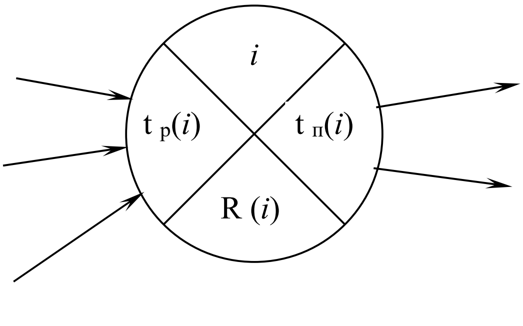


Нумерация в натуральном порядке.



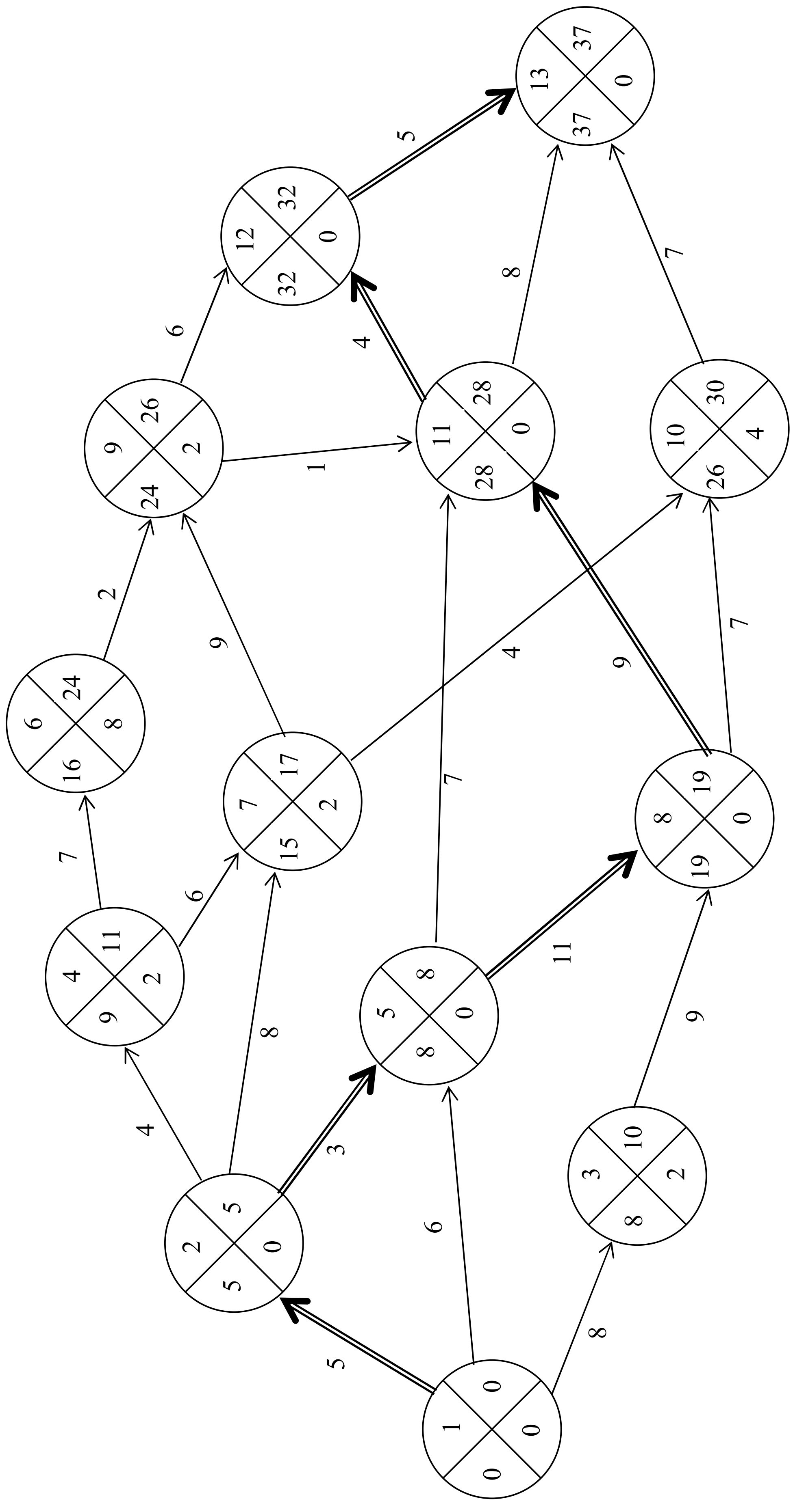
Здесь не отображены последующие этапы нумерации – зачеркивание работ соответствующим количеством черточек. Читателю предлагается сделать это самостоятельно.

