Нетрудно проверить, что весовая функция W(x) удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$dW(x)/dx+a(x)W(x)=b(x),$$

где $a(x)=(1+nx)/(1-x^2)$, $b(x)=(1+x)^n/(1-x^2)$. Тогда для числа A(k) слов веса k, $2\le k\le n$, выполняется следующее рекуррентное соотношение:

$A(k)=(C_n^{k+1}-A(k-1)-(n-k+2)A(k-2))/k$, с начальными условиями A(0)=0; A(1)=1.

Замечание. Весовая функция самого кода Хэмминга с параметрами (n, n-m, 3) также удовлетворяет приведенному выше дифференциальному уравнению. Тогда последнее рекуррентное соотношение верно и для самого кода Хэмминга, различны лишь только начальные условия. В случае кода Хэмминга начальные условия имеют вид: A(0)=1; A(1)=0. Кроме того, весовая функция V(x) кода H_m и весовая функция W(x) кода $f+H_m$ связаны соотношением

$$V(x)+nW(x)=(1+x)^n.$$

Анализ предложения 1 дает возможность получить аналитические выражения числа слов фиксированных весов рассматриваемого кода.

Предложение 2. Число слов A(k) с весом Хэмминга равным k, $0<k<n$, кода, полученного в результате сдвига кода H_m определяется следующим выражением:

$$A(k)=(C_n^k-(-1)^{]k/2[}C_n^{[k/2]})/(n+1),$$

где]t[- наименьшее целое число, большее действительного числа t, а [t] - наибольшее целое число, не превосходящее действительное число t.

В качестве следствия полученных результатов приведем аналитические выражения для числа B(k) кодовых слов фиксированного веса k кода Хэмминга.

Следствие. Весовой спектр кода Хэмминга с параметрами (n, n-m, 3) определяется выражением

$$B(k)=(C_n^k+(-1)^{]k/2[}C_n^{[k/2]}n)/(n+1),$$

Замечание. Легко проверить, основываясь на полученных результатах, что между числом A(k) слов веса k кода $f+H_m$ и числом B(k) слов кода H_m выполняется соотношение

$$nA(k)+B(k)=C_n^k.$$

О весовых функциях одного класса кодов

Л.П.Махнист, В.А.Головко, Г.Л.Муравьев, Л.П.Матюшков

При определении весовых спектров некоторых кодов, если полностью известен спектр дуального к нему кода, как правило применяют тождество

Мак-Вильямс, связывающее весовые спектры исходного и дуального к нему кода. Однако в случае, когда расширенный код, т. е. код, полученный добавлением к исходному коду общей проверки на четность, инвариантен относительно транзитивной группы подстановок, целесообразно сделать выбор между определением весового спектра исходного кода или весовым спектром его модификации - расширенного кода. Фактически нужно произвести правильный выбор между спектром кода, дуального к исходному, и спектром кода, дуального к расширенному коду. Действительно, в некоторых случаях вычисление весового спектра исходного кода может существенно упростится. Напомним, что если найден весовой спектр расширенного кода, инвариантного относительно транзитивной группы подстановок, то вычисление весового спектра исходного кода несложно. Пусть $A(k)$ - число кодовых слов с весом Хэмминга равным k, $0<k\leq n$, исходного кода длины n, а $B(k)$ - число кодовых слов с весом Хэмминга равным k, $0\leq k\leq N$, расширенного кода длины $N=n+1$. Тогда: $A(k)=(k+1)B(k+1)/N$, если $k=2i-1$, и, $A(k)=(N-k)B(k)/N$, если $k=2i$, $1\leq i\leq N/2$, которые и дают возможность определить весовой спектр исходного кода. Вместе с тем, иногда просто определяется весовая функция расширенного кода. В этом случае, решение задачи нахождения весовой функции исходного кода дает следующее утверждение:

Предложение. Пусть $V(x)$ - весовая функция расширенного кода длины N, инвариантного относительно транзитивной группы подстановок, а $W(x)$ - весовая функция исходного кода. Тогда

$$(1-x)dV(x)/dx+NV(x)=NV(x). \qquad (1)$$

В качестве примера рассмотрим двоичный код Хэмминга с параметрами $(n, n-m, 3)$, где $n=2^m-1$. Как известно, дуальным к расширенному коду Хэмминга $(N, N-m, 4)$, где $N=n+1$, является код Рида-Маллера первого порядка. Тогда, используя тождество Мак-Вильямс, получаем весовую функцию $V(x)$ расширенного кода Хэмминга:

$$V(x)=[(1+x)^N+(1-x)^N+2n(1-x)^a(1+x)^a]/(2N), \text{ где } a=N/2.$$

Так как расширенный код Хэмминга принадлежит множеству расширенных кодов БЧХ, инвариантных относительно транзитивной группы подстановок, воспользуемся предложением. Подставляя значение функции $V(x)$ в тождество (1), и произведя несложные преобразования, получим:

$$NW(x)=(1+x)^n+n(1-x)^a(1+x)^{a-1}$$

Действительно, $W(x)$ - есть весовая функция кода Хэмминга с параметрами $(n, n-m,3)$.

Замечание. Наиболее конструктивно применение данного утверждения для получения весовых функций примитивных кодов БЧХ, исправляющего более одной ошибки. Действительно, если полностью описан спектр кода, дуального к коду БЧХ, то целесообразно, используя тождество Мак-Вильямс, найти весовую функцию расширенного кода, а затем применить тождество (1).

О достоверности одного метода сжатия тестовых реакций

Л.П. Махнист, В.А.Головко, Г.Л.Муравьев

Будем рассматривать метод сжатия тестовых реакций, построенный на основе регистра сдвига с обратными связями, порождаемыми образующим полиномом степени 2m двоичного кода БЧХ, исправляющего две ошибки с параметрами $(n-1, n-2m-1, 5)$, где $n=2^m$, m - нечетное, $m>3$.

Для оценки достоверности данного метода сжатия исследуется распределение вероятности $P(k)$ необнаружения ошибок кратности k, $1\le k\le n-1$, определяемое как отношение $A(k)$ - количества необнаруживаемых последовательностей, содержащих ошибки кратности k, к общему количеству возможных последовательностей с ошибками той же кратности: $P(k)=A(k)/C_{n-1}^{k}$.

Заметим, что величины $A(k)$ есть количество кодовых слов с весом Хэмминга равным k, соответствующего кода. Кроме того, так как расширенный код БЧХ $(n, n-2m-1, 6)$ инвариантен относительно транзитивной группы подстановок, то между вероятностью $P'(k)$ необнаружения ошибок кратности k расширенного кода и вероятностью $P(k)$ исходного кода выполняется следующее соотношение: $P(2i-1)=P(2i)=P'(2i)$, $1\le i\le n/2$. Тогда задача нахождения распределения вероятностей $P(k)$ фактически сводится к определению вероятностей $P'(2i)$, $1\le i\le n/2$, расширенного кода БЧХ $(n, n-2m-1, 6)$, определяемых выражением: $P'(2i)=A'(2i)/C_{n}^{2i}$, где $A'(2i)$ - количество кодовых слов с весом Хэмминга равным 2i расширенного кода.

Следующие утверждения устанавливают точные формулы для величин $A'(k)$, $P'(k)$ расширенного кода БЧХ с параметрами $(n, n-2m-1, 6)$.

Утверждение 1. Число $A'(k)$ кодовых слов с весом Хэмминга равным k расширенного двоичного кода БЧХ, исправляющего две ошибки с параметрами $(n, n-2m-1, 6)$ определяется следующим выражением:

$$A'(k)=[C_{n}^{k}+(-1)^{k/2}C_{n/2}^{k/2}(n-1)(n/2+1)+F(k)(n-1)n/2]/n^2,$$

где $F(k)$ вычисляется на основе трехчленного рекуррентного соотношения $k(k-1)F(k)=-[(k-3)(n-k+2)+(k-2)(n-k+1)]F(k-2)-(n-k+4)(n-$ [illegible] $(k-4)$ с