подгруппа. Ясно, что $F \subseteq G_1$, поэтому порядок F равен p, p^2 или p^3, где p – простое число.

Если $|F| = p$, то G/F изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов $Aut F$ группы F, порядок которой равен $p-1$. Отсюда, $G_p = F$ и $l_p(G) \le 1$.

Если $|F| = p^n$, $n \in \{2,3\}$, то $Aut F = GL(n,p)$, G/F – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n,p)$ и $O_p(G/F) = 1$. По лемме 2 G/F – p'-группа, т. е. $l_p(G) \le 1$ для всех простых $p > 3$. Теорема доказана.

Доказательство следствия.

Пусть G A_4-свободна. Воспользуемся индукцией по порядку группы G и докажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Можно считать, что $\Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, которая совпадает с подгруппой Фиттинга F, $F = C_G(F)$. Так как $F \le G_1$, то порядок $|F|$ равен p или p^2, или p^3, где p – простое число.

Если $|F| = p$, то G/F – циклическая группа, как группа автоморфизмов группы простого порядка p, поэтому G/F абелева. Пусть $|F| = p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой A_4-свободной разрешимой подгруппе H группы $GL(2,p)$. Подгруппа H метабелева по лемме 3, тогда $G/F \in \mathfrak{A}^2$. Пусть $|F| = p^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой A_4-свободной разрешимой подгруппе H группы $GL(3,p)$. По лемме 3 подгруппа $H \in \mathfrak{A}^4$, т.е. $G/F \in \mathfrak{A}^4$.

Итак, в любом случае $G/F \in \mathfrak{A}^4$. Так как $F/\Phi(G)$ абелева и $(G/\Phi(G))/(F/\Phi(G)) \cong G/F$, то по лемме 4 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^5$ и производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Покажем, что 3-длина не превышает 2, p-длина не превышает 1 для всех простых $p \ne 3$.

В силу ранее доказанного следствия 2-длина и 3-длина группы G не превышает 2, p-длина не превышает 1 для всех простых $p > 3$. Используя индукцию по порядку группы, докажем, что 2-длина не превышает 1. По лемме VI.6.9 [2] можно считать, что $O_{2'}(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа порядка 2^α, обладающая дополнением M в группе G, т. е. $G = [F]M$. Поскольку $|F| = |G:M|$ и M – максимальная подгруппа группы G, то $\alpha \le 2$. Так как $C_G(F) = F$, то фактор-группа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(\alpha, 2)$. Если $|F| = 2$, то группа G изоморфна F и 2-длина не превышает 1. Если $|F| = 4$, то по лемме 5 группа G изоморфна или A_4, или S_4, а, значит, не A_4-свободна. Противоречие.

Заключение. В данной статье исследованы разрешимые группы, обладающие нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от четвертых степеней. В частности, нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6, у A_4-свободной разрешимой группы производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Построен пример такой группы, показывающий точность полученных оценок.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967.
3. Трофимук, А.А. Конечные разрешимые группы с порядками факторов нормального ряда, свободного от кубов / А.А. Трофимук, В.С. Монахов // Вестник Брестского университета. Серия 4. Физика и математика. – №1. – 2010. – С. 118–126.
4. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2011. – Т. 52, №5. – С. 1123–1137.

Материал поступил в редакцию 06.02.2018

ARTSIUSHENIA T.A., TROFIMUK A.A. Finite groups having a normal series in which the orders of factors are fourth power-free

A natural number n is called free of the fourth powers, if p^4 it does not divide n for all prime p. A group is called A_4-free if it does not contain sections isomorphic to the alternating group A_4. The structure of finite solvable groups in which orders of factors of the normal series are free of fourth degrees is studied. In particular, sharp estimates of the derived, nilpotent, and p-length for such groups are obtained. These estimates are refined for A_4-free groups.

УДК 512.542

Грицук Д.В., Трофимук А.А.

КОНЕЧНЫЕ π-РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ 2-МАКСИМАЛЬНЫХ π-ПОДГРУПП

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве P обозначается через π'. Группа называется π-группой, если все простые делители порядка группы принадлежат множеству π, и π'-группой – в противном случае.