3). Для дальнейшей работы с графом каждую вершину разобьем на четыре части. В верхней части указывается номер события *i*, в правой – *ранний срок* $t_р(i)$ *свершения события i,* в левой – *поздний срок* $t_п(i)$ *свершения события i,* в нижней – *резерв* $R(i)$ *времени события i.*



Сначала рассчитываются ранние сроки свершения событий (для события 1 его полагают равным 0). Для остальных событий (в порядке возрастания номеров) эти сроки подсчитываются по формуле

$t_р(i) = \max\limits_{(j;i)\in U_i^+} [\ t_р(j) + t(j;i)\ ]$, где U_i^+ - множество работ, входящих в *i*-е событие; $t_р(i)$ - ранний срок наступления начального события работы (*i; j*) с продолжительностью $t(i;j)$. Смотрите график и данные расчетов на следующих страницах.



В нашем случае будем иметь:

$t_p(2) = t_p(1) + t(1;2) = 0 + 5 = 5;\quad t_p(3) = t_p(1) + t(1;3) = 0 + 8 = 8;$

$t_p(4) = t_p(2) + t(2;4) = 5 + 4 = 9;\quad t_p(5) = \max\left[t_p(1) + t(1;5);\ t_p(2) + t(2;5)\right] =$

$= \max\left[0 + 6; 5 + 3\right] = 8;\quad t_p(6) = t_p(4) + t(4;6) = 9 + 7 = 16;$

$t_p(7) = \max\left[t_p(2) + t_p(2;7); t_p(4) + t(4;7)\right] = \max\left[5 + 8; 9 + 6\right] = 15;$

$t_p(8) = \max\left[t_p(3) + t(3;8); t_p(5) + t(5;8)\right] = \max\left[8 + 9; 8 + 11\right] = 19;$

$t_p(9) = \max\left[t_p(6) + t(6;9); t_p(7) + t(7;9)\right] = \max\left[16 + 2; 15 + 9\right] = 24;$

$t_p(10) = \max\left[t_p(7) + t(7;10); t_p(8) + t(8;10)\right] = \max\left[15 + 4; 19 + 7\right] = 26;$

$t_p(11) = \max\left[8 + 7; 19 + 9; 24 + 1\right] = 28;\quad t_p(12) = \max\left[24 + 6; 28 + 4\right] = 32;$

$t_p(13) = \max\left[26 + 7; 28 + 8; 32 + 5\right] = 37.$

(Если вершина имеет одну входящую работу, то нет смысла писать max).

В итоге получено число $t_{kp} = 37$ – минимальное время, за которое можно выполнить весь комплекс работ.

Далее определим поздние сроки свершения событий, полагая для завершающего события $t_n(13) = 37$, а далее в порядке убывания вершин по формуле $t_n(i) = \min\limits_{(i;\, j)\in U_i^-} \left[t_n(j) - t(i; j)\right]$, где U_i^- – множество работ, выходящих из i-го события. У нас получится:

$t_n(12) = t_n(13) - t(12;13) = 37 - 5 = 32;\quad t_n(11) = \min\left[t_n(12) - t_n(11;12);\right.$

$\left. t_n(13) - t(11;13)\ \right] = \min\left[32 - 4; 37 - 8\right] = 28;\quad t_n(10) = 37 - 7 = 30;$

$t_n(9) = \min\left[28 - 1; 32 - 6\right] = 26;\quad t_n(8) = \min\left[26 - 7; 28 - 9\right] = 19;$

$t_n(7) = \min\left[26 - 9; 30 - 4\right] = 17;\ t_n(6) = 26 - 2 = 24;\ t_n(5) = \min\left[19 - 11; 28 - 7\right] = 8;$

