МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации
и варианты контрольной работы № 2
по разделам «Функции нескольких переменных»,
«Интегральное исчисление функции
одной переменной»,
«Дифференциальные уравнения», «Ряды»
общего курса дисциплины «Математика»

для студентов технических специальностей
заочной формы обучения

Брест 2019

УДК [517.3+517.51+517.91](076)

В настоящей методической разработке приведены варианты контрольных заданий по разделам «Функции нескольких переменных», «Интегральное исчисление функции одной переменной», «Дифференциальные уравнения» и «Ряды» общего курса дисциплины «Математика» для студентов технических специальностей заочной формы обучения. Даны методические указания, полезные для успешного выполнения контрольной работы.

Составители: Жук А.И., доцент, к.ф.-м.н.,
Защук Е.Н., доцент, к.ф.-м.н.,
Климчук М.С., старший преподаватель,
Наумовец С.Н., старший преподаватель.

Рецензент: Гринько Е.П., заведующий кафедрой методики преподавания физико-математических дисциплин Учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», кандидат педагогических наук, доцент.

Организационно-методические указания

В контрольную работу включены десять заданий по разделам «Функции нескольких переменных», «Интегральное исчисление функции одной переменной», «Дифференциальные уравнения» и «Ряды» общего курса дисциплины «Математика».

Нумерация задач состоит из двух чисел: первое число – номер задания, второе (после точки) – номер варианта.

Правила оформления контрольной работы:

1) контрольная работа выполняется в отдельной (тонкой) ученической тетради с отчерченными полями;
2) на обложке обязательно должен быть указан шифр (номер зачетной книжки);
3) контрольная работа выполняется студентом в соответствии со своим вариантом, который определяется двумя последними цифрами шифра;
4) каждое задание начинается на новой странице с обязательной записью его полного условия. Если задача имеет общую формулировку, то ее условие переписывают, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта;
5) решения всех заданий должны быть подробными и аккуратными, содержать достаточные пояснения, необходимые рисунки и таблицы. Решение каждой задачи заканчивается ответом;
6) завершает работу список используемой литературы и роспись студента;
7) после рецензии исправления в тексте работы недопустимы;
8) исправление ошибок, указанных рецензентом, выполняют в той же тетради после росписи студента.

Контрольные вопросы курса «Математика»
II семестр

1. Функции нескольких переменных (ФНП). Определение, способы задания и геометрическая интерпретация ФНП.
2. Предел и непрерывность ФНП. Частные приращения и частные производные.
3. Полное приращение ФНП и дифференцируемость ФНП. Полный дифференциал ФНП.
4. Достаточные условия дифференцируемости ФНП. Приложение полного дифференциала в приближенных вычислениях.
5. Производная сложной функции. Производные неявной функции.
6. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
7. Производная по направлению. Градиент и его свойства. Линии и поверхности уровня.
8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
9. Экстремум ФНП. Необходимые и достаточные условия экстремума ФНП.
10. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области. Условный экстремум ФНП.
11. Метод множителей Лагранжа.
12. Метод наименьших квадратов.
13. Первообразная функции. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование.
14. Методы интегрирования в неопределенном интеграле: замена переменной, интегрирование по частям.
15. Разложение рациональных дробей на простейшие. Интегрирование простейших рациональных дробей. Общая схема интегрирования рациональных дробей.
16. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.
17. Интегрирование чётных и нечётных степеней и произведений тригонометрических функций. Интегрирование рациональных тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка.
18. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.
19. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла. Геометрический и механический смыслы определенного интеграла.
20. Свойства определенного интеграла.
21. Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Барроу. Формула Ньютона-Лейбница.
22. Методы интегрирования определенного интеграла: метод подстановки (замены переменной); формула интегрирования по частям для определенного интеграла.
23. Несобственные интегралы. Теоремы сравнения.

24. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей в декартовых и полярных координатах; вычисление объемов тел; вычисление длины кривой.

25. Механические приложения определенного интеграла: масса плоской пластины; статические моменты плоской фигуры; центр тяжести плоской фигуры.

26. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям (ДУ). Основные понятия ДУ.

27. Задача Коши для ДУ первого порядка. Теорема существования и единственности решения.

28. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешимые в квадратурах: ДУ с разделяющимися переменными; однородные ДУ; линейные ДУ первого порядка; уравнение Бернулли.

29. ДУ высших порядков. Общие понятия. Задача Коши. Теорема существования и единственности. Понятие краевой задачи.

30. Уравнения, допускающие понижение порядка.

31. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков, их свойства.

32. Структура общего решения ЛОДУ. Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами.

33. Линейные неоднородные ДУ (ЛНДУ). Структура общего решения ЛНДУ.

34. ЛНДУ с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью.

35. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

36. Системы дифференциальных уравнений. Определение, общее решение, задача Коши.

37. Нормальная система дифференциальных уравнений. Метод исключения.

38. Линейные нормальные системы ДУ с постоянными коэффициентами.

39. Числовой ряд и его сумма. Свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости числового ряда.

40. Признаки сходимости числовых рядов с неотрицательными членами.

41. Знакопеременные ряды. Условная и абсолютная сходимость.

42. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

43. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал сходимости.

44. Свойства степенных рядов.

45. Разложение в степенные ряды основных элементарных функций.

46. Приложения степенных рядов.

Контрольная работа № 2

Задание 1. Задана функция $z = f(x, y)$. Вычислить производную функции z в точке M_0 в направлении вектора $\vec{a}$.

1.1	$z = xy + x^2 + y^2 - 3x - 6$;	$M_0(1;2)$;	$\vec{a} = (3;4)$.
1.2	$z = -xy^2 + 2x^3 + 5x + y^2 + 2$;	$M_0(1;-1)$;	$\vec{a} = (-3;4)$.
1.3	$z = xy + x^2 + y^2 - 6x - 9y - 3$;	$M_0(2;3)$;	$\vec{a} = (4;-3)$.
1.4	$z = -xy - x^2 - y^2 + 3x + 6$;	$M_0(2;-2)$;	$\vec{a} = (-4;-3)$.
1.5	$z = xy + x^2 + y^2 - 6x - 9y + 5$;	$M_0(-1;2)$;	$\vec{a} = (6;-8)$.
1.6	$z = 4xy + y^2 + x^2 - 2x + 6$;	$M_0(3;-2)$;	$\vec{a} = (-8;6)$.
1.7	$z = xy + x^2 + y^2 - 6x - 9y - 7$;	$M_0(-2;2)$;	$\vec{a} = (-4;3)$.
1.8	$z = 4xy + x^2 + y^2 - 2y - 1$;	$M_0(-1;-1)$;	$\vec{a} = (6;-8)$.
1.9	$z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y + 3$;	$M_0(-1;-1)$;	$\vec{a} = (12;5)$.
1.10	$z = 2xy - y^2 + 2x^3 + 2$;	$M_0(-1;-1)$;	$\vec{a} = (6;-8)$.
1.11	$z = 4xy + y^2 + x^2 - 2x + 1$;	$M_0(-2;2)$;	$\vec{a} = (12;5)$.
1.12	$z = -xy + x^2 + y^2 - 4x + 2$;	$M_0(1;-4)$;	$\vec{a} = (-5;12)$.
1.13	$z = -6xy + x^3 - y^2 + 4$;	$M_0(2;-2)$;	$\vec{a} = (-6;8)$.
1.14	$z = 3yx^2 + y^3 - 15y - 12x + 5$;	$M_0(-1;-1)$;	$\vec{a} = (12;5)$.
1.15	$z = 3yx^2 + y^3 - 15y - 12x + 5$;	$M_0(3;-2)$;	$\vec{a} = (8;-6)$.
1.16	$z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y - 6$;	$M_0(2;4)$;	$\vec{a} = (8;15)$.
1.17	$z = x^2 + 2x + y^2 + 4y - 6$;	$M_0(4;-1)$;	$\vec{a} = (-6;8)$.
1.18	$z = x^2 - 6x + y^2 + 4y + 2$;	$M_0(2;-1)$;	$\vec{a} = (-8;15)$.
1.19	$z = -xy + 15x - 2x^2 - 2y^2 + 1$;	$M_0(2;3)$;	$\vec{a} = (-8;-15)$.
1.20	$z = xy + x^2 + y^2 - 4x - 5y + 3$;	$M_0(2;-3)$;	$\vec{a} = (-15;8)$.
1.21	$z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$;	$M_0(-2;-3)$;	$\vec{a} = (-8;-6)$.
1.22	$z = -xy + x^2 + y^2 + 3x - 2y + 2$;	$M_0(-1;-1)$;	$\vec{a} = (-15;-8)$.
1.23	$z = -2xy + x^2 + 4y^2 + 10$;	$M_0(-2;-2)$;	$\vec{a} = (-3;-4)$.
1.24	$z = xy + x^2 + y^2 - 4x - 5y + 3$;	$M_0(2;3)$;	$\vec{a} = (6;-8)$.
1.25	$z = 3y^2 - y^3 + 3x^2 + 4x - 5$;	$M_0(2;3)$;	$\vec{a} = (-3;-4)$.
1.26	$z = xy + x^2 + y^2 - 4x - 5y + 3$;	$M_0(3;-2)$;	$\vec{a} = (-12;5)$.

1.27	$z=-6xy+y^3-x^2+5$;	$M_0(1;-3)$;	$\vec{a}=(-8;6)$.
1.28	$z=x^3+3xy^2-15x-12y-8$;	$M_0(1;-1)$;	$\vec{a}=(-6;8)$.
1.29	$z=xy+y^2+x^2-3y-6x+1$;	$M_0(1;-2)$;	$\vec{a}=(-4;-3)$.
1.30	$z=xy+y^2+x^2-3y-6x+1$;	$M_0(2;1)$;	$\vec{a}=(8;15)$.

Задание 2. Задана функция $z=f(x,y)$. Исследовать данную функцию на экстремум.

2.1	$z=-\frac{2}{3}x^3+2xy-y^2-1$;
2.2	$z=x^3+3xy^2-15x-12y$;
2.3	$z=x^2+xy+y^2+6x-9y$;
2.4	$z=3x^2-x^3+3y^2+4y$;
2.5	$z=x^3-6xy+y^2-39x+18y+20$;
2.6	$z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1$;
2.7	$z=-x^2+2xy+2y^3+4$;
2.8	$z=-3x^2+2xy-2y^2+10$;
2.9	$z=xy+x^2+y^2+x-y$;
2.10	$z=2x^3+xy^2+3x^2-y^2+1$;
2.11	$z=1+15x-2y^2-xy-2x^2$;
2.12	$z=x^2+xy+y^2-2x-y$;
2.13	$z=-3x^2+6x-3y^2-6y$;
2.14	$z=x^2+y^2+xy-4x-5y$;
2.15	$z=xy+y^2+x^2-6y-3x$;
2.16	$z=y^3-6xy-x^2+5$;
2.17	$z=x^2-4x+y^2+6y+17$;
2.18	$z=x^2-2xy+4y^3$;
2.19	$z=4xy+x^2-6x-y^2-2y-3$;
2.20	$z=x^3+y^3-3xy$;
2.21	$z=6xy-9x^2-9y^2+4x+4y+5$;
2.22	$z=x^2-xy+y^2+3x-2y+2$;
2.23	$z=2x^3+2y^3-6xy+5$;
2.24	$z=3x^3+3y^3-9xy+10$;
2.25	$z=8y^3+x^3-6xy+1$;
2.26	$z=-3x^2+6xy-2y^3+12x+2$;

2.27	$z=-2y^3+12xy-3x^2+6x-30y+1$;
2.28	$z=x^3+y^2-3x+2y$;
2.29	$z=x^2+y^2+xy-2x-y$;
2.30	$z=x^3+3xy^2-12y-15x$.