Напомним, что группа G называется π-разрешимой, если она обладает нормальным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G, \quad (1)$$

***Грицук Д.В.**, к. физ.-мат. н., доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина, e-mail: Alexander.trofimuk@gmail.com.*
Беларусь, БрГУ им. А.С. Пушкина, 224016, бульвар Космонавтов, 21.

факторы которого являются либо разрешимыми π-группами, либо π'-группами. Данный ряд будем называть (π',π)-рядом группы G.

Очевидно, что всякая π-разрешимая группа G обладает нормальным (π',π)- рядом, у которого все π-факторы нильпотентны. Наименьшее число нильпотентных π-факторов среди всех таких нормальных рядов группы G называется нильпотентной π-длиной и обозначается через $l^n_\pi(G)$. Если $\pi(G)=\pi$, то π-разрешимая группа разрешима и нильпотентная π-длина группы G совпадает с нильпотентной длиной группы G. Здесь $\pi(G)$ – это множество простых делителей порядка группы G. Обзор результатов по нильпотентной π-длине и другим инвариантам частично разрешимых групп приведен в работе [2].

Очевидно, что всякая π-разрешимая группа G обладает субнормальным рядом, факторы которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами для всех i. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l^a_\pi(G)$. Если $\pi(G)=\pi$, то значение $l^a_\pi(G)$ совпадает со значением производной длины группы G. В работе [3] изучены свойства производной π-длины π-разрешимой группы и получены ее оценки в зависимости от строения силовских p-подгрупп, $p\in\pi$.

Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G.

Связь между 2-максимальными подгруппами группы G и структурой группы G исследовалась многими авторами. Наиболее ранние результаты в данном направлении получил Редеи [4], описавший неразрешимые группы с абелевыми 2-максимальными подгруппами, и Хупперт [5], установивший сверхразрешимость группы, в которой все 2-максимальные подгруппы нормальны. Эти результаты породили многие другие исследования в данном направлении. Например, в работах Судзуки [6] и Янко [7] содержится описание конечных неразрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы нильпотентны. Описание разрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы являются нильпотентными, было получено В.А. Белоноговым в работе [8].

В работе [9] были получены оценки инвариантов π-разрешимых групп с ограниченной максимальной подгруппой π-холловой подгруппы.

Теорема. Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – π-холлова подгруппа и M – 2-максимальная подгруппа в G_π. Тогда:

1) если подгруппа M нильпотентна, то $l^n_\pi(G)\le 1+\max_{r\in\pi} l_r(G)$ и $l^a_\pi(G)\le \max_{r\in\pi} d(G_r)\left(1+\max_{r\in\pi} l_r(G)\right)$;
2) если подгруппа M абелева, то $l^n_\pi(G)\le 3$ и $l^a_\pi(G)\le 4$.

1 Вспомогательные результаты. Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны.

Группой Миллера-Морено называют неабелеву группу, все собственные подгруппы которой абелевы.

Из определений π-длины, нильпотентной и производной π-длин вытекает, что $l_\pi(G)\le l^n_\pi(G)\le l^a_\pi(G)$.

В леммах 1-2 под $l^*_\pi(G)$ можно понимать либо всюду $l^n_\pi(G)$, либо всюду $l^a_\pi(G)$.

Лемма 1. ([9, лемма 6]) *Если G – π-разрешимая группа и $\pi=\pi_1\cup\pi_2$, то $l^*_\pi(G)\le l^*_{\pi_1}(G)+l^*_{\pi_2}(G)$.*

Лемма 2. ([3, лемма 2]) *Пусть G – π-разрешимая группа.* Тогда:

1) *если H – подгруппа группы G, то $l^*_\pi(H)\le l^*_\pi(G)$;*
2) *если N – нормальная подгруппа группы G, то $l^*_\pi(G/N)\le l^*_\pi(G)$ и $l^*_\pi(G)\le l^*_\pi(G/N)+l^*_\pi(N)$;*
3) *если N – нормальная π'-погруппа группы G, то $l^*_\pi(G/N)=l^*_\pi(G)$;*
4) *если G и V – π-разрешимые группы, то $l^*_\pi(G\times V)=\max\{l^*_\pi(G),l^*_\pi(V)\}$;*
5) *если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы в G, то $l^*_\pi(G/(N_1\cap N_2))\le \max\{l^*_\pi(G/N_1),l^*_\pi(G/N_2)\}$;*
6) *$l^n_\pi(G/\Phi(G))=l^n_\pi(G)$.*