$t_n(4) = \min\left[24 - 7; 17 - 6\right] = 11;\ t_n(3) = 19 - 9 = 10; t_n(2) = \min\left[11 - 4; 15 - 8; 8 - 3\right] =$

$= 5;\ t_n(1) = \left[5 - 5; 8 - 6; 10 - 8\right] = 0.$

4). Критический путь от исходного события до завершающего соединяет вершины, у которых равны ранние и поздние сроки свершения событий. У нас $L_{kp} : 1 - 2 - 5 - 8 - 11 - 12 - 13$, а продолжительность его $t(L_{kp}) = t_{kp} = \ = 5 + 3 + 11 + 9 + 4 + 5 = 37$. Отмечаем его двойными стрелками. Работа (1; 5), начало и окончание которой имеют нулевые резервы времени, не включена в критический путь, так как ее продолжительность, равная 6, меньше продолжительности пути 1-2-5. Аналогично с работами (5; 11) и (11; 13).

5). Найдем *резервы времени событий* $R(i) = t_n(i) - t_p(i)$ и внесем их в нижние четверти вершин. Очевидно, для вершин критического пути они равны нулю. *Интервалы свободы* или *резервные интервалы* события i находим в виде $\left[t_p(i); t_n(i)\right]$. Для вершин критического пути они вырождаются в точку. Для остальных вершин: $i = 3 \Rightarrow [8;10]$, $i = 4 \Rightarrow [9;11]$, $i = 6 \Rightarrow [16;24]$ и так далее.

6). *Ранние сроки начала работ* равны раннему сроку свершения ее начального события, а *поздние сроки окончания работ* – позднему сроку свершения ее конечного события: $t_{\text{р.н.}}(i;j)=t_{\text{р}}(i)$, $t_{\text{п.о.}}(i;j)=t_{\text{п}}(j)$. Например, $t_{\text{р.н.}}(2;4)=5$, $t_{\text{п.о.}}(2;4)=11$; $t_{\text{р.н.}}(4;6)=9$, $t_{\text{п.о.}}(4;6)=24$ и т. д..

7). *Свободный резерв времени работы* $R_c(i;j)=t_{\text{р}}(j)-t_{\text{р}}(i)-t(i;j)$.

Полный резерв времени работы $R_n(i;j)=t_{\text{п}}(j)-t_{\text{р}}(i)-t(i;j)$.

$R_c(1;3)=8-0-8=0$, $R_n(1;3)=10-0-8=2$;

$R_c(1;5)=8-0-6=2$, $R_n(1;5)=8-0-6=2$;

$R_c(3;8)=19-8-9=2$, $R_n(3;8)=19-8-9=2$;

$R_c(2;4)=9-5-4=0$, $R_n(2;4)=11-5-4=2$;

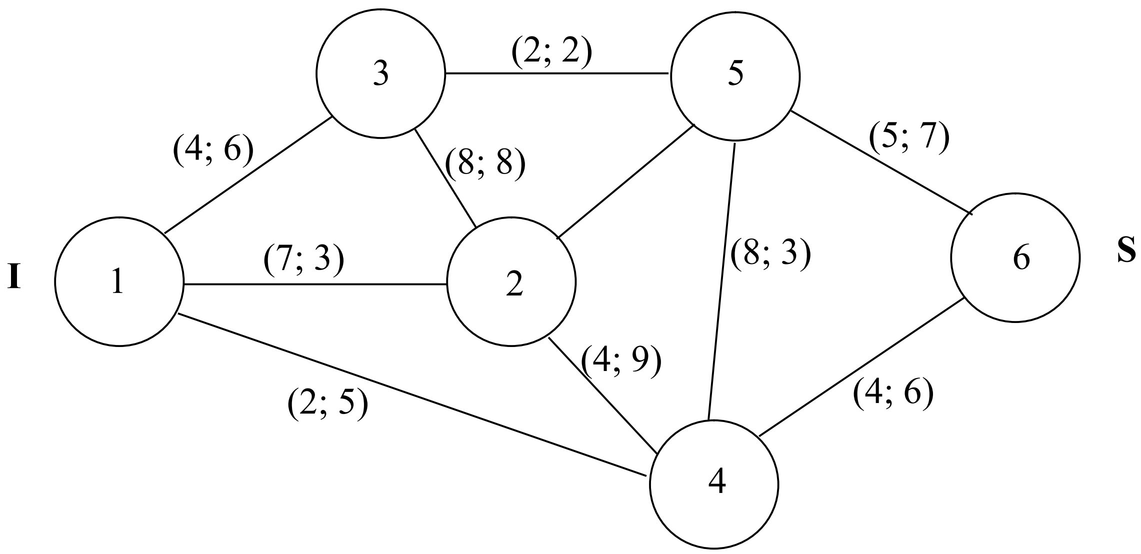
$R_c(2;7)=15-5-8=2$, $R_n(2;7)=17-5-8=4$ и т.д..