Задание 3. Найти неопределенные интегралы.

3.1 а) $\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int x e^{2x}dx$;

г) $\int \cos^4 3x\cdot\sin^2 3x\,dx$; д) $\int \frac{3x+1}{x^2-4x-2}dx$.

3.2 а) $\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}dx$; б) $\int (5x-2)\cdot\ln x dx$; в) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-e^x}}$;

г) $\int \sqrt[5]{\sin^4 x}\cdot\cos^3 x dx$; д) $\int \frac{x+2}{3x^2-x+5}dx$.

3.3 а) $\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2}dx$; б) $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2 dx}{1+x^2}$; в) $\int x^2\ln x dx$;

г) $\int \cos^3 x\cdot\sin^8 x\,dx$; д) $\int \frac{x-5}{2x^2+x-4}dx$.

3.4 а) $\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int (3x+1)\cos x\,dx$; в) $\int \frac{(1-\operatorname{tg} x)dx}{\cos^2 x}$;

г) $\int \cos^4 x\cdot\sin^3 x\,dx$; д) $\int \frac{2x+3}{3x^2+2x-7}dx$.

3.5 а) $\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2}dx$; б) $\int (2-x)\sin x\,dx$; в) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$;

г) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}dx$; д) $\int \frac{8-13x}{x^2+5x-1}dx$.

3.6 а) $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int x\cdot\arcsin x\,dx$; в) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$;

г) $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x}\cdot\cos^3 2x\,dx$; д) $\int \frac{3-5x}{4x^2+2x-3}dx$.

3.7 а) $\int \left(\sqrt[3]{x}-\frac{2\sqrt[4]{x}}{x}+3\right)dx$; б) $\int (3x+4)\cos x\,dx$; в) $\int x\sqrt{3-x^2}dx$;

г) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$; д) $\int \frac{3x-2}{x^2+5x-1}dx$.

3.8 а) $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x} + 4}{x^2} dx$; б) $\int x \sin 3x \, dx$; в) $\int \frac{\sqrt[3]{4 + \ln x}}{x} dx$;

г) $\int \sin^4 3x \cdot \cos^5 3x \, dx$; д) $\int \frac{dx}{4x^2 - 5x + 4}$.

3.9 а) $\int \frac{3x^2 - \sqrt[5]{x} + 2}{x} dx$; б) $\int \frac{\cos 3x}{4 + \sin 3x} dx$; в) $\int x \sin 2x \, dx$;

г) $\int \sin^4 2x \cdot \cos^2 2x \, dx$; д) $\int \frac{5x + 1}{x^2 - 4x + 1} dx$.

3.10 а) $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int x \sin(x - 5) \, dx$; в) $\int \frac{\sin x}{1 - \cos x} dx$;

г) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$; д) $\int \frac{x + 1}{2x^2 + 3x - 4} dx$.

3.11 а) $\int \frac{\sqrt[6]{x^5} - 5x^2 + 3}{x} dx$; б) $\int x \cdot \operatorname{arctg} 2x \, dx$; в) $\int \frac{x}{2x^2 - 7} dx$;

г) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx$; д) $\int \frac{x + 6}{3x^2 + x + 1} dx$.

3.12 а) $\int \left(x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 1 \right) dx$; б) $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2(x + 1)}}{x + 1} dx$; в) $\int \arccos 2x dx$;

г) $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \cdot \sin^3 x \, dx$; д) $\int \frac{2x - 1}{3x^2 - 2x + 6} dx$.

3.13 а) $\int \left(x^2 - \frac{\sqrt[6]{x}}{x} - 3 \right) dx$; б) $\int \frac{\sqrt{\ln^7(x + 1)}}{x + 1} dx$; в) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$;

г) $\int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cdot \cos^3 dx$; д) $\int \frac{x}{2x^2 + x + 5} dx$.

3.14 а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2x^5 + 5}{x} dx$; б) $\int x \cdot \ln x \, dx$; в) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$;

г) $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x} \cdot \sin^3 2x \, dx$; д) $\int \frac{x + 5}{x^2 + x - 2} dx$.

3.15 а) $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x} + 2x^3 - 4 \right) dx$; б) $\int (x^2 + 2) e^{-x} dx$; в) $\int \frac{\arcsin^3 x dx}{\sqrt{1 - x^2}}$;

г) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^3 x}} dx$; д) $\int \frac{3x - 2}{5x^2 - 3x + 2} dx$.

3.16 а) $\int \frac{\sqrt{x^3}-3x^4+2}{x}dx$; б) $\int x^2 \cdot \sin^2 x\,dx$; в) $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$;

г) $\int \sin^2 2x \cdot \cos^4 2x\,dx$; д) $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8}$.

3.17 а) $\int \left(2x^3-3\sqrt{x^5}+\frac{4}{x}\right)dx$; б) $\int x^2(\cos 2x+3)dx$; в) $\int x e^{7x^2+2}dx$;

г) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$; д) $\int \frac{x+4}{2x^2-7x+1}dx$.

3.18 а) $\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+5}{x^2}dx$; б) $\int e^{4\sin x} \cdot \cos x\,dx$; в) $\int \frac{x^2+2}{e^x}dx$;

г) $\int \sqrt[5]{\cos^4 x} \cdot \sin^3 x\,dx$; д) $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2}dx$.

3.19 а) $\int \frac{3x^2-\sqrt{x^3}+7}{x^3}dx$; б) $\int \frac{dx}{(x+5)\ln^3(x+5)}$; в) $\int \arcsin 2x\,dx$;

г) $\int \sin^4 2x \cdot \cos^3 2x\,dx$; д) $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5}$.

3.20 а) $\int \frac{3x^4-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2}dx$; б) $\int (x^2-3)\cos x\,dx$; в) $\int \frac{\ln^3(x-5)}{x-5}dx$;

г) $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}}dx$; д) $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}dx$.

3.21 а) $\int \left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{2}{x^3}+4\right)dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+4)}}{x+4}dx$; в) $\int \frac{x^2+1}{e^x}dx$;

г) $\int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}}dx$; д) $\int \frac{x+1}{3x^2-2x-3}dx$.

3.22 а) $\int \frac{\sqrt{x}-2x^3+6}{x}dx$; б) $\int (x^2-1)e^x dx$; в) $\int \frac{\ln^5(x-7)}{x-7}dx$;

г) $\int \sin^4 3x \cdot \cos^5 3x dx$; д) $\int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13}dx$.

3.23 а) $\int \frac{\sqrt[5]{x}-2x^3+4}{x^2}dx$; б) $\int x^2 \cos^2 x\,dx$; в) $\int \frac{\sqrt[5]{tg^2 3x}}{\cos^2 3x}dx$;

г) $\int \sqrt[5]{\sin^4 x} \cdot \cos^3 x\,dx$; д) $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1}dx$.

3.24 а) $\int \left(\sqrt{x}-\frac{3x^2}{\sqrt{x}}+2\right)dx$; б) $\int \frac{\sqrt{ctg^3 5x}}{\sin^2 5x}dx$; в) $\int \ln(x-5)dx$;

г) $\int \sin^3 x \cdot \cos^8 x\,dx$; д) $\int \frac{x}{2x^2+2x+5}dx$.

3.25 а) $\int\left(\sqrt[5]{x}-\frac{4}{x^5}+2\right)dx$; б) $\int(x^2+x)\cos x dx$; в) $\int\frac{\sqrt[5]{\mathrm{ctg}^4 x}}{\sin^2 x}dx$;

г) $\int\sin^4 2x\cdot\cos^5 2x\,dx$; д) $\int\frac{x-3}{x^2-5x+4}dx$.

3.26 а) $\int\frac{\sqrt[7]{x^6}-2x^2+3}{x}dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x}$; в) $\int\frac{3\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$;

г) $\int(x^2+2)e^x\,dx$; д) $\int\frac{2x-1}{2x^2+8x-6}dx$.

3.27 а) $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}-\frac{2}{x^3}+1\right)dx$; б) $\int(x^2-1)e^{-x}\,dx$; в) $\int\frac{x^4}{e^{x^5+1}}dx$;

г) $\int\sin^5 x\cdot\sqrt[5]{\cos^3 x}\,dx$; д) $\int\frac{2-x}{4x^2+16x-12}dx$.

3.28 а) $\int\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}+6\right)dx$; б) $\int x\cdot\sin^2 x\,dx$; в) $\int x^2\cdot e^{3x^3}dx$;

г) $\int\sin^4 x\cdot\cos^7 x\,dx$; д) $\int\frac{2x-1}{3x^2-6x-9}dx$.

3.29 а) $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}-\frac{7}{x^3}+5\right)dx$; б) $\int\arcsin 9x\,dx$; в) $\int\frac{x}{e^{2x^2+1}}dx$;

г) $\int\sin^6 3x\cdot\cos^3 3x\,dx$; д) $\int\frac{2x-1}{3+x-2x^2}dx$.

3.30 а) $\int\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}+6\right)dx$; б) $\int x\cdot\mathrm{arctg}\,2x dx$; в) $\int xe^{4-5x^2}dx$;

г) $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$; д) $\int\frac{x-4}{3x^2+x-1}dx$.

Задание 4. Вычислить определенный интеграл.

4.1 $\int_0^4\frac{\sqrt{x}}{4+x}dx$. 4.11 $\int_0^4\frac{1+x}{x+\sqrt{x}}dx$. 4.21 $\int_{-1}^2\frac{x^3}{\sqrt{x+2}}dx$.

4.2 $\int_4^{12}\frac{\sqrt{x-3}}{x}dx$. 4.12 $\int_2^5\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$. 4.22 $\int_0^9\frac{\sqrt{x}}{x+10}dx$.

4.3 $\int_0^3\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}dx$. 4.13 $\int_4^9\frac{\sqrt{x}}{x-1}dx$. 4.23 $\int_4^{16}\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot(x-1)}$.

4.4 $\int_{3}^{6}\frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}}dx$.

4.5 $\int_{25}^{49}\frac{\sqrt{x}}{x-6}dx$.

4.6 $\int_{1}^{9}\frac{x}{\sqrt{2x+7}}dx$.

4.7 $\int_{-8}^{0}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}+3}dx$.

4.8 $\int_{4}^{9}\frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$.

4.9 $\int_{1}^{2}\frac{dx}{2+\sqrt{x-1}}$.

4.10 $\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}+5}$.

4.14 $\int_{4}^{11}\frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}$.

4.15 $\int_{5}^{17}\frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$.

4.16 $\int_{8}^{11}\frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$.

4.17 $\int_{2}^{5}\frac{x+1}{x\cdot\sqrt{x-1}}dx$.

4.18 $\int_{8}^{23}\frac{x^3}{\sqrt{x-7}}dx$.

4.19 $\int_{5}^{8}\frac{x^2}{\sqrt{x-4}}dx$.

4.20 $\int_{-4}^{-3}\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$.

4.24 $\int_{2}^{3}\frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}$.

4.25 $\int_{6}^{18}\frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$.

4.26 $\int_{3}^{6}\frac{x^2}{\sqrt{x-2}}dx$.

4.27 $\int_{3}^{11}\frac{x-1}{x\sqrt{x-2}}dx$.

4.28 $\int_{-5}^{-2}\frac{x^3}{\sqrt{x+6}}dx$.

4.29 $\int_{6}^{10}\frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$.

4.30 $\int_{8}^{24}\frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$.

Задание 5. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = ax^2 + bx + c$ и $y = kx + d$. Выполнить рисунок. Значения коэффициентов даны в таблице:

	a	b	c	k	d
5.1	1	4	2	1	6
5.3	1	4	8	3	10
5.5	1	6	4	5	6
5.7	1	8	0	7	2
5.9	1	2	6	9	-4
5.11	2	2	2	1	5
5.13	2	4	8	3	11
5.15	2	6	4	5	5
5.17	2	8	0	7	3
5.19	2	2	6	9	3
5.21	3	2	2	1	4
5.23	3	4	8	3	10
5.25	3	6	4	5	14
5.27	3	8	0	7	4
5.29	3	2	6	9	4

	a	b	c	k	d
5.2	1	4	5	2	8
5.4	1	6	1	4	4
5.6	1	8	7	6	10
5.8	1	2	3	8	-2
5.10	2	2	9	10	3
5.12	2	4	5	2	17
5.14	2	6	1	4	5
5.16	2	8	7	6	31
5.18	2	2	3	8	11
5.20	2	2	9	10	19
5.22	3	4	5	2	6
5.24	3	6	1	4	9
5.26	3	8	7	6	15
5.28	3	2	3	8	12
5.30	3	2	9	10	5

Задание 6. Найти общее или частное (если указано начальное условие) решение следующих дифференциальных уравнений первого порядка:

6.1 а) $\left(x-e^{-2x}\right)dx+\left(y+e^{2y}\right)dy=0$; б) $y'-ytgx=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y(0)=2$.

6.2 а) $xyy'-y^2=4$; б) $y'-\dfrac{2y}{x}=x^3$, $y(1)=\dfrac{7}{6}$.

6.3 а) $xdy-(y+1)dx=0,\ y(2)=5$; б) $y'+\dfrac{y}{x}=2\ln x+1$.

6.4 а) $y'=2\sqrt{y}\ln x,\ y(e)=1$; б) $y'-\dfrac{2y}{x+1}=e^x(x+1)^2$.

6.5 а) $y'tgx-y=4$; б) $xy'-2y=x,\ y(1)=1$.

6.6 а) $4\left(yx^2+y\right)dy+\sqrt{5+y^2}dx=0$; б) $y'-\dfrac{2y}{x}=x^3,\ y(1)=\dfrac{3}{2}$.

6.7 а) $yy'\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$; б) $x^2y'-2xy=1,\ y(1)=5$.

6.8 а) $\left(x^2+x\right)y'=2y+1$; б) $xy'-3y=x^3+x,\ y(1)=3$.

6.9 а) $\sin 2xdx+(\cos 2y+y)dy=0$; б) $xy'+3y=x^3-2x,\ y(1)=2$.

6.10 а) $\left(3+e^x\right)yy'=e^x$; б) $xy'-3y=3-4x-x^2,\ y(1)=3$.

6.11 а) $y'=\dfrac{y+1}{x}$; б) $xy'+2y=2+3x+x^2,\ y(1)=3$.

6.12 а) $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$; б) $xy'-2y=x^3+x,\ y(1)=4$.

6.13 а) $\sin 4xdx+\left(4y-e^{2y}\right)dy=0$; б) $y'-\dfrac{4y}{x}=x^2-2x+3,\ y(1)=-5$.

6.14 а) $y'\cos^2 x=y\ln y,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e$; б) $xy'+2y=x^3+x^2$.

6.15 а) $xyy'-y^2=9$; б) $y'-\dfrac{4y}{x}=-x^2+2x-3,\ y(1)=4$.

6.16 а) $(x+1)dy-(y+2)dx=0$; б) $y'+\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^2,\ y(0)=\dfrac{6}{5}$.

6.17 а) $\left(e^{3x}-3x^2\right)dx-\sin 2ydy=0$; б) $y'-\dfrac{4y}{x}=x^2+2x-3,\ y(1)=2$.

6.18 а) $\left(4+e^x\right)yy'=e^x$; б) $xy'+4y=8x-2,\ y(1)=0{,}1$.

6.19 а) $y'=\dfrac{y+1}{x+3}$; б) $y'-\dfrac{3y}{x}=x^2-2x+5,\ y(1)=-3$.

6.20 а) $x\sqrt{4+y^2}dx+y\sqrt{9+x^2}dy=0$; б) $xy'+3y=5x+4,\ y(1)=6$.

6.21 а) $\left(x^2 - e^{-4x}\right)dx - \sin 3y dy = 0$; б) $y' - \dfrac{2y}{x+2} = e^{3x}\left(x+2\right)^2$, $y(0) = 4$.

6.22 а) $xyy' - y^2 = 16$; б) $y' - \dfrac{3y}{x} = x^3 - 2x^2 + 5$, $y(1) = 5$.

6.23 а) $xdy - (y+3)dx = 0$, $y(0) = 13$; б) $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{4x-5}{x^2}$.

6.24 а) $6\left(x^2y + y\right)dy - \sqrt{4+y^2}dx = 0$; б) $x^2y' - 2xy = 1$, $y(1) = 5$.

6.25 а) $yy'\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = 0$; б) $y' - \dfrac{3y}{x} = 4x^2 + 2x + 1$, $y(1) = 6$.

6.26 а) $(x+3)y' = y - 4$, $y(2) = 14$; б) $xy' + 2y = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2}$.

6.27 а) $x\sqrt{4+y^2}dx - y\sqrt{1+x^2}dy = 0$; б) $y' - \dfrac{4y}{x} = x^2 - 2x + 3$, $y(1) = -5$.

6.28 а) $y'\cos^2 x = y\ln y$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = e$; б) $y' + \dfrac{4y}{x} = \dfrac{x^2-3x+1}{x^4}$.

6.29 а) $(x+1)dy = (y+6)dx$; б) $y' + \dfrac{3y}{x+1} = (x+1)^2$, $y(2) = \dfrac{3}{2}$.

6.30 а) $\left(4x^3 - e^{-2x}\right)dx - \sin 3y dy = 0$; б) $xy' + 5y = 10x - 4$, $y(1) = 1$.

Задание 7. а) Решить задачу Коши; б) Найти общее решение дифференциального уравнения

7.1 а) $y'' - 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 7$; б) $y'' - 4y' - 21y = 0$.

7.2 а) $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 3$; б) $y'' + 10y' + 25y = 0$.

7.3 а) $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$; б) $y'' - 6y' + 10y = 0$.

7.4 а) $y'' + 4y' - 5y = 0$, $y(0) = -4$, $y'(0) = 2$; б) $y'' + 4y' + 8y = 0$.

7.5 а) $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$; б) $y'' + 6y' = 0$.

7.6 а) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$; б) $4y'' - 12y' + 9y = 0$.

7.7 а) $y'' + 9y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$; б) $y'' - 7y' + 12y = 0$.

7.8 а) $y'' + 2y' - 8y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -2$; б) $y'' + 3y = 0$.

7.9 а) $y'' + 2y' + 17y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 5$; б) $y'' - 6y' - 7y = 0$.

7.10 а) $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$; б) $y'' - 4y' + 13y = 0$.

7.11 а) $y'' - 7y' + 10y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$; б) $y'' + 9y = 0$.

7.12 а) $y'' - 6y' + 10y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; б) $y'' + 7y' + 6y = 0$.

7.13 а) $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$; б) $y'' + y' = 0$.

7.14 а) $y'' - 7y' + 6y = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 2$; б) $y'' - 6y' + 25y = 0$.

7.15 а) $y'' - 3y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$; б) $y'' - 4y' + 20y = 0$.

7.16 а) $y'' + 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$; б) $y'' + 2y = 0$.

7.17 а) $y'' - 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$; б) $4y'' + 4y' + y = 0$.

7.18 а) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$; б) $y'' + 2y' - 15y = 0$.

7.19 а) $y'' + 8y' + 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$; б) $y'' - 11y' + 10y = 0$.

7.20 а) $y'' - 7y' - 8y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 3$; б) $y'' + 5y = 0$.

7.21 а) $y'' - 8y' + 25y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$; б) $y'' + 7y' - 8y = 0$.

7.22 а) $y'' - 10y' + 16y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$; б) $y'' - 2y' + 26y = 0$.

7.23 а) $y'' - 7y' + 6y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 3$; б) $y'' + 2y' + 10y = 0$.

7.24 а) $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$; б) $y'' - 9y' + 20y = 0$.

7.25 а) $6y'' - y' - y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$; б) $y'' + 16y = 0$.

7.26 а) $y'' - 10y' + 9y = 0$, $y(0) = -4$, $y'(0) = 4$; б) $y'' - 2y' + 17y = 0$.

7.27 а) $y'' - 10y' + 29y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$; б) $y'' - 4y' = 0$.

7.28 а) $2y'' - 3y' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$; б) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

7.29 а) $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$; б) $y'' - 11y' - 12y = 0$.

7.30 а) $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$; б) $4y'' - 2y' + 5y = 0$.

Задание 8. Найти общее решение дифференциального уравнения.

8.1 $y'' + 4y' - 12y = x^2 + x + 2$.

8.2 $y'' - 6y' + 9y = x^2 - 2x - 4$.

8.3 $y'' + 4y' = -x^2 + 3x + 6$.

8.4 $y'' - 2y' + 5y = x^2 - 4x - 8$.

8.5 $y'' - 5y' + 6y = x^2 + 5x + 10$.

8.6 $y'' - 4y' + 13y = -2x^2 - 6x - 12$

8.7 $y'' - 4y = x^2 + 7x + 14$.

8.8 $y'' - 2y' + y = x^2 - 8x - 16$.

8.9 $y'' + 6y' + 9y = -x^2 + 9x + 18$.

8.10 $y'' - 2y' - 3y = x^2 - 10x + 9$.

8.11 $y'' + 2y' - 8y = x^2 + 11x - 8$.

8.12 $y'' - 5y' + 4y = -x^2 - 12x + 7$.

8.13 $y'' + y' - 6y = x^2 + 13x - 6$.

8.14 $y'' - 4y' + 3y = x^2 - 14x + 5$.

8.15 $y'' + 2y' + 10y = -2x^2 + 15x - 4$

8.16 $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 8x + 1$.

8.17 $y'' - 4y' + 4y = -4x^2 + 7x - 2$.

8.18 $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 6x + 3$.

8.19 $y'' + 2y' + 37y = 3x^2 + 5x - 4$.

8.20 $y'' + 36y = x^2 - 4x + 5$.

8.21 $y'' + 2y' + y = 2x^2 + 3x - 6$.

8.22 $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 2x + 7$.

8.23 $y'' - 12y' + 36y = 4x^2 - x + 8$.

8.24 $y'' - 8y' + 12y = x^2 + x + 6$.

8.25 $y'' - 4y' + 5y = -3x^2 - 2x + 5$.

8.26 $y'' + 6y' + 13y = x^2 - 3x + 2$.

8.27 $y'' - 6y' + 9y = -x^2 + 12x + 6$.

8.28 $y'' + 8y' + 25y = x^2 - 5x - 8$.

8.29 $6y'' - y' - y = -x^2 - 9x - 1$.

8.30 $y'' - 9y' + 20y = x^2 + 10x + 6$.

Задание 9. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

9.1 $\begin{cases} x' = 4x - 3y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ 9.2 $\begin{cases} x' = 5x - y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$ 9.3 $\begin{cases} x' = 8x - y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

9.4 $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$ 9.5 $\begin{cases} x' = x - 4y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ 9.6 $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -4x - y. \end{cases}$

9.7 $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$ 9.8 $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$ 9.9 $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y. \end{cases}$

9.10 $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$ 9.11 $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ 9.12 $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y. \end{cases}$

9.13 $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ 9.14 $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$ 9.15 $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

9.16 $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ 9.17 $\begin{cases} x' = -2x + 3y, \\ y' = x. \end{cases}$ 9.18 $\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = 4x - 4y. \end{cases}$

9.19 $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y. \end{cases}$ 9.20 $\begin{cases} x' = 5x - y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$ 9.21 $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$

9.22 $\begin{cases} x' = x + 5y, \\ y' = 7x + 3y. \end{cases}$ 9.23 $\begin{cases} x' = -x + 4y, \\ y' = 4x - y. \end{cases}$ 9.24 $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = -2x + 3y. \end{cases}$

9.25 $\begin{cases} x' = y, \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$ 9.26 $\begin{cases} x' = 3x - 6y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$ 9.27 $\begin{cases} x' = -2x + 8y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$

9.28 $\begin{cases} x' = 3x - 7y, \\ y' = x - 5y. \end{cases}$ 9.29 $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 5x - y. \end{cases}$ 9.30 $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$

Задание 10. Исследовать числовые ряды на сходимость.

10.1 а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{3n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^2+1}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n+4}$.

10.2 а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{5n^2-2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^3}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+2}$.

10.3 а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3+3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)^2}{4^n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-3}$.

10.4 а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+4}}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cdot 5^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+5}$.

10.5 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+6}{(n+5)^3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 3^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+3}$.

10.6 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+6)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{(n+5)\cdot 6^n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+5}}{n+6}$.

10.7 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n-1}{(n+7)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+5)(n-2)}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+7)}$.

10.8 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{(n+8)^3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5n^2}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+3}}{8n+4}$.

10.9 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+9)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\cdot n!}{(n+1)(n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$.

10.10 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+5}{n(n+10)}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n\cdot(n+2)}{(n+3)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$.

10.11 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+10}{(n+1)^3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+3)}{5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+7}$.

10.12 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{7n-2}{n^2+2n}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2\cdot 2^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2+2n}$.

10.13 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{3n^2+3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot 2^{n-1}}{n^2+2n+3}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$.

10.14 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n(n^2+4)}}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot 4^n}{(n+1)^4}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+5}}$.

10.15 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{(2n+5)^3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+5}$.

10.16 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+5}{(n+6)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^4}{n\cdot n!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+6}}$.

10.17 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+7)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n+2}}{(n+5)(n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n(n+7)}}$.

10.18 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+4}{(n+8)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{2n}}{n(n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{8n+10}$.

10.19 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{(n+9)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot 9^n}{(n+1)\cdot(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+9)^2}$.

10.20 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n+20}{(5n+10)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n\cdot n}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+10}}$.

10.21 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{22n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+3)^2}{n\cdot 5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2-1}$.

10.22 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{7}{(3n+2)\cdot n}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)^5}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+2)}$.

10.23 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}}{n^2+3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}}{(n^2+2)(n+3)}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)\sqrt{n}}$.

10.24 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{(n^2+4)\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!\cdot n^4}{(n+1)^4\cdot 4^n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+5)}$.

10.25 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{\sqrt{(2n+5)^3}}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)\cdot n^2}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+5)n}$.

10.26 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{2n}}{(n+6)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{n\cdot 6^n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2+6}$.

10.27 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+7)^3}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{7^{n+2}}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n+1}}{(n+3)(n+7)}$.

10.28 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{\sqrt[3]{(n+8)^5}}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot 3^{2n+1}}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+8)}$.

10.29 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6n-1}{(n+9)\cdot n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+3)!}{(n+1)\cdot 9^n}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{(n+9)^2}}$.

10.30 а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+30}{\sqrt{(5n+10)^5}}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n\cdot(n+10)^2}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+10}}$.

Задание 11. Для данного степенного ряда написать первые четыре члена ряда и исследовать его на сходимость:

11.1 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3(x-1)^n}{2^n\sqrt{(n+1)^5}}$; 11.2 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+2)^n}{4^n\cdot(n+2)}$; 11.3 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n\cdot(x-3)^n}{2\sqrt{n+3}}$;

11.4 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n(x+4)^n}{(n+4)^2}$; 11.5 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-5)^{n+1}}{5\sqrt{n+1}}$; 11.6 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+6)^n}{(n+2)\cdot 2^n}$;

11.7 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-7)^n}{5^n\sqrt{(n+3)^3}}$; 11.8 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+8)^n\cdot 8^n}{5^n(n+1)^2}$; 11.9 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-9)^n}{(n+2)\cdot 2^n}$;

11.10 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n(x+10)^n}{2(n+10)^5}$; 11.11 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n\cdot(x-1)^{n-1}}{4^n\cdot(n+11)}$; 11.12 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(x+2)^n}{2^n\cdot\sqrt{n+10}}$;

11.13 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n(x-3)^n}{\sqrt[3]{(n+13)^2}}$; 11.14 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n\cdot(x+4)^n}{5^n\cdot\sqrt{n+1}}$; 11.15 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n\cdot(x-5)^n}{(n+15)\cdot 2^n}$;

11.16 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-6)^n}{\sqrt{5^n(n+16)}}$; 11.17 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+7)^n\cdot 7^n}{4^n\cdot(n+1)}$; 11.18 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6(x-8)^n}{(n+7)\cdot 2^n}$;

11.19 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n\cdot(x+9)^n}{2^n\cdot(n+1)\sqrt{n}}$; 11.20 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n\cdot(x-10)^n}{3^n\cdot(n^2+5)}$; 11.21 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n\cdot(x+1)^n}{3^n\cdot\sqrt{n+7}}$;

11.22 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n\cdot(x-2)^n}{(n^2+22n)\cdot 7^n}$; 11.23 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+3)^n}{5^n\cdot\sqrt{n^2+1}}$; 11.24 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-4)^n\cdot 9^n}{(n^3+1)\cdot 2^n}$;

11.25 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8(x+5)^n}{5^n\cdot\sqrt{n^3+3n}}$; 11.26 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5\cdot(x-6)^n\cdot 8^n}{\sqrt[3]{n^2+3n+1}}$; 11.27 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n\cdot(x+7)^n}{(n\sqrt{n}+5)\cdot 7^n}$;

11.28 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n\cdot(x-8)^n}{8^n\cdot\sqrt{4n^2-1}}$; 11.29 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{7^n\cdot(x+9)^n}{4^n\cdot\sqrt[4]{n+2}}$; 11.30 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n\cdot(x-10)^n}{5^n\cdot\sqrt{n^3+3n}}$.

Задание 12. Найти три первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения $y'=f(x;y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=y_0$.

12.1 $y'=3x\cdot y-\sin x$, $y(0)=2$; 12.2 $y'=4x\cdot y^2-e^x+2$, $y(0)=0$;

12.3 $y'=3x^3+x\cdot y^2$, $y(0)=1$; 12.4 $y'=3\sin x+y\cdot e^x+2$, $y(0)=1$;

12.5 $y'=4x+e^x+y$, $y(0)=3$; 12.6 $y'=3x^2y-2xy+4$, $y(0)=0$;

12.7 $y'=4xy^2-x^2y$, $y(0)=3$; 12.8 $y'=6x\cdot y^2+e^{2x}$, $y(0)=2$;

12.9 $y'=x+2y^2+3x^3y$, $y(0)=6$; 12.10 $y'=2\cos x+y^2$, $y(0)=1$;

12.11 $y'=4e^x-xy$, $y(0)=0$; 12.12 $y'=4x^2y^2-2x+y$, $y(0)=4$;

12.13 $y'=x^2y+\sin 2x$, $y(0)=2$; 12.14 $y'=3x^2y-e^x+4$, $y(0)=0$;

12.15 $y'=3x^2y-\cos 3x+1$, $y(0)=1$; 12.16 $y'=2x\cdot y^2+e^{4x}$, $y(0)=0$;

12.17 $y'=\sin 2x+3y^2-x$, $y(0)=1$; 12.18 $y'=x^2+y^2-x+y$, $y(0)=2$;

12.19 $y'=3x\cdot y^2-\sin 5x$, $y(0)=3$; 12.20 $y'=3\sin x+x^2y+x$, $y(0)=2$;

12.21 $y'=2x^3+3y^2+y$, $y(0)=3$; 12.22 $y'=3x^2-yx+\cos x$, $y(0)=4$;

12.23 $y'=\cos x+y+e^{4x}$, $y(0)=1$; 12.24 $y'=4\sin x+y^2+2x$, $y(0)=1$;

12.25 $y'=3y+2y^2$, $y(0)=4$; 12.26 $y'=x+2y^2+3e^{3x}$, $y(0)=0$;

12.27 $y'=5e^x+xy-\sin x$, $y(0)=0$; 12.28 $y'=3xy-e^{2x}+2$, $y(0)=0$;

12.29 $y'=3x\cdot y^2+y$, $y(0)=2$; 12.30 $y'=3x\cdot y^3-2y+2x$, $y(0)=2$.

Рекомендации к выполнению контрольной работы №2

Задание 1. Задана функция $z = x^2 - xy + y^2 - x - 2y + 4$. Вычислить производную функции z в точке $M_0 = (1; 2)$ в направлении вектора $\vec{a} = (3; 4)$.

Решение

1) Найдем частные производные первого и второго порядков функции $z = x^2 - xy + y^2 - x - 2y + 4$:

$$z'_x = \left(x^2 - xy + y^2 - x - 2y + 4\right)'_x = 2x - y - 1;$$

$$z'_y = \left(x^2 - xy + y^2 - x - 2y + 4\right)'_y = -x + 2y - 2;$$

$$z''_{xx} = \left(2x - y - 1\right)'_x = 2;$$

$$z''_{xy} = \left(2x - y - 1\right)'_y = -1;$$

$$z''_{yx} = \left(-x + 2y - 2\right)'_x = -1;$$

$$z''_{yy} = \left(-x + 2y - 2\right)'_y = 2.$$

2) Вычислим значения частных производных первого порядка в точке $M_0 = (1; 2)$:

$$z'_x\left(M_0\right) = (2x - y - 1)\big|_{(1;\,2)} = 2 \cdot 1 - 2 - 1 = -1;$$

$$z'_y\left(M_0\right) = (-x + 2y - 2)\big|_{(1;\,2)} = -1 + 2 \cdot 2 - 2 = 1.$$

3) Производная функции $z = f(x; y)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{a}$ равна:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial \vec{a}} = z'_x\left(M_0\right) \cdot \cos\alpha + z'_y\left(M_0\right) \cdot \cos\beta.$$

Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{a}$:

$$(\cos\alpha; \cos\beta) = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}; \frac{a_y}{|\vec{a}|}\right) = \left(\frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}}; \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right) = \left(\frac{3}{\sqrt{25}}; \frac{4}{\sqrt{25}}\right) = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right).$$

Тогда

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial \vec{a}} = -1 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Ответ: 0,2.

Задание 2. Задана функция $z = x^2 y + xy^2 - 2xy$. Исследовать данную функцию на экстремум.

Решение

1) Найдем частные производные первого порядка функции $z = x^2 y + xy^2 - 2xy$:

$$z'_x = \left(x^2 y + xy^2 - 2xy\right)'_x = 2xy + y^2 - 2y = y\left(2x + y - 2\right);$$

$$z'_y = \left(x^2 y + xy^2 - 2xy\right)'_y = x^2 + 2xy - 2x = x\left(x + 2y - 2\right).$$

2) Найдем критические точки из системы $\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} y\left(2x + y - 2\right) = 0; \\ x\left(x + 2y - 2\right) = 0. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0; \\ x = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0; \\ x + 2y - 2 = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + y - 2 = 0; \\ x = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + y - 2 = 0; \\ x + 2y - 2 = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Из системы $\begin{cases} y = 0; \\ x = 0. \end{cases}$ получили точку $M_1\left(0;\ 0\right)$.

Из системы $\begin{cases} y = 0; \\ x + 2y - 2 = 0. \end{cases}$ получили точку $M_2\left(2;\ 0\right)$.

Из системы $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0; \\ x = 0. \end{cases}$ получили точку $M_3\left(0;\ 2\right)$.

Найдем решение системы $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0; \\ x + 2y - 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x + 2; \\ x + 2(-2x + 2) - 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} y = -2x + 2; \\ -3x - 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{3}; \\ x = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, получили точку $M_4\left(\dfrac{2}{3};\ \dfrac{2}{3}\right)$.

3) Выясним, какие из этих точек являются точками экстремума. Найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \left(2xy + y^2 - 2y\right)'_x = 2y;$$

$$z''_{xy} = \left(2xy + y^2 - 2y\right)'_y = 2x + 2y - 2;$$

$$z''_{yx} = \left(x^2 + 2xy - 2x\right)'_x = 2x + 2y - 2;$$

$$z''_{yy} = \left(x^2 + 2xy - 2x\right)'_y = 2x.$$

Составим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2x + 2y - 2 \\ 2x + 2y - 2 & 2x \end{vmatrix} = 2y \cdot 2x - (2x + 2y - 2)^2 =$$

$$= 4xy - (2x + 2y - 2)^2.$$

4) Подставим в полученное выражение Δ координаты точек и, используя достаточные условия экстремума получим:

$\Delta\left(M_1\right) = 0 - \left(-2\right)^2 = -4 < 0$, т. е. в точке M_1 экстремума нет;

$\Delta\left(M_2\right) = 4 \cdot 2 \cdot 0 - (2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 2)^2 = 0 - 4 = -4 < 0$, т. е. в точке M_2 экстремума нет;

$\Delta\left(M_3\right) = 4 \cdot 0 \cdot 2 - (2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 2)^2 = 0 - 4 = -4 < 0$, т. е. в точке M_3 экстремума нет;

$$\Delta\left(M_4\right) = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \left(2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} - 2\right)^2 = \frac{16}{9} - \left(\frac{8}{3} - 2\right)^2 = \frac{16}{9} - \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} > 0,$$

т. к. $z''_{xx}\left(M_4\right) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} > 0$, то точка M_4 - точка минимума.

Значение функции в точке экстремума равно:

$$z_{\min} = z\left(M_4\right) = z\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} + \frac{8}{27} - \frac{8}{9} = -\frac{8}{27}.$$

Ответ: $z_{\min} = z\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$.

Задание 3. Найти неопределенные интегралы (результаты в случаях а), б), в) проверить дифференцированием)

а) $\displaystyle\int \frac{3 - 2x^4 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}} dx$; б) $\displaystyle\int x \cdot \sqrt{x^2 + 3}\, dx$; в) $\displaystyle\int \left(2x + 3\right) \cos 4x\, dx$;

г) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}} dx$; д) $\displaystyle\int \frac{3x - 6}{2 - 5x - x^2} dx$.

Решение

а) $\displaystyle\int \frac{3 - 2x^4 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}} dx = 3 \cdot \int x^{-1/4}\, dx - 2 \cdot \int x^{15/4}\, dx + \int x^{5/12}\, dx =$

$$= 4 \cdot x^{3/4} - \frac{8}{19} \cdot x^{19/4} + \frac{12}{17} \cdot x^{17/12} + C = 4 \cdot \sqrt[4]{x^3} - \frac{8}{19} \cdot \sqrt[4]{x^{19}} + \frac{12}{17} \cdot \sqrt[12]{x^{17}} + C.$$

Проверка:

$$\left(4\cdot x^{3/4}-\frac{8}{19}\cdot x^{19/4}+\frac{12}{17}\cdot x^{17/12}+C\right)'=$$

$$=4\cdot\frac{3}{4}\cdot x^{-1/4}-\frac{8}{19}\cdot\frac{19}{4}\cdot x^{15/4}+\frac{12}{17}\cdot\frac{17}{12}\cdot x^{5/12}=3\cdot x^{-1/4}-2\cdot x^{15/4}+x^{5/12}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt[4]{x}}-2\cdot\sqrt[4]{x^{15}}+\sqrt[12]{x^5}=\frac{3-2\cdot\sqrt[4]{x^{16}}+\sqrt[12]{x^8}}{\sqrt[4]{x}}=\frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}.$$

б) $\int x\cdot\sqrt{x^2+3}\,dx$.

Занесем под знак дифференциала функцию $y=x$ и воспользуемся свойствами дифференциала, получим

$$x\,dx=d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{2}d\left(x^2\right)=\frac{1}{2}d\left(x^2+3\right).$$

Тогда

$$\int x\cdot\sqrt{x^2+3}\,dx=\int\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}d\left(x^2+3\right)=\frac{1}{2}\cdot\int\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}\,d\left(x^2+3\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+3\right)^{3/2}}{3/2}+C=\frac{1}{3}\left(x^2+3\right)^{3/2}+C=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+3\right)^3}+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+3\right)^3}+C\right)'=\frac{1}{3}\cdot\left(\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}}\right)'+\left(C\right)'=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+3\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2+3}\cdot 2x=x\cdot\sqrt{x^2+3}.$$

в) $\int(2x+3)\cos 4x\,dx$.

Воспользуемся формулой интегрирования по частям $\int u\,dv=uv-\int v\,du$.

$$\int(2x+3)\cos 4x\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=2x+3, & du=d(2x+3)=(2x+3)'dx=2dx,\\ dv=\cos 4x\,dx, & v=\frac{1}{4}\int\cos 4x\,d\left(4x\right)=\frac{1}{4}\sin 4x\end{array}\right|=$$

$$=(2x+3)\cdot\frac{\sin 4x}{4}-\int\frac{\sin 4x}{4}\cdot 2\,dx=\frac{(2x+3)\sin 4x}{4}-\frac{1}{2}\int\sin 4x\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}(2x+3)\sin 4x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(-\cos 4x)+C=\frac{1}{4}(2x+3)\cdot\sin 4x+\frac{1}{8}\cos 4x+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{4}(2x+3)\cdot\sin 4x+\frac{1}{8}\cos 4x+C\right)'=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left((2x+3)\cdot\sin 4x\right)'+\frac{1}{8}\cdot(\cos 4x)'+(C)'=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left((2x+3)'\cdot\sin 4x+(2x+3)\cdot(\sin 4x)'\right)+\frac{1}{8}\cdot(-\sin 4x)\cdot(4x)'=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\sin 4x+(2x+3)\cdot\cos 4x\cdot(4x)'\right)-\frac{1}{8}\cdot\sin 4x\cdot 4=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\sin 4x+(2x+3)\cdot\cos 4x\cdot 4\right)-\frac{1}{2}\cdot\sin 4x=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sin 4x+(2x+3)\cdot\cos 4x-\frac{1}{2}\cdot\sin 4x=(2x+3)\cdot\cos 4x.$$

г) $\displaystyle\int\frac{\cos^3 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}}dx=\int\frac{\cos^2 4x\cdot\cos 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}}dx=\int\frac{\left(1-\sin^2 4x\right)\cdot\cos 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}}dx.$

Применим в интеграле замену

$$\left|\begin{array}{l} t=\sin 4x, \\ dt=d\left(\sin 4x\right)=\left(\sin 4x\right)'dx=\cos 4x\cdot(4x)'dx=4\cos 4x\,dx, \\ \cos 4x dx=\dfrac{1}{4}dt. \end{array}\right|$$

Тогда

$$\int\frac{1-t^2}{\sqrt[5]{t}}\cdot\frac{1}{4}dt=\frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{\sqrt[5]{t}}dt-\frac{1}{4}\cdot\int\frac{t^2}{\sqrt[5]{t}}dt=\frac{1}{4}\cdot\int t^{-1/5}dt-\frac{1}{4}\cdot\int t^{9/5}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{5}+1}}{-\frac{1}{5}+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{9}{5}+1}}{\frac{9}{5}+1}+C=\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot t^{\frac{4}{5}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{14}\cdot t^{14/5}+C.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\int\frac{\cos^3 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}}dx=\frac{5}{16}\sqrt[5]{\sin^4 4x}-\frac{5}{56}\sqrt[5]{\sin^{14} 4x}+C.$$

д) $\displaystyle\int\frac{3x-6}{2-5x-x^2}dx.$

Так как степень числителя и знаменателя отличается на единицу, то выделим в числителе подынтегральной функции слагаемое, равное производной знаменателя. $\left(2-5x-x^2\right)'=-5-2x$.

$$3x-6=3(x-2)=-\frac{3}{2}(-2x+4)=-\frac{3}{2}(-2x-5+5+4)=-\frac{3}{2}\left((-2x-5)+9\right).$$

Тогда

$$\int \frac{3x-6}{2-5x-x^2}dx = \int \frac{-\frac{3}{2}\left(\left(-2x-5\right)+9\right)}{2-5x-x^2}dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\int \frac{-2x-5}{2-5x-x^2}dx + \int \frac{9}{2-5x-x^2}dx\right) = -\frac{3}{2}\left(I_1+I_2\right), \text{ где}$$

$$I_1 = \int \frac{-2x-5}{2-5x-x^2}dx \text{ и } I_2 = \int \frac{9}{2-5x-x^2}dx.$$

Найдем I_1:

$$I_1 = \int \frac{-2x-5}{2-5x-x^2}dx = \int \frac{\left(2-5x-x^2\right)'}{2-5x-x^2}dx = \int \frac{d\left(2-5x-x^2\right)}{2-5x-x^2} = \ln\left|2-5x-x^2\right|.$$

Найдем I_2:

$$I_2 = \int \frac{9}{2-5x-x^2}dx = -9\int \frac{dx}{x^2+5x-2} = -9\int \frac{dx}{x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2-2} =$$

$$= -9\int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-2} = -9\int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{33}{4}} = -9\int \frac{d\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2} =$$

$$= -9\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{33}}{2}}\cdot\ln\left|\frac{x+\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}}{x+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}}\right| = -\frac{9}{\sqrt{33}}\cdot\ln\left|\frac{2x+5-\sqrt{33}}{2x+5+\sqrt{33}}\right|.$$

Следовательно,

$$\int \frac{3x-6}{2-5x-x^2}dx = -\frac{3}{2}\left(\ln\left|2-5x-x^2\right| - \frac{9}{\sqrt{33}}\cdot\ln\left|\frac{2x+5-\sqrt{33}}{2x+5+\sqrt{33}}\right|\right)+C$$

Ответ. а) $4\cdot\sqrt[4]{x^3}-\frac{8}{19}\cdot\sqrt[4]{x^{19}}+\frac{12}{17}\cdot\sqrt[12]{x^{17}}+C$.

б) $\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+3\right)^3}+C$.

в) $\frac{1}{4}\left(2x+3\right)\cdot\sin 4x+\frac{1}{8}\cos 4x+C$.

г) $\frac{5}{16}\sqrt[5]{\sin^4 4x}-\frac{5}{56}\sqrt[5]{\sin^{14} 4x}+C$.

д) $-\frac{3}{2}\left(\ln\left|2-5x-x^2\right|-\frac{9}{\sqrt{33}}\cdot\ln\left|\frac{2x+5-\sqrt{33}}{2x+5+\sqrt{33}}\right|\right)+C$.

Задание 4. Вычислить $\int\limits_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$.

Решение

Воспользуемся формулой замены переменной в определенном интеграле

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(t)\Big|_\alpha^\beta = F(\beta)-F(\alpha),$$

где $x=\varphi(t)$, $\varphi(a)=\alpha$, $\varphi(b)=\beta$.

$$\int\limits_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{1+x},\ x=t^2-1, \\ dx=\left(t^2-1\right)' dt = 2t\,dt, \\ x=3 \ \Rightarrow\ t=2, \\ x=8 \ \Rightarrow\ t=3, \end{array} \right| = \int\limits_2^3 \frac{t^2-1}{t}\cdot 2t\,dt = 2\cdot\int\limits_2^3 \left(t^2-1\right)dt =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3 = 2\cdot\left(\frac{27}{3}-3-\frac{8}{3}+2\right) = 2\cdot\left(\frac{19}{3}-1\right) = 2\cdot\frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10{,}67.$$

Ответ: 10,67.

Задание 5. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+2x-2$ и $y=x+4$. Выполнить рисунок.

Решение

Найдем точки пересечения параболы $y=x^2+2x-2$ и прямой $y=x+4$.

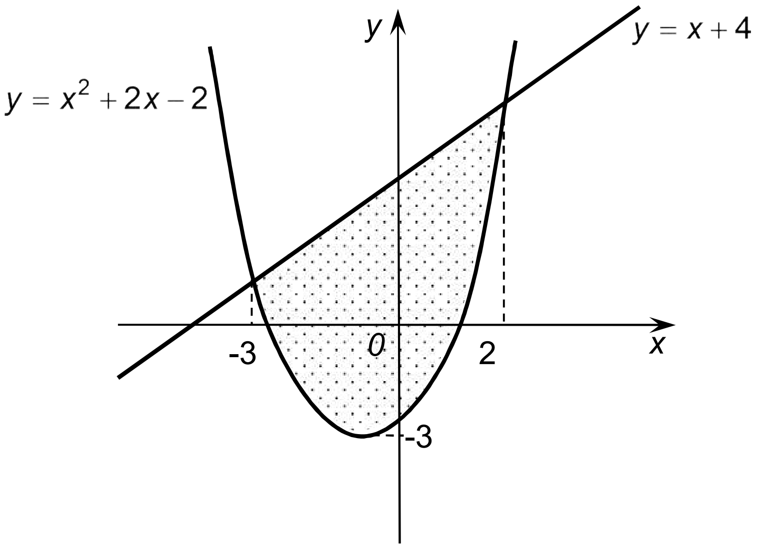
$$\begin{cases} y=x^2+2x-2 \\ y=x+4 \end{cases}$$

$x^2+2x-2=x+4$

$x^2+x-6=0$

$x_1=-3$, $x_2=2$

$y_1=1$, $y_2=6$.



Используя найденные точки $(-3;1)$ и $(2;6)$, построим фигуру, ограниченную линиями: $y = x^2 + 2x - 2$ – парабола с вершиной в точке $(-1;-3)$ и $y = x + 4$ – прямая.

Воспользуемся формулой вычисления площади плоской фигуры $S_ф = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$, где $y = f_2(x)$ – уравнение верхней, а $y = f_1(x)$ – нижней границы области.

В нашем случае $f_2(x) = x + 4$, $f_1(x) = x^2 + 2x - 2$. Тогда

$$S_ф = \int_{-3}^{2} \left((x+4) - \left(x^2 + 2x - 2\right)\right)dx = \int_{-3}^{2} \left(-x^2 - x + 6\right)dx = \left.\left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right)\right|_{-3}^{2}$$

$$= \left(-\frac{8}{3} - 2 + 12\right) - \left(9 - \frac{9}{2} - 18\right) = 20\frac{5}{6} \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ. $S_ф = 20\frac{5}{6}$ (кв. ед.).

Задание 6. Найти общее или частное решение дифференциальных уравнений.

а) Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y' \cdot \sin^2 x = y \ln y$.

Решение

Данное уравнение – уравнение с разделяющимися переменными. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$y' \cdot \sin^2 x = y \ln y \;\Rightarrow\; \sin^2 x \cdot \frac{dy}{dx} = y \ln y \;\Rightarrow\; \sin^2 x dy = y \ln y dx.$$

Разделим переменные и проинтегрируем обе части равенства

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{dy}{y \ln y} \;\Rightarrow\; \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \frac{dy}{y \ln y} \;\Rightarrow\; -ctgx + C = \int \frac{d(\ln y)}{\ln y} \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; -ctgx + C = \ln|\ln y|$ – общий интеграл исходного дифференциального уравнения, где $C = const$.

Ответ: $-ctgx + C = \ln|\ln y|$.

б) Найти частное решение дифференциального уравнения $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x} - 4x$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 4$.

Решение

$y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x} - 4x$ – линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Найдем общее решение исходного уравнения с помощью замены $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$. Тогда $y' = u'v + v'u$. Подставим выражения для y и y' в уравнение.

$$u'v + v'u + \frac{3}{x}uv = \frac{2}{x} - 4x \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{3}{x}v\right) = \frac{2}{x} - 4x.$$

Функции $u(x)$ и $v(x)$ определим из системы $\begin{cases} v' + \dfrac{3}{x}v = 0 \\ u'v = \dfrac{2}{x} - 4x \end{cases}$.

Каждое уравнение системы – уравнение с разделяющимися переменными. Решим первое уравнение системы.

$$v' + \frac{3}{x}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{3v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{3dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -3\ln|x| \Rightarrow v = \frac{1}{x^3}.$$

Найденную функцию $v(x)$ подставим во второе уравнение системы и найдем функцию $u(x)$.

$$u'v = \frac{2}{x} - 4x \Rightarrow \frac{u'}{x^3} = \frac{2}{x} - 4x \Rightarrow u' = 2x^2 - 4x^4 \Rightarrow u = \int\left(2x^2 - 4x^4\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{2x^3}{3} - \frac{4x^5}{5} + C.$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = u \cdot v \Rightarrow y = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^5}{5} + C\right) \cdot \frac{1}{x^3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} - \frac{4x^2}{5} + \frac{C}{x^3},\ C = const.$$

Определим константу С из начального условия $y(1) = 4$.

$$4 = \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + C \Rightarrow C = 4 + \frac{2}{15} \Rightarrow C = \frac{62}{15}.$$

Искомое частное решение имеет вид $y = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4x^2}{5} + \dfrac{62}{15x^3}$.

Ответ: $y = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4x^2}{5} + \dfrac{62}{15x^3}$.

Задание 7. а) Решить задачу Коши $y'' + 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -1$.

Решение

$y'' + 3y' - 4y = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 3k - 4 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются числа $k_1 = -4$ и $k_2 = 1$.

Так как корни характеристического уравнения – действительные не совпадающие числа, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{k_1 \cdot x} + C_2 e^{k_2 \cdot x} \Rightarrow y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x},\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Неизвестные константы C_1 и C_2 найдем из условий $\begin{cases} y(0) = 4, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$

Найдем y':

$$y'(x) = \left(C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x}\right)' = -4C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x}.$$

Тогда, подставляя начальные условия в $y(x)$ и $y'(x)$, получим

$$\begin{cases} C_1 e^{-4\cdot 0} + C_2 e^{0} = 4, \\ -4C_1 e^{-4\cdot 0} + C_2 e^{0} = -1, \end{cases} \text{или} \begin{cases} C_1 + C_2 = 4, \\ -4C_1 + C_2 = -1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем, что $C_1 = 1$ и $C_2 = 3$. Значит, решение задачи Коши имеет вид: $y(x) = e^{-4x} + 3e^{x}$.

Ответ: $y(x) = e^{-4x} + 3e^{x}$.

б) Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 10y' + 25y = 0$.

Решение

$y'' + 10y' + 25y = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 10k + 25 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются числа $k_1 = k_2 = -5$.

Так как корни характеристического уравнения – действительные совпадающие числа, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = \left(C_1 x + C_2\right)e^{k\cdot x} \Rightarrow y(x) = \left(C_1 x + C_2\right)e^{-5x},\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y(x) = \left(C_1 x + C_2\right)e^{-5x}$, $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Решение

$y'' - 4y' + 5y = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 5 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются числа

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i = \alpha \pm \beta i,$$

где $D = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4 = 4 \cdot i^2$, так как $i^2 = -1$. Откуда имеем $\alpha = 2$ и $\beta = 1$.

Так как корни характеристического уравнения – пара комплексно сопряженных чисел, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\alpha \cdot x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right) \Rightarrow y(x) = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right),$$

$C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Ответ: $y(x) = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$, $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Задание 8. Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 5y = 10x^2 + 4x + 3$.

Решение

$y'' - 4y' + 5y = 10x^2 + 4x + 3$ – линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

Общее решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде суммы двух функций $y(x) = \overline{y}(x) + y^*(x)$, где $\overline{y}(x)$ – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y^*(x)$ – любое частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 5y = 10x^2 + 4x + 3$.

Общим решением однородного дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

является функция $\overline{y}(x) = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$, $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$ (см. решение задания 7).

Найдем $y^*(x)$. Правая часть исходного дифференциального уравнения $f(x) = 10x^2 + 4x + 3$ – многочлен второй степени. Поэтому частное решение будем искать в виде $y^*(x) = x^s\left(Ax^2 + Bx + C\right)$, где параметр s равен количеству совпадений числа *0* с корнями характеристического уравнения. Так как среди корней нет числа *0*, то $s = 0$. Тогда $y^*(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Вычислим неизвестные коэффициенты A, B и C по методу неопределенных коэффициентов. Для этого найдем $(y^*)'$ и $(y^*)''$.

$$(y^*)' = \left(Ax^2 + Bx + C\right)' = 2Ax + B,\ (y^*)'' = (2Ax + B)' = 2A.$$

Так как $y^*(x)$ – это решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 10x^2 + 4x + 3,$$

то, подставляя в уравнение вместо y^*, $(y^*)'$ и $(y^*)''$ найденные выражения, получим

$$2A - 4(2Ax + B) + 5\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 10x^2 + 4x + 3.$$

В левой части уравнения раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$5Ax^2 + (-8A + 5B)x + (2A - 4B + 5C) = 10x^2 + 4x + 3.$$

Приравняем коэффициенты в левой и правой частях уравнения при одинаковых степенях:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & \quad 5A = 10 \\ x^1 & -8A + 5B = 4 \\ x^0 & 2A - 4B + 5C = 3 \end{array}\right\},$$

$$\begin{cases} A = 2 \\ 5B = 4 + 16 \\ -4B + 5C = 3 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ 5B = 20 \\ -4B + 5C = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 4 \\ 5C = -1 + 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 4 \\ 5C = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 4 \\ C = 3 \end{cases}$$

Следовательно, частное решение исходного дифференциального уравнения примет вид

$$y^*(x) = 2x^2 + 4x + 3.$$

Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + 2x^2 + 4x + 3,\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y(x) = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + 2x^2 + 4x + 3$, $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' = -12x^2 + 14x + 6$.

Решение

$y'' - 4y' = -12x^2 + 14x + 6$ – линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

Общее решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде суммы двух функций $y(x) = \overline{y}(x) + y^*(x)$, где $\overline{y}(x)$ – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения $y'' - 4y' = 0$, $y^*(x)$ – любое частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 4y' = -12x^2 + 14x + 6$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения
$$y'' - 4y' = 0.$$
Составим характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению
$$k^2 - 4k = 0.$$
Корнями характеристического уравнения являются числа
$$k_1 = 0 \text{ и } k_2 = 4.$$
Так как корни характеристического уравнения – действительные не совпадающие числа, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид
$$\bar{y}(x) = C_1 e^{0\cdot x} + C_2 e^{4\cdot x} \quad \Rightarrow \quad \bar{y}(x) = C_1 + C_2 e^{4x},\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Найдем $y^*(x)$. Правая часть исходного дифференциального уравнения $f(x) = -12x^2 + 14x + 6$ – многочлен второй степени. Поэтому частное решение будем искать в виде $y^*(x) = x^s\left(Ax^2 + Bx + C\right)$, где параметр s равен количеству совпадений числа *0* с корнями характеристического уравнения. Так как $k_1 = 0$, то $s = 1$. Тогда
$$y^*(x) = x\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$
Вычислим неизвестные коэффициенты A, B и C по методу неопределенных коэффициентов. Для этого найдем $(y^*)'$ и $(y^*)''$
$$(y^*)' = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right)' = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$
$$(y^*)'' = \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)' = 6Ax + 2B.$$
Так как $y^*(x)$ – это решение дифференциального уравнения
$$y'' - 4y' = -12x^2 + 14x + 6,$$
то, подставляя в уравнение вместо y^*, $(y^*)'$ и $(y^*)''$ найденные выражения, получим
$$6Ax + 2B - 4\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = -12x^2 + 14x + 6.$$
В левой части уравнения раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:
$$-12Ax^2 + (6A - 8B)x + (2B - 4C) = -12x^2 + 14x + 6.$$
Приравняем коэффициенты в левой и правой частях уравнения при одинаковых степенях:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & -12A=-12 \\ x^1 & 6A-8B=14 \\ x^0 & 2B-4C=6 \end{array}\Bigg\}$$

$$\begin{cases} A=1 \\ -8B=14-6 \\ 2B-4C=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ -8B=8 \\ 2B-4C=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ -4C=6+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ -4C=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1. \\ B=-1. \\ C=-2. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение исходного дифференциального уравнения примет вид

$$y^*(x)=x^3-x^2-2x.$$

Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1+C_2e^{4x}+x^3-x^2-2x,\ C_1,\ C_2\in\mathbb{R}.$$

Ответ: $y(x)=C_1+C_2e^{4x}+x^3-x^2-2x$, $C_1,\ C_2\in\mathbb{R}$.

Задание 9. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'=-7x+y, \\ y'=-2x-5y. \end{cases}$

Решение

Решим систему дифференциальных уравнений методом исключений. Продифференцируем по t первое уравнение системы

$$x''=-7x'+y'.$$

Подставляя в полученное уравнение вместо y' ее значение из второго уравнения исходной системы, получим

$$x''=-7x'-2x-5y.$$

Выразим из первого уравнения исходной системы y и подставим в полученное уравнение

$$x'=-7x+y \quad\Rightarrow\quad y=x'+7x.$$

$$x''=-7x'-2x-5(x'+7x) \quad\Rightarrow\quad x''+12x'+37x=0.$$

Получим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $k^2+12k+37=0$ имеет корни $k_{1,2}=-6\pm1\cdot i$. Тогда

$$x=e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t),\ C_1,\ C_2\in\mathbb{R}.$$

Используя равенство $y=x'+7x$, найдем функцию $y(t)$.

$$y=x'+7x=\left(e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)\right)'+7\left(e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)\right)=$$

$$=-6\left(e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)\right)'+\left(e^{-6t}(-C_1\sin t+C_2\cos t)\right)+$$

$$+7\left(e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)\right)'=e^{-6t}\left((C_1+C_2)\cos t+(C_2+C_1)\sin t\right).$$

Таким образом, решением системы будет

$$\begin{cases} x = e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t, \\ y = e^{-6t}\left((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 + C_1)\sin t)\right), \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t), \\ y = e^{-6t}\left((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 + C_1)\sin t)\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Задание 10. Исследовать числовые ряды на сходимость.

а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+2}{4n+7}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+2}{\sqrt{n^4+8}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(n+1)!}{(n+6)\cdot 3^n}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n\cdot(-1)^{n+1}}{2n^2+3}$

Решение

а) Мы имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+2}{4n+7} = \dfrac{3}{11} + \dfrac{4}{15} + \dfrac{5}{19} + \dfrac{6}{23} + \ldots$. Его члены положительны и убывают. Найдем, к чему стремится его *n-й* член при стремлении *n* к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{4n+7} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{4+\frac{7}{n}} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

Значит, необходимое условие сходимости ряда не выполняется и ряд расходится.

б) Мы имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+2}{\sqrt{n^4+8}} = \dfrac{3}{\sqrt{9}} + \dfrac{4}{\sqrt{24}} + \dfrac{5}{\sqrt{89}} + \dfrac{6}{\sqrt{264}} + \ldots$. Его члены положительны и убывают. Найдем, к чему стремится его *n-й* член при стремлении *n* к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^4+8}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{n^2+\frac{8}{n^2}}} = 0.$$

Значит, необходимое условие сходимости ряда выполняется и ряд может как сходиться, так и расходиться.

Исследуем данный ряд по предельному признаку сравнения, согласно которому два ряда сходятся или расходятся одновременно, если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = t \neq 0$. Так как в числителе максимальная степень *n* равна *1*, а в знаменателе – *2*, то сравнивать будем с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$

($\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$). Найдем предел отношения общих членов исходного и гармонического рядов при стремлении n к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{\sqrt{n^4+8}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{\sqrt{n^4+8}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{8}{n^2}}}=1\neq 0.$$

Таким образом, по предельному признаку сравнения, исходный ряд и гармонический сходятся или расходятся одновременно. Так как гармонический ряд расходится, то расходится и исходный ряд.

в) Мы имеем ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{(n+6)\cdot 3^n}=\frac{2}{21}+\frac{6}{72}+\frac{24}{243}+\frac{120}{810}+\ldots$. Его члены положительны и убывают. Так как в числителе общего члена ряда присутствует факториал, а в знаменателе степень, то при проверке стремления этого члена при стремлении *n* к бесконечности получим довольно сложный предел:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+6)\cdot 3^n},$$

то вычислять его не будем.

Исследуем данный ряд на сходимость по предельному признаку Д'Аламбера: если $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, то при $q<1$ данный ряд сходится, при $q>1$ – расходится, при $q=1$ – требуется исследовать по другим признакам.

Поскольку $a_n=\frac{(n+1)!}{(n+6)\cdot 3^n}$, $a_{n+1}=\frac{(n+2)!}{(n+7)\cdot 3^{n+1}}=\frac{(n+2)\cdot(n+1)!}{(n+7)\cdot 3^n\cdot 3}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)\cdot(n+1)!}{(n+7)\cdot 3^n\cdot 3}}{\frac{(n+1)!}{(n+6)\cdot 3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot(n+1)!}{(n+7)\cdot 3^n\cdot 3}\cdot\frac{(n+6)\cdot 3^n}{(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot(n+6)}{(n+7)3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+8n+12}{3n+21}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{8}{n}+\frac{12}{n^2}}{\frac{3}{n}+\frac{21}{n^2}}=+\infty>1.$$

Следовательно, данный ряд расходится.

г) Мы имеем ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{e}+\frac{1}{e^{\sqrt{2}}\sqrt{2}}+\frac{1}{e^{\sqrt{3}}\sqrt{3}}+\frac{1}{2e^{2}}+\dots$. Его члены положительны и убывают. Найдем, к чему стремится его *n-й* член при стремлении *n* к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{n}}\sqrt{n}}=0.$$

Значит, необходимое условие сходимости ряда выполняется и ряд может сходиться.

Исследуем этот ряд на сходимость с помощью интегрального признака Коши. В качестве функции $f(x)$ возьмем функцию $f(x)=\frac{1}{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}$ при $x\geq 1$. Эта функция на данном промежутке непрерывна и убывает, причем $f(n)=\frac{1}{e^{\sqrt{n}}\sqrt{n}}$. Тогда, по интегральному признаку, ряд будет сходиться или расходиться одновременно с несобственным интегралом $\int_1^{+\infty}f(x)dx$. Вычислим этот интеграл:

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}dx=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{dx}{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}=\left[\sqrt{x}=t,\quad dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}},\begin{matrix}x=A, & t=\sqrt{A}\\ x=1, & t=1\end{matrix}\right]=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\int_1^{\sqrt{A}}\frac{2dt}{e^t}=\lim_{A\to\infty}(-\frac{2}{e^t})\Big|_1^{\sqrt{A}}=\lim_{A\to\infty}(-\frac{2}{e^A}+\frac{2}{e})=0+\frac{2}{e}=\frac{2}{e}.$$

Так как несобственный интеграл равен числу, то он сходится. Следовательно, исходный ряд – сходящийся.

д) Мы имеем ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n+1}}{2n^2+3}=\frac{1}{5}-\frac{2}{11}+\frac{3}{21}-\frac{4}{35}+\dots$. Так как любые два соседних члена этого ряда имеют разные знаки, то ряд – знакочередующийся.

Исследуем этот ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин данного, то есть $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2n^2+3}$. Сравним этот ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$. Найдем предел отношения их общих членов при стремлении *n* к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{2n^2+3}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{3}{n^2}}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Таким образом, по предельному признаку сравнения, так как гармонический ряд расходится, то расходится и ряд из абсолютных величин.

То есть исходный ряд не сходится абсолютно. Исследуем его на условную сходимость. По признаку Лейбница, если для знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ или $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ выполняются условия:

1) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq ... \geq a_n \geq ...$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится.

Исходный ряд знакочередующийся и удовлетворяет условиям признака Лейбница:

1) его общий член стремится к нулю при возрастании n $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n\cdot(-1)^{n+1}}{2n^2+3}\right| = 0\right)$;

2) $\frac{1}{5} \geq \frac{2}{11} \geq \frac{3}{21} \geq \frac{4}{35} \geq ... \geq \frac{n}{2n^2+3} \geq ...$ (члены ряда убывают по абсолютной величине).

Значит, ряд сходится. А так как ряд из абсолютных величин расходится, то исходный ряд сходится условно.

Ответ: а) ряд расходится;
б) ряд расходится;
в) ряд расходится;
г) ряд сходится;
д) ряд сходится условно.

Задание 11. Для степенного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{17(x-9)^n}{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}}$ написать первые четыре члена ряда и исследовать его на сходимость.

Решение

Напишем первые четыре члена ряда, подставляя в формулу общего члена $u_n = \frac{17(x-9)^n}{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}}$ вместо n соответственно *1*, *2*, *3*, *4*:

$$u_1 = \frac{17(x-9)}{12\cdot\sqrt[4]{3}},\ u_2 = \frac{17(x-9)^2}{12^2\cdot\sqrt[4]{12}},\ u_3 = \frac{17(x-9)^3}{12^3\cdot\sqrt[4]{33}},\ u_4 = \frac{17(x-9)^4}{12^4\cdot\sqrt[4]{72}}.$$

Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{17(x-9)^n}{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}} = \frac{17(x-9)}{12\cdot\sqrt[4]{3}} + \frac{17(x-9)^2}{12^2\cdot\sqrt[4]{12}} + \frac{17(x-9)^3}{12^3\cdot\sqrt[4]{33}} + \frac{17(x-9)^4}{12^4\cdot\sqrt[4]{72}} + ...$

Найдем интервал сходимости ряда, используя признак Д'Аламбера.

Поскольку

$$u_n = \frac{17(x-9)^n}{12^n \sqrt[4]{n^3+2n}}, \; u_{n+1} = \frac{17(x-9)^{n+1}}{12^{n+1}\sqrt[4]{(n+1)^3+2n+2}} = \frac{17(x-9)^n \cdot (x-9)}{12^n \cdot 12\sqrt[4]{n^3+3n^2+5n+3}},$$

то

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{17(x-9)^n \cdot (x-9)}{12^n \cdot 12\sqrt[4]{n^3+3n^2+5n+3}} \cdot \frac{12^n \sqrt[4]{n^3+2n}}{17(x-9)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-9)}{12}\cdot\sqrt[4]{\frac{n^3+2n}{n^3+3n^2+5n+3}}\right| = \frac{|x-9|}{12}\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{3}{n^3}}} = \frac{|x-9|}{12}.$$

Найдем значения *x*, при которых $q<1$ и данный ряд сходится:

$$\frac{|x-9|}{12}<1 \;\Leftrightarrow\; |x-9|<12 \;\Leftrightarrow\; -12<x-9<12 \;\Leftrightarrow\; -3<x<21.$$

Следовательно, на интервале $(-3;21)$ данный ряд сходится.

Исследуем ряд на концах интервала.

При $x=21$ получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{17\cdot 12^n}{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{17}{\sqrt[4]{n^3+2n}}$. Сравним этот ряд с рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$, который расходится. Найдем предел отношения их общих членов при стремлении *n* к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{17}{\sqrt[4]{n^3+2n}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{17n^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{n^3+2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{17}{\sqrt[4]{1+\frac{2}{n^2}}} = 17 \neq 0.$$

Таким образом, по предельному признаку сравнения, данный ряд расходится.

При $x=-3$ получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{17(-12)^n}{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{17(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+2n}}$, который является знакочередующимся. Проверим для него выполнение условий признака Лейбница:

1) его общий член стремится к нулю при возрастании *n* $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{17(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+2n}}\right| = 0\right)$;

2) члены ряда убывают по абсолютной величине $\left(\frac{17}{\sqrt[4]{3}} > \frac{17}{\sqrt[4]{12}} > \frac{17}{\sqrt[4]{33}} > \frac{17}{\sqrt[4]{72}} > \ldots\right)$.

Значит, ряд сходится (условно, так как ряд из абсолютных величин расходится).

Прибавляя точку $x = -3$ к интервалу сходимости, получим область сходимости исходного ряда: $[-3;21)$.

Ответ: $[-3;21)$.

Задание 12. Найти пять первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = y^2 + x^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0.5$.

Решение

I вариант. Предположим, что решение данного уравнения раскладывается в степенной ряд: $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$.

Так как $y(0) = 0.5$ по условию, то $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$.

Производная в этом случае имеет вид:

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots.$$

Подставим полученные разложения в исходное уравнение

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots = (0.5 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots)^2 + x^2.$$

Приведем подобные члены и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях уравнения:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^3 + \ldots = 0.25 + 2 \cdot 0.5 \cdot a_1 x + (2 \cdot 0.5 \cdot a_2 + a_1^2) x^2 +$$
$$+ (2 \cdot a_1 \cdot a_2 + 2 \cdot 0.5 \cdot a_3) x^3 + \ldots + x^2,$$

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^3 + \ldots = 0.25 + a_1 x + (a_2 + a_1^2 + 1) x^2 +$$
$$+ (2 \cdot a_1 \cdot a_2 + a_3) x^3 + \ldots.$$

$$\begin{cases} a_1 = 0.25 \quad , \\ 2a_2 = a_1 \quad , \\ 3a_3 = a_2 + a_1^2 + 1 \quad , \\ 4a_4 = 2a_1 a_2 + a_3 \quad , \\ \quad ..... \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0.25 \quad , \\ a_2 = 0.125 \quad , \\ a_3 \approx 0.3958 \quad , \\ a_4 \approx 0.114575 \quad , \\ \quad ..... \quad . \end{cases}$$

Таким образом, решение данного уравнения раскладывается в степенной ряд:

$$y(x) = 0.5 + 0.25x + 0.125x^2 + 0.3958x^3 + 0.114575x^4 + \ldots.$$

II вариант. Будем искать решение дифференциального уравнения в виде ряда Маклорена: $y(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$.

Из условия $y' = y^2 + x^2$, полагая $x = 0$, $y = 0.5$, получим $y'(0) = 0.5^2 + 0^2 = 0.25$.

Продифференцируем уравнение $y' = y^2 + x^2$ по x. Получим

$$y'' = 2yy' + 2x \quad \Rightarrow \quad y''(0) = 2 \cdot 0.5 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0 = 0.25.$$

Дифференцируя далее, находим последовательно:

$$y''' = 2yy'' + 2y'^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad y'''(0) = 2 \cdot 0.5 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.25^2 + 2 = 2.375;$$

$$y^{IV} = 2yy''' + 6y'y'' \quad \Rightarrow \quad y^{IV}(0) = 2 \cdot 0.5 \cdot 2.375 + 6 \cdot 0.25 \cdot 0.25 = 2.75; \ldots .$$

Таким образом, решение данного уравнения имеет вид:

$$y(x) = 0.5 + \frac{0.25}{1}x + \frac{0.25}{2}x^2 + \frac{2.375}{6}x^3 + \frac{2.75}{24}x^4 + ... \text{ или}$$

$$y(x) = 0.5 + 0.25x + 0.125x^2 + 0.3958x^3 + 0.11458x^4 + ...$$

Ответ: $y(x) = 0.5 + 0.25x + 0.125x^2 + 0.3958x^3 + 0.11458x^4 + ...$.

Учебно-методическая литература по дисциплине "Математика"

1. Высшая математика для инженеров : учеб. пособие для студ. : в 2 т. / С. А. Минюк [и др.]; под общ. ред. Н. А. Микулик. − Минск : Элайда, 2004. – Т. 1. – 455 с. – Т. 2. – 586 с.

2. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике : учебное пособие / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова; ред. П. И. Монастырный. - 4-е изд., стер. – Минск : ТетраСистемс, 2002. − 640 с.

3. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пос. : в 4 ч. / Под общ. ред. А.П. Рябушко. – 6-е изд., испр. – Минск : Выш. шк., 2014. – Ч. 2 : Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – 396 с. : ил.

4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. − М. : АйрисПресс, 2004. − 288 с.

5. Сборник задач по высшей математике: с контрольными работами : в 2 т. / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. − 7-е изд. − М. : АйрисПресс, 2008. – Т. 1. – 576 с. – Т. 2. – 592 с.

6. Гладкий, И. И. Высшая математика : методические указания и варианты заданий для студентов экономических специальностей дневной формы обучения / И. И. Гладкий, Т. И. Каримова, Е. В. Кузьмина, Л. П. Махнист, С. Н. Наумовец. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2012. – 35 с.

7. Гладкий, И. И. Differential equations. Multiple integrals. Infinite sequences and series : учебно-методическая разработка на английском языке по дисциплине «Математика» / И. И. Гладкий, А. В. Дворниченко, Н. А. Дерачиц, Т. И. Каримова, Т. В. Шишко. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2014. – 76 с.

8. Гладкий, И. И. Functions of several variables. Integrals for foreign first-year students : учебно-методическая разработка на английском языке по дисциплине «Математика» для студентов 1-го курса / И. И. Гладкий, А. В. Дворниченко, Н. А. Дерачиц, Т. И. Каримова, Т. В. Шишко. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2014. – 60 с.

9. Швычкина, Е. Н. Кратные и криволинейные интегралы. Ряды : методические указания и варианты контрольных работ для студентов технических специальностей заочной формы обучения / Е. Н. Швычкина, Л. Т. Мороз, С. Н. Наумовец, Л. С. Золотухина. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2015. – 28 с.

10. Жук, А. И. Задачи и упражнения по курсу «Математика» для студентов факультета электронно-информационных систем : интегральное исчисление, функции одной переменной / А. И. Жук, Т. И. Каримова, С. Ф. Лебедь, И. И. Гладкий, В. С. Рубанов. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2016. – 60 с.

Содержание

Учебное издание

Составители:
Жук Анастасия Игоревна
Защук Елена Николаевна
Климчук Мария Станиславовна
Наумовец Светлана Николаевна

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации
и варианты контрольной работы № 2
по разделам «Функции нескольких переменных»,
«Интегральное исчисление функции
одной переменной»,
«Дифференциальные уравнения», «Ряды»
общего курса дисциплины «Математика»

для студентов технических специальностей
заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: Наумовец С.Н.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная вёрстка: Наумовец С.Н.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано в печать 31.12.2019 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага «Performer».
Гарнитура «Arial». Усл. печ. л. 2,55. Уч. изд. л. 2,75. Заказ № 1730. Тираж 23 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный
технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.