Лемма 3. ([3, лемма 4]) Пусть G – π-разрешимая группа и t – натуральное число. Предположим, что $l^*_\pi(G/N)\le t$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G, но $l^*_\pi(G)>t$. Тогда:

1) $O_{\pi'}(G)=1$;
2) в группе G существует только одна минимальная нормальная подгруппа;
3) $F(G)=O_p(G)=F(O_\pi(G))$ для некоторого простого $p\in\pi$;
4) $O_{p'}(G)=1$ и $C_G(F(G))\subseteq F(G)$.

Лемма 4. ([9, леммы 7-8, теоремы 1-2]) Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – π-холлова подгруппа в G, M – максимальная подгруппа в G_π и G_p – силовская p-подгруппа в G.

1. Если G_π нильпотентна, то $l^n_\pi(G)\le \max_{r\in\pi} l_r(G)$ и
$$l^a_\pi(G)\le \max_{r\in\pi} l_r(G)\cdot\max_{r\in\pi} d(G_r).$$
2. Если G_π является группой Шмидта, то $l^n_\pi(G)\le 2$ и $l^a_\pi(G)\le 3$.
3. Если G_π абелева, то $l^a_\pi(G)\le 1$.
4. Если G_π является группой Миллера-Морено, то $l^a_\pi(G)\le 2$.
5. Если G_p имеет порядок, не превышающий p^3, то $l^a_p(G)\le 2$.
6. Если M абелева, то $l^n_\pi(G)\le 2$ и $l^a_\pi(G)\le 3$.

Лемма 5. ([9, лемма 9]) Пусть G – разрешимая группа и M – максимальная подгруппа в G. Если M холлова и q делит $|G:M|$, то силовская q-подгруппа в группе G элементарная абелева.

Лемма 6. Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – π-холлова подгруппа и M – максимальная подгруппа в G_π. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если подгруппа M абелева или группа Миллера-Морено, то $l^n_\pi(G)\le 3$ и $l^a_\pi(G)\le 4$;

2) если подгруппа M нильпотентна или группа Шмидта, то $l_{\pi}^{n}(G) \le 1 + max_{r\in\pi}\, l_r(G)$ и $l_{\pi}^{a}(G) \le max_{r\in\pi}\, d(G_r)(1 + max_{r\in\pi}\, l_r(G))$.

Доказательство.

По лемме 2 (3) можно считать, что $O_{\pi'}(G) = 1$.

Предположим, что $F(G) \subseteq M$.

<u>Если M абелева</u>, то $M \subseteq C_G(F(G))$. Применим индукцию по порядку группы G. По лемме 3 $C_G(F(G)) \subseteq F(G) \subseteq M$ и $F(G) = M$. Поэтому $G_{\pi}/F(G)$ имеет простой порядок и $l_{\pi}^{a}(G/F(G)) \le 1$ по лемме 4 (3). Так как $F(G)$ абелева, то $l_{\pi}^{n}(G) \le l_{\pi}^{a}(G) \le 2$. <u>Пусть M –p-группа Миллера-Морено</u>. Тогда либо G_{π} – p-группа, либо G_{π} – бипримарная группа с силовской p-подгруппой M и абелевой силовской q-подгруппой, $p \ne q$, по лемме 5 Из второго случая следует, что по лемме 1 $l_{\pi}^{*}(G) \le l_{q}^{*}(G) + l_{p}^{*}(G)$ и $l_{\pi}^{n}(G) \le l_{\pi}^{a}(G) \le 3$ по лемме 4 (3, 4). Поэтому G_{π} – p-группа. Если $F(G) = M$, то $G_{\pi}/F(G)$ имеет простой порядок и $l_{\pi}^{a}(G/F(G)) \le 1$ по лемме 4 (3). Поэтому $l_{\pi}^{n}(G) \le 2$ и $l_{\pi}^{a}(G) \le 3$. Если $F(G)$ – собственная подгруппа в M, то $F(G)$ абелева и $C_G(F(G)) = F(G)$. Так как $|M/Z(M)| = p^2$ и $Z(M) \subseteq C_G(F(G)) = F(G)$, то $|G_{\pi}/F(G)| \le p^3$. Поэтому $l_{\pi}^{n}(G) \le l_{\pi}^{a}(G) \le 3.$

Пусть <u>M – ненильпотентная группа Миллера-Морено.</u> Тогда $M = [P]Q$, где P – нормальная силовская p-подгруппа группы M, Q – ненормальная циклическая силовская q-подгруппа группы M. Тогда по свойству подгруппы Миллера-Морено $F(G) = P$. В фактор-группе $G/F(G)$ подгруппа $G_{\pi}/F(G)$ содержит циклическую максимальную подгруппу $M/F(G) \cong Q$. По лемме 4 (6) $l_{\pi}^{n}(G/F(G)) \le 2$ и $l_{\pi}^{a}(G/F(G)) \le 3$. Поэтому $l_{\pi}^{n}(G) \le 3$ и $l_{\pi}^{a}(G) \le 4$.

Пусть $F(G)$ не содержится в подгруппе M.

Тогда $G_{\pi} = F(G)M$. <u>Если M абелева, либо группа Миллера-Морено, то, п</u>оскольку $G_{\pi}/F(G) \cong M/(M \cap F(G))$, фактор-группа $G_{\pi}/F(G)$ абелева или группа Миллера-Морено. Тогда $l_{\pi}^{n}(G/F(G)) \le l_{\pi}^{a}(G/F(G)) \le 2$ по лемме 4 (3,4). Поэтому $l_{\pi}^{n}(G) \le 3$. Подгруппа $F(G) \cap M$ нормальна в G_{π}. Поэтому

$$G_{\pi}/F(G) \cap M = [F(G)/F(G) \cap M](M/F(G) \cap M).$$

Так как

$$F(G)\,/\,F(G) \cap M \cong \left(\left(F(G)\,/\,\Phi(G) \right) / \left(F(G) \cap M)\,/\,\Phi(G) \right) \right),$$

то $d(F(G)) \le 2$, то $l_{\pi}^{a}(G) \le 3$.

2. Если G_{π} – нильпотентная группа, то по лемме 4 (3) $l_{\pi}^{n}(G) \le 1 + \max_{r\in\pi} l_r(G)$. Тогда в дальнейшем считаем, что G_{π} – ненильпотентная группа. Применим индукцию по порядку группы G. Для $l_{\pi}^{n}(G)$ по лемме 2 (6) принимаем, что $\Phi(G) = 1$. Тогда по лемме 3 $F(G) = O_p(G)$ для некоторого $p \in \pi$, $F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в группе G и $C_G(F(G)) = F(G).$

Пусть $F(G)$ содержится в M. Если <u>M – нильпотентна</u>, то $M = M_p \times M_{p'}$. Так как каждый элемент из $M_{p'}$ перестановочен с каждым элементом из M_p, то

$$M_{p'} \subseteq C_G(F(G)) = F(G).$$

Поэтому $M_{p'} = 1$ и M – p-подгруппа. Так как подгруппа G_{π} ненильпотентна, то $M = G_p, |G_{\pi} : M| = q^n, q \ne p$ и $G_{\pi} = G_p G_q$. По лемме 5 G_q абелева и $l_q(G) \le 1$. По лемме 1 получим

$$l_{\pi}^{n}(G) \le l_q(G) + l_p(G) \le 1 + \max_{r\in\pi} l_r(G).$$

<u>Если M – подгруппа Шмидта</u>. Тогда $M = [P]Q$, где P – нормальная силовская p-подгруппа группы M, Q – ненормальная циклическая силовская q-подгруппа группы M. Тогда по свойству подгруппы Шмидта $F(G) = P$.

В фактор-группе $G/F(G)$ подгруппа $G_{\pi}/F(G)$ содержит циклическую максимальную подгруппу $M/F(G) \cong Q$. По лемме 4 (6) $l_{\pi}^{n}(G/F(G)) \le 2$. Поэтому $l_{\pi}^{n}(G) \le 3$.

Пусть $F(G)$ не содержится в M. Тогда $G_{\pi} = F(G)M$ и фактор-группа $G_{\pi}/F(G)$ нильпотентна или подгруппа Шмидта. По лемме 4 (1,2) $l_{\pi}^{n}(G/F(G)) \le max_{r\in\pi}\, l_r(G/F(G))$ или $l_{\pi}^{n}(G\,/\,F(G)) \le 2$, поэтому $l_{\pi}^{n}(G) \le 1 + max_{r\in\pi}\, l_r(G)$ или $l_{\pi}^{n}(G) \le 3$. Легко заметить, что если $l_r(G) \le 1$ для всех $r \in \pi$, то G_{π} нильпотентна. Противоречие. Поэтому в любом случае, $l_{\pi}^{n}(G) \le 1 + max_{r\in\pi}\, l_r(G)$. Из леммы 4 следует, что

$$l_{\pi}^{a}(G) \le \max_{r\in\pi} d(G_r) \cdot l_{\pi}^{n}(G) \le \max_{r\in\pi} d(G_r) \cdot (1 + \max_{r\in\pi} l_r(G)).$$

Доказательство теоремы

Пусть M – 2-максимальная подгруппа в G_{π}. Тогда существует максимальная подгруппа M_1 в G_{π} такая, что M максимальная в M_1. Если подгруппа M абелева, то M_1 является либо абелевой, либо группой Миллера-Морено. По лемме 6 (1) следует, что $l_{\pi}^{n}(G) \le 3$ и $l_{\pi}^{a}(G) \le 4.$ Если подгруппа M нильпотентна, то M_1 является либо нильпотентной, либо группой Шмидта. По лемме 6 (2) следует, что $l_{\pi}^{n}(G) \le 1 + max_{r\in\pi}\, l_r(G)$ и $l_{\pi}^{a}(G) \le max_{r\in\pi}\, d(G_r)(1 + max_{r\in\pi}\, l_r(G))$.

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф17М-063).

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов // Минск: Вышэйшая школа, 2006.
2. Монахов, В.С. Инварианты конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – №1 (2). – С. 63–81.
3. Грицук, Д.В. О производной π-длине π-разрешимой группы / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
4. Rédei, L. Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen / L. Rédei // Acta Math. – 1950. – T. 84. – S. 129–153.

5. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert// Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
6. Suzuki, M. The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8, № 4. – P. 686–695.
7. Janko, Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko// Math. Z. – 1962. – Vol. 79. – P. 422–424
8. Белоногов, В.А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В.А. Белоногов // Матем. заметки. – 1968. – Т. 3, № 1. – С. 21–32.
9. Монахов, В.С. О производной π-длине конечной π-разрешимой группы с заданной π-холловой подгруппой / В.С. Монахов, Д.В. Грицук // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 3. – С. 215–223.

Материал поступил в редакцию 15.12.2017

GRITSUK D.V., TROFIMUK A.A. On finite π-solvable groups with given properties of 2-maximal π-subgroups.

We obtain estimates of the derived π-length and the nilpotent π-length of a π-solvable group G in which 2-maximal subgroup of Hall π-subgroup of G is Abelian (nilpotent). In particular, in the Abelian case the derived π-length of such group does not exceed 4 and the nilpotent π-length of such group does not exceed 3.

УДК 517.91: 004.021 УДК 519.61, 517.9

Чичурин А.В., Швычкина Е.Н., Кальчук И.В.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ В МОДЕЛЯХ ХЕМОСТАТА И КАЧЕСТВЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ НЬЮТОНОВОЙ ПРОБЛЕМЫ МНОГИХ ТЕЛ

Введение. Изучение математических моделей, описывающих процессы лабораторного культивирования генетически модифицированных организмов в настоящее время является крайне важным. Генетическая модификация, как правило, осуществляется путем вставки молекулы ДНК в клетку в виде плазмиды. Эти плазмидосодержащие микроорганизмы затем растут в хемостате [1]. В течение процесса роста родительские клетки микроорганизма могут потерять плазмиды и вернуться к бесплазмидному состоянию или приобрести новые модифицированные плазмидосодержащие клетки. Примеры таких процессов культивирования описаны в [2, 3].

Для моделирования непрерывного процесса культивирования генно-модифицированных микроорганизмов применим методы, рассмотренные в работах [4, 5, 6]. Для описания динамики нестабильных штаммов микроорганизмов наиболее продуктивное развитие получила модель, разработанная и проанализированная Ф.Стюартом и Б.Левиным [2]:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = \left(s_0 - s(t)\right)D - x_1(t)\mu_1\left(s(t)\right) - x_2(t)\mu_2\left(s(t)\right), \\ \dot{x}_1(t) = \left((1-q)\mu_1\left(s(t)\right) - D\right)x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = \left(\mu_2\left(s(t)\right) - D\right)x_2(t) + q\mu_1\left(s(t)\right)x_1(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $x_1(t)$ – плотность плазмидосодержащего и $x_2(t)$ плотность бесплазмидного микроорганизма в момент времени t; $\mu_i\left(s(t)\right)\ (i=1,2)$ – удельные скорости роста; q – вероятность образования бесплазмидных клеток при делении плазмидосодержащих клеток.

В работах [1–3] приведено исследование системы (1) для случая, когда удельная скорость потребления субстрата i-м микроорганизмом задается при помощи функции Моно:

$$\mu_i\left(s(t)\right) = \frac{m_i s(t)}{a_i + s(t)}\ (i=1,2), \tag{2}$$

где параметры $a_i\ (i=1,2)$ – постоянные равные концентрации субстрата, при которых удельная скорость роста микроорганизма равна половине максимальной (константы Михаэлиса-Метен); $m_i\ (i=1,2)$ – максимальная скорость роста i-го микроорганизма.

При анализе системы (1) в работе [2] использовался параметр, названный «стоимостью плазмиды» и показывающий селективное преимущество бесплазмидных клеток:

$$\rho(s) = 1 - \frac{\mu_1\left(s(t)\right)}{\mu_2\left(s(t)\right)}. \tag{3}$$

Систему (1) рассмотрим в случае, когда функции $\mu_i\left(s(t)\right)\ (i=1,2)$ задаются равенствами (2), параметры a_1, a_2 удовлетворяют условию $a_1 = a_2$ [7, 8]. При этих условиях постоянные m_1 и m_2 связаны следующим соотношением $m_1 = (1-\rho)m_2$. При таких предположениях система (1) примет вид:

$$s'(t) = \left(s_0 - s(t)\right)D - \frac{(1-\rho)m_2 x_1(t)s(t)}{a_2 + s(t)} - \frac{m_2 x_2(t)s(t)}{a_2 + s(t)},$$

$$x_1'(t) = \left(\frac{m_2(1-\rho)(1-q)s(t)}{a_2 + s(t)} - D\right)x_1(t), \quad x_2'(t) = \frac{m_2 s(t)\left(q(1-\rho)x_1(t) + x_2(t)\right)}{a_2 + s(t)} -$$

(4)

Для системы (4) будем искать решения, принимающие положительные значения и удовлетворяющие начальным условиям

$$s(0) = s_0 \geq 0,\ x_1(0) = x_{10} \geq 0,\ x_2(0) = x_{20} \geq 0. \tag{5}$$

Сведем решение поставленной задачи к решению одного дифференциального уравнения первого порядка относительно функции $x_1(t)$. Для этого складываем все три уравнения системы (4). В результате получим неполное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $\Delta(t) = s(t) + x_1(t) + x_2(t)$ вида $\Delta'(t) = D\left(s_0 - \Delta(t)\right)$. Интегрируя это уравнение, находим его общее решение $\Delta(t) = s_0 + e^{-tD}c_1$, где c_1 – произвольная постоянная. Тогда функция $s(t)$ имеет вид

$$s(t) = s_0 + e^{-tD}c_1 - x_1(t) - x_2(t). \tag{7}$$

Чичурин Александр Вячеславович, *д. ф-м. н., профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и математической физики Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки, Украина, г. Луцк; профессор кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина, г. Брест.*

Швычкина Елена Николаевна, *к. ф-м. н., доцент, доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета, г. Брест.*

Кальчук Инна Владимировна, *к. ф-м. н., доцент, заведующая кафедрой алгебры и математического анализа Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки, Украина, г. Луцк.*