Для работ критического пути все резервы равны нулю.

В заключение заметим, что *полный резерв* времени работы – это максимальное количество времени, на которое можно задержать начало этой работы или увеличить продолжительность ее, не изменяя критического времени. *Свободный резерв* времени работы – время, на которое можно отсрочить начало работы или увеличить продолжительность ее при условии, что она начинается в свой ранний срок и при этом не нарушаются ранние сроки начала последующих.

4. Задача о максимальном потоке.

Рассмотрим сеть, ориентированную в одном направлении от истока I к стоку S, с известными пропускными способностями r_{ij} от вершины i к вершине j . Пропускная способность ребра (i; j) – это максимальное количество вещества, которое может пропустить это ребро в единицу времени.



Для наглядности можно представлять, что по ребрам сети из истока I в сток S движется некоторое вещество (груз, ресурс, информация и т.п.).

Задача: *сформировать на сети поток максимальной мощности*. Совокупность $X=\{x_{ij}\}$ потоков x_{ij} по всем ребрам $(i;j)$ называется потоком по сети, а функция $f=\sum\limits_j x_{Ij}=\sum\limits_i x_{iS}$ (общее количество вещества, вытекающее из истока, и общее количество, втекающее в сток) называется *мощностью потока на сети.*

Решение задачи проведем в несколько этапов.

1). *Составим матрицу R пропускных способностей сети*. Размерность квадратной матрицы R равна числу вершин сети. Диагональные элементы ее равны нулю $(r_{ii}=0)$. Остальные элементы матрицы – пропускные способности соответствующих ребер, указанные на ребрах сети. Первое из этих чисел означает пропускную способность ребра в направлении от вершины i к вершине j, второе – в противоположном направлении. Так, например, в нашем случае $r_{24}=4,\ r_{42}=9$. Если две вершины не связаны общим ребром то пропускная способность между ними равна нулю. В общем случае $r_{ij}\neq r_{ji}$. Если же $r_{ij}=r_{ji}$, то в скобках на ребре указывают только одно число.

R	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	7	4	2	0	0
2	3	0	8	4	2	0
3	6	8	0	0	2	0
4	5	9	0	0	8	4
5	0	5	2	3	0	5
6	0	0	0	6	7	0

2). *Сформируем на сети начальный поток X* ^{0}. Числа $x^0_{ij}\ (i,j=1\div 6)$ должны удовлетворять условиям:

(1) $x_{ji}=-x_{ij}$ – поток из j в i противоположен потоку из i в j.

(2) $x_{ii}=0$.

(3) $x_{ij}\le r_{ij}$ – поток по ребру не больше его пропускной способности.

(4) $\sum\limits_j x_{ij}=0\ (i\neq I,S)$ – количество вещества, притекающее в вершину, равно количеству вещества, вытекающеего из нее.

(5) $\sum\limits_j x_{Ij}=\sum\limits_i x_{iS}=f$ – см. сноску ранее.

Учитывая ограничения (1) – (5), образуем в качестве начального поток X^0, в котором по пути 1 – 3 – 5 – 6 перемещается 2 единицы, так как по ребру (3; 5) больше переместить нельзя (если $x_{ij}=r_{ij}$, то ребро называется *насыщенным,* в противном случае – *ненасыщенным*), одна единица по пути 1 – 2 – 5 – 6 (ребро (2; 5) – насыщенное) и 2 единицы по пути 1 – 4 – 6 (ребро (1; 4) – насыщенное). В результате получим следующие потоки по ребрам: $x^0_{12}=1,\ x^0_{13}=2,\ x^0_{14}=2,\ x^0_{35}=2,\ x^0_{25}=1,\ x^0_{46}=2,\ x^0_{56}=2+1=3$. Потоки по остальным ребрам равны нулю. По формуле (5) найдем мощность потока X^0 на сети $f = x_{12}^0 + x_{13}^0 + x_{14}^0 = x_{46}^0 + x_{56}^0 = 1+2+2 = 2+3 = 5$ ед..

Далее следует убедиться, является ли X^0 потоком максимальной мощности.

X^0	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	2	0	0
2	–1	0	0	0	1	0
3	–2	0	0	0	2	0
4	–2	0	0	0	0	2
5	0	–1	–2	0	0	3
6	0	0	0	–2	–3	0

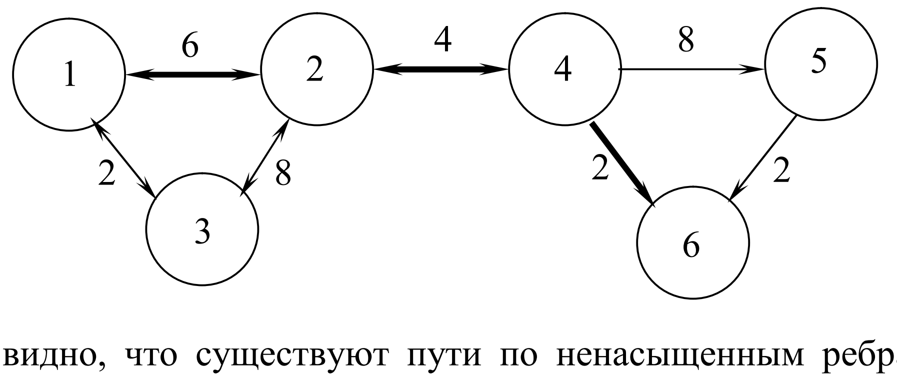
$R - X^0$	*1*	2	3	4	5	6
1	0	6	2	0	0	0
2	4	0	8	4	0	0
3	8	8	0	0	0	0
4	7	9	0	0	8	2
5	0	6	4	3	0	2
6	0	0	0	8	10	0

3). *Составим матрицу* $R - X^0$, элементы $r_{ij} - x_{ij}^0$ которой позволяют судить о насыщенности ребер сети. Насыщенным ребрам будут соответствовать нули, а ненасыщенным – отличные от нуля числа. Например, ребро (1; 3) ненасыщенное, так как $r_{13} - x_{13}^0 = 4 - 2 = 2 \neq 0$, а ребро (2; 5) насыщенное, так как $r_{25} - x_{25}^0 = 1 - 1 = 0$.

Зная матрицу $R - X^0$, можно сформировать подмножество вершин, по которым можно попасть из I в S, двигаясь по ненасыщенным ребрам, а также, если поток X^0 не максимален, выделить полные пути из истока в сток. Тем самым увеличится мощность потока.

С этой целью просматриваем первую строку матрицы $R - X^0$. Очевидно, из вершины 1 можно попасть в вершины 2 и 3 по ненасыщенным ребрам.

Переходим к рассмотрению второй и третьей строк. Так из вершины 2 можно перейти в вершину 1 (это нас не устраивает, так как первая строка уже рассматривалась), в вершины 3 и 4. По третьей строке видим, что ненулевые элементы указывают на возможность перехода только к вершинам 1 и 2, что уже не актуально. Таким образом, переходим к рассмотрению четвертой строки. И так далее. В итоге получим схему возможных переходов:



(*)

Отсюда видно, что существуют пути по ненасыщенным ребрам из истока в сток. То есть X^0 не является максимальным потоком и его мощность можно увеличить. Для этого рассмотрим один из возможных *полных путей* (путь на

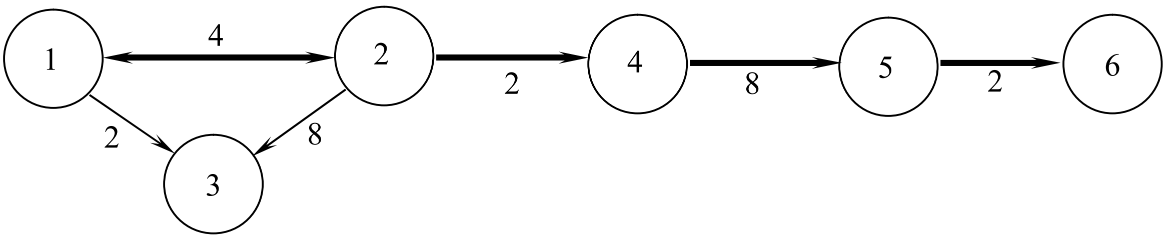
сети от истока к стоку (отмечен жирными стрелками)). $1-2-4-6$. По нему можно пропустить поток с мощностью Δ, равной
минимальной из скорректированных пропускных способностей ребер этого пути: $\Delta = \min\limits_{1-2-4-6}(6;4;2) = 2$.

Теперь для построения нового потока X^1 и его матрицы добавляем найденное $\Delta = 2$ к элементам x_{12}^0, x_{24}^0, x_{46}^0. Учитывая условие (1), получим матрицу нового потока, мощность которого равна $f\left(X^1\right) = 5 + 2 = 7$ ед..

X^1	1	2	3	4	5	6
1	0	3	2	2	0	0
2	–3	0	0	2	1	0
3	–2	0	0	0	2	0
4	–2	–2	0	0	0	4
5	0	–1	–2	0	0	3
6	0	0	0	–4	–3	0

$R-X^1$	1	2	3	4	5	6
1	0	4	2	0	0	0
2	6	0	8	2	0	0
3	8	8	0	0	0	0
4	7	11	0	0	8	0
5	0	6	4	3	0	2
6	0	0	0	10	10	0

Исследуем его на оптимальность, для чего составим новую матрицу насыщенности ребер $R - X^1$ и по ней вновь попытаемся найти путь по ненасыщенным ребрам от истока к стоку. Аналогичным образом строим схему вида (*):

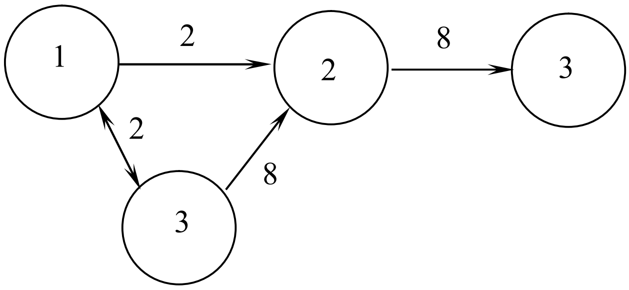


Из схемы видно, что поток X^1 не максимален, так как вершина 6 достижима из вершины 1 по ненасыщенным ребрам. За счет добавления нового полного пути $1-2-4-5-6$ получим поток X^2, мощность которого увеличится на величину $\Delta = \min\limits_{1-2-4-5-6}(4;2;8;2) = 2$ и станет равной $f(X^2) = 7 + 2 = 9$. Составляем матрицы:

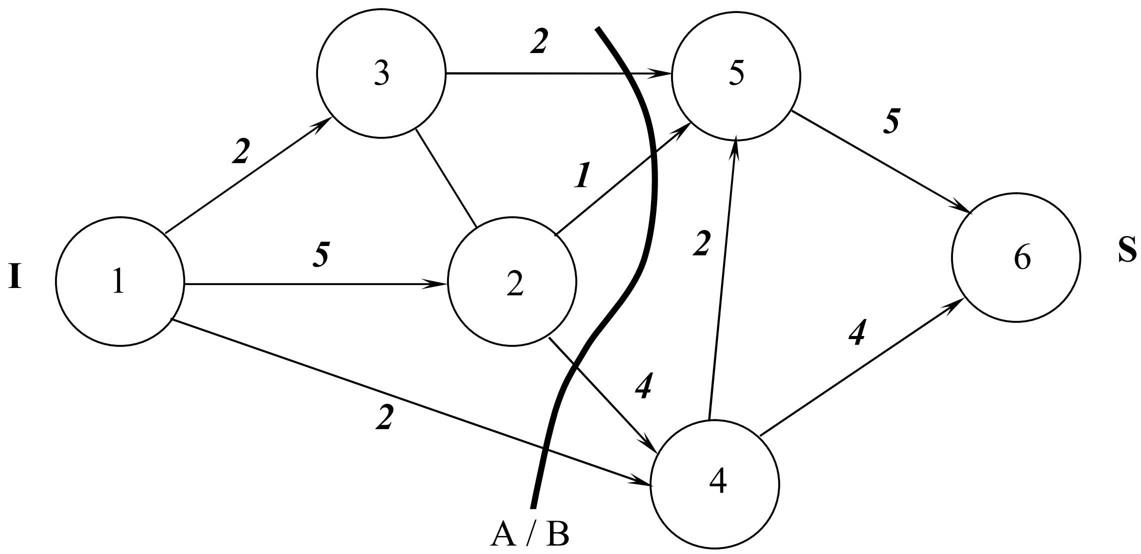
X^2	1	2	3	4	5	6
1	0	5	2	2	0	0
2	–5	0	0	4	1	0
3	–2	0	0	0	2	0
4	–2	–4	0	0	2	4
5	0	–1	–2	–2	0	5
6	0	0	0	–4	–5	0

$R-X^2$	1	2	3	4	5	6
1	0	2	2	0	0	0
2	8	0	8	0	0	0
3	8	8	0	0	0	0
4	7	13	0	0	6	0
5	0	6	4	5	0	0
6	0	0	0	10	12	0

Все нули в последнем столбце матрицы $R - X^2$ указывают на то, что вершина 6 не достижима по ненасыщенным путям ни из одной другой вершины, то есть более нет полных ненасыщенных путей. Это же подтверждает и схема вида (*).



Таким образом поток X^2 максимален. Остается нанести его на сеть с указанием направления и величин потоков по отдельным ребрам.



4). Правильность построенного максимального потока можно проверить, используя теорему Форда-Фалкерсона, согласно которой на любой сети максимальная величина потока из истока в сток равна минимальной пропускной способности *разреза* на сети[1)], отделяющего исток от стока. Для этого найдем на заданной сети разрез, пропускная способность которого совпадает с мощностью построенного максимального потока, равной 9 ед.. В соответствии с последней схемой вида (*) (или по матрице $R - X^2$) из вершины 1 по ненасыщенным ребрам можно попасть лишь в вершины 2 и 3. Отделим эти вершины от остальных (на сети – кривая линия). Пропускная способность ребер разреза равна $r_{35} + r_{25} + r_{24} + r_{14} = 2 + 1 + 4 + 2 = 9$ ед., что совпадает с максимальной мощностью на сети.

1) Разрезом на сети называется такое разбиение множества вершин сети на два подмножества A и B таких, что исток I попадает в A, а сток S в B (обозначается A / B). Сумма пропускных способностей всех ребер разреза называется *пропускной способностью разреза*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасс С. Линейное программирование. М.: Физматгиз, 1961.
2. Кузнецов А. В. и др.. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование. Мн.:Вышэйшая школа., 1995.
3. Кузнецов А. В., Холод Н. И. Математическое программирование. Мн.: Вышэйшая школа., 1984.
4. Кузнецов А. В., Холод Н. И., Костевич Л. С. Руководство к решению задач по математическому программированию. Мн.: Вышэйшая школа., 1978.
5. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. М. Физматгиз., 1963.
6. Рутицкий Я. Б., Годунов Б. А. Линейное программирование. Воронеж.: ВИСИ., 1975.
7. Годунов Б. А., Рубанов В. С. Методические указания к выполнению курсовой работы по курсу «Высшая математика». Брест.: БрПИ., 1997.

СОДЕРЖАНИЕ

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Годунов Борис Алексеевич
Рубанов Владимир Степанович
Гусева Светлана Тадеушевна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
Задания, методические указания

Ответственный за выпуск: Б. А. Годунов
Компьютерный набор Б. А. Годунов
Редактор: Т. В. Строкач
Корректор: Е. В. Никитчик

Подписано к печати 19.12.2002 г. Формат 60×84/16
Усл. п. л. 3,25. Уч. изд. л. 3,5. Заказ № 100.
Тираж 200 экз. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет».
224017, Брест, ул. Московская, 